# LES POLYNÔMES DE TAYLOR : DÉCOUVRONS COMMENT LES CONSTRUIRE ET LES UTILISER EFFICACEMENT

Pascal DUPONT, Nicole VAST

## 1. Introduction

Le nom de Brook Taylor est plus souvent associé à une *formule* ou à un *théorème* qu'à un polynôme. Tout cela est bien sûr lié : la formule conclut l'énoncé du théorème, et le polynôme est l'un des éléments de la formule.

Certains enseignements présentent le théorème de Taylor comme une généralisation du théorème des accroissements finis. La raison pour laquelle il est mentionné est qu'il servira comme outil théorique, par exemple pour l'étude des extrémums. Mais, à titre d'alibi, on propose aux élèves des applications numériques du genre "Calculer sin 46° avec quatre décimales exactes.", dont l'utilité leur échappe, à juste titre, puisqu'en quelques pressions sur les touches de leur calculette ils obtiennent un résultat plus précis. Tenter de se justifier en disant qu'ils comprendront "comment la calculette procède" est à la limite de l'escroquerie intellectuelle, car, par souci d'efficacité, les algorithmes programmés contiennent beaucoup d'autres astuces. Une manière de stimuler les élèves est peut-être de leur lancer un défi comme dans le paragraphe 4.

Une autre motivation peut être que les polynômes de Taylor constituent un outil puissant pour les calculs de limites, dans les cas d'indéterminations du type 0/0 (ou ceux qui s'y ramènent). A ce stade, les élèves connaissent déjà la "règle" de L'Hospital, dont ils raffolent en raison de son caractère "magique". Lorsque la situation est un petit peu délicate et que la "règle" de L'Hospital, pour livrer la vraie valeur, doit être réutilisée plusieurs fois en cascade, les polynômes de Taylor se posent en concurrents sérieux, à condition de pouvoir les obtenir rapidement. Pour cela, deux choses sont nécessaires :

– La connaissance des polynômes de Maclaurin des fonctions "courantes" ;
– Le moyen de les combiner entre eux pour éviter le recours à la définition lorsqu'on doit calculer le polynôme de Taylor d'une fonction comme, par exemple, $x \mapsto 2 \exp x + x^4 \sin 2x$.

Ce sont ces règles de "combinaison" que nous allons progressivement découvrir dans cette note, en les appelant familièrement "raccourcis". Certains d'entre eux sont bien connus. D'autres par contre, bien que tout aussi utiles, sont rarement cités dans les livres d'analyse, à moins qu'ils n'y soient utilisés dans des exemples sans avoir été énoncés de manière précise ni encore moins démontrés.

Nous vous proposons de partir à la recherche de quelques raccourcis pour les polynômes de Maclaurin, dans un premier temps. Nous pourrons ensuite apprécier l'efficacité de cet outil dans le calcul de certaines limites, par le biais d'une série d'exemples. Dans un dernier paragraphe, nous vous inviterons à réfléchir à la manière de généraliser ces raccourcis au cas des polynômes de Taylor (autour d'un point quelconque et plus autour de 0).

## 2. Définition

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. Nous adopterons ici la définition suivante : une fonction $f$ est dérivable en un point a si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a et si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (et est finie). La première condition est quelque peu restrictive (pour que la limite puisse être envisagée, il suffit que a soit adhérent à dom $f \setminus \{a\}$) ; nous avons choisi de l'introduire dans le but d'alléger les hypothèses dans les propositions qui suivront.

Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et a un point de son domaine. Si $f$ est $n$ fois dérivable en a, le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$$

est appelé *polynôme de Taylor d'ordre n de f en a* ; il sera noté $T_{n,a}f(x)$. Lorsque $a = 0$, nous dirons *polynôme de Maclaurin de f* et noterons simplement $T_n f(x)$.

La proposition suivante indique une autre caractérisation de ces polynômes, qui se justifie très aisément. Le plus souvent, c'est sur elle que se baseront les démonstrations de leurs propriétés.

**Proposition 1.** *Le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a est l'unique polynôme P de degré inférieur à n tel que*

$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

*pour* $k = 0, 1, \ldots, n$.

Comme annoncé, nous allons, dans une première approche, nous intéresser au cas où $a = 0$. En effet, ce qui est bien connu, ce sont les polynômes de Maclaurin des fonctions élémentaires ; ce sont donc les raccourcis autour de 0 qui ont une réelle efficacité. De toute manière, un calcul de limite peut toujours se ramener à une limite en 0 par un changement de variable.

### 3. Calculs de limites

La connaissance des polynômes de Maclaurin des fonctions élémentaires est une aide précieuse dans le calcul de certaines limites, comme nous allons le voir sur quelques exemples. Rappelons d'abord le

**Théorème 2.** *Soit f et g deux fonctions de* **R** *dans* **R** *et n un naturel. Si f et g sont n fois dérivables en* 0 *et si $T_n g$ n'est pas le polynôme nul, alors* $\lim_0(f / g)$ *existe si et seulement si* $\lim_0(T_n f / T_n g)$ *existe et dans ce cas, ces deux limites ont la même valeur.*

JUSTIFICATION : Ce qui est en jeu, ici, presque par définition, c'est en réalité une propriété des développements limités. Il se trouve que les polynômes de Taylor *sont* des développements limités (voir [4] ou [3]) ; pour aller au fond des choses, cette dernière notion est "meilleure" : les développements limités existent sous des hypothèses plus faibles que les polynômes de Taylor ; cependant, en dehors des cas où les deux coïncident, aucune méthode systématique de calcul des développements limités n'est disponible.

EXEMPLE 1 : Soit à calculer $\lim_0 f / g$ où $f(x) = e^x - \cos x + \sin x$ et $g(x) = 5x^2 + 3x$. Comme $g(0) = 0$ et $g'(0) = 3$, nous avons $T_0 g = 0$ et $T_1 g(x) = 3x$. Pour utiliser le théorème 2, il suffit donc de considérer des polynômes de Maclaurin d'ordre 1. Comme $f'(x) = ex + \sin x + \cos x$, il vient que $T_1 f(x) = 2x$. Dès lors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{5x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Examinons cet exemple de plus près. Nous voyons que $T_1 g(x)$ est le terme du premier degré du polynôme $g$. Nous pouvons nous demander s'il en est toujours ainsi. Comment obtenir rapidement un polynôme de Maclaurin d'un polynôme ? D'autre part, la fonction $f$ est une somme de trois fonctions et le calcul de $T_1 f$ a nécessité celui de $f'$ qui est la somme des dérivées de ces trois fonctions. Pouvons-nous en déduire un moyen de calculer $T_1 f$ à partir des polynômes de Maclaurin d'ordre 1 de exp, de cos et de sin ?

Dans le paragraphe suivant, nous allons jeter un premier coup d'œil sur un autre genre de problème où les polynômes de Maclaurin se révèlent être un outil intéressant.

### 4. Pourquoi pas la calculette ?

EXEMPLE 2. Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Posons-nous le problème d'évaluer $f$ en $10^{-5}$. La calculette travaillant avec neuf décimales fournira 0 comme valeur pour $f(10^{-5})$. Ceci est choquant puisqu'il est manifeste que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. L'utilisation des polynômes de Maclaurin conduit à une meilleure estimation : nous avons

$$T_1 f(x) = T_2 f(x) = T_3 f(x) = \frac{x}{2}$$

et

$$T_4 f(x) = T_5 f(x) = T_6 f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^4}{8}$$

(ceci sera justifié ultérieurement). Nous obtenons ainsi respectivement les estimations suivantes :

$$f(10^{-5}) \approx \left.\frac{x}{2}\right|_{x=10^{-5}} = 0{,}000\,005$$

et

$$f(10^{-5}) \approx \left.\frac{x}{2} - \frac{x^4}{8}\right|_{x=10^{-5}} = 0{,}000\,004\underbrace{9...9}_{14 \text{ chiffres } 9}875$$

Bien sûr, le calcul des polynômes de Maclaurin de $f$ via la définition est plutôt lourd : les dérivées ne sont pas toutes simples. Dans le paragraphe suivant, nous allons découvrir plusieurs raccourcis qui nous permettront d'éviter le calcul des dérivées de $f$ (voir le paragraphe 6).

Naturellement, ces estimations devraient se compléter d'un calcul d'erreur : une approximation numérique n'a de sens qu'accompagnée (au moins de l'ordre de grandeur) de l'erreur commise.

Malheureusement, ceci est loin d'être aussi simple que le calcul de la valeur approchée car si, comme nous le verrons, les polynômes de Maclaurin se combinent sans trop de difficultés au moyen de raccourcis, il n'en va pas de même des restes, notés $R_n$ (à part l'heureuse exception $R_n(cf + dg)(x) = cR_nf(x) + dR_ng(x)$), et il faut bien, pour estimer l'erreur commise, passer par l'expression de Lagrange du reste – ou l'une de ses cousines.

Ici, la proximité de $T_3f(10^{-5})$ et $T_6f(10^{-5})$ donne à penser que l'une et l'autre valeurs sont d'excellentes approximations de $f(10^{-5})$.

## 5. Raccourcis de calcul

Essayons à présent de trouver comment les polynômes de Maclaurin se combinent entre eux. Voici tout d'abord les réponses aux questions posées après l'exemple 1. Les démonstrations de ces résultats sont simples ; nous vous suggérons de les faire comme exercices.

**Proposition 3.** *Si* $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, *alors*

$$T_nQ(x) = \sum_{k=0}^{\min(d,n)} a_k x^k \qquad \texttt{[Pol]}$$

**Proposition 4.** *Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en 0, alors $f \pm g$ est $n$ fois dérivable en 0 et*

$$T_n(f \pm g) = T_nf \pm T_ng. \qquad \texttt{[Som]}$$

REMARQUE : Nous avons assigné des sigles aux deux raccourcis précédents. Il en sera de même pour les autres. Nous y ferons ainsi aisément référence dans la suite.

Nous voyons donc, d'après `[Som]`, que le polynôme de Maclaurin d'ordre $n$ de la somme de deux fonctions est simplement la somme des polynômes de Maclaurin d'ordre $n$ de ces deux fonctions. Nous pouvons nous poser la question : en va-t-il de même pour le produit de deux fonctions ? La réponse est clairement négative : le produit des polynômes de Maclaurin d'ordre $n$ de deux fonctions est, en général, un polynôme de degré $2n$ et ne peut donc pas être le polynôme de Maclaurin d'ordre $n$ du produit de ces deux fonctions. Comment faire alors ? Essayons par exemple le cas particulier suivant : est-ce que $T_5\sin^2 = T_2\sin \,.\, T_3\sin$ ? Cette fois, le degré est bon ; mais pourquoi $T_2\sin \,.\, T_3\sin$ plutôt que $T_1\sin \,.\, T_4\sin$ ou $T_0\sin \,.\, T_5\sin$ ? Ce n'est pas la même chose. Nous pourrions nous laisser tenter par d'autres conjectures... En fait, nous avons la

**Proposition 5.** *Si f et g sont n fois dérivables en 0, alors fg est n fois dérivable en 0 et*

$$T_n(fg) = T_n(T_nf \,.\, T_ng). \qquad \texttt{[Pro1]}$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, le polynôme $T_n(T_nf \,.\, T_ng)$ est bien de degré inférieur à $n$. Ensuite, par la règle de Leibniz de dérivation d'un produit et par la proposition 1 appliquée à $T_nf \,.\, T_ng$, puis à $f$ et à $g$,

$$\begin{aligned}(T_n(T_nf \,.\, T_ng))^{(k)}(0) &= (T_nf \,.\, T_ng)^{(k)}(0)\\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j\,(T_nf)^{(j)}(0)(T_ng)^{(k-j)}(0)\\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, f^{(j)}(0)g^{(k-j)}(0)\\ &= (fg)^{(k)}(0)\end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$ ; la thèse découle alors de la proposition 1.

Que se passe-t-il si nous voulons calculer le polynôme de Maclaurin d'une puissance d'une fonction ? Cela découle évidemment du raccourci [Pro1] :

**Proposition 6.** *Si f est n fois dérivable en 0, alors, pour tout naturel m, $f^m$ est n fois dérivable en 0 et*

$$T_n(f^m) = T_n((T_nf)^m). \qquad \texttt{[Pui1]}$$

EXEMPLE 3 : D'après [Pui1],

$$\begin{aligned}T_5(\sin^3) &= T_5((T_5\sin)^3)\\ &= T5\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3\right)\\ &= \dots\end{aligned}$$

Une nouvelle idée surgit : est-il vraiment indispensable de calculer $(T_5\sin)^3$ ? Ne pourrions-nous pas nous contenter d'un $(T_p\sin)^3$ avec $p < 5$ puisque, selon [Pol], l'étape suivante consistera à ne conserver que les termes de degré inférieur à 5 dans le polynôme obtenu ? De manière générale, est-il possible de trouver un raccourci plus efficace que [Pui1] lorsque $f$ présente certaines particularités ? Dans le même ordre d'idées, pourrions-nous "améliorer" [Pro1] ?

Voici deux cas où nous pouvons abréger le calcul du polynôme de Maclaurin. Nous pourrions en envisager d'autres.

**Proposition 7.** *Si f et g sont n fois dérivables en 0, et si $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = g(0) = g'(0) = \dots = g^{(l-1)}(0) = 0$, alors fg est n fois dérivable en 0 et*

$$T_n(fg) = T_n(T_{n-l}f \dots\ T_{n-k}g). \qquad \texttt{[Pro2]}$$

La preuve suit le même schéma que celle de [Pro1].

**Proposition 8.** *Si $n \geq m \geq 1$, si f est n fois dérivable en 0 et si $f(0) = 0$, alors*

$$Tn(f^m) = T_n((T_{n-m+1}f)^m). \qquad \texttt{[Pui2]}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration procède par récurrence sur $m$ en utilisant les raccourcis [Pro2] et [Pol], ainsi que l'observation que, si $f(0) = 0$, alors $f^{m-1}(0) = (f^{m-1})'(0) = \dots = (f^{m-1})^{(m-2)}(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}T_n(f^m) &= T_n(f \,.\, f^{m-1})\\ &= T_n(T_{n-m+1}f \,.\, T_{n-1}(f^{m-1}))\\ &= T_n(T_{n-m+1}f \,.\, T_{n-1}((T_{n-m+1}f)^{m-1}))\\ &= T_n(T_{n-m+1}(T_{n-m+1}f) \times T_{n-1}((T_{n-m+1}f)^{m-1}))\\ &= T_n(T_{n-m+1}f \,.\, (T_{n-m+1}f)^{m-1})\\ &= T_n((T_{n-m+1}f)^m).\end{aligned}$$

Qu'en est-il de la composée de deux fonctions ? Toutes les conjectures sont les bienvenues... En réalité, les choses se passent comme nous pouvions l'espérer, moyennant une hypothèse sur la fonction "intérieure" :

**Proposition 9.** *Si $g(0) = 0$ et si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en 0, alors $f \circ g$ est $n$ fois dérivable en 0 et*

$$T_n(f \circ g) = T_n(T_n f \circ T_n g). \qquad \texttt{[Comp]}$$

La démonstration est basée sur le même principe que celle de `[Prol]` : les règles de dérivation sont les mêmes pour les polynômes que pour toutes les fonctions. Mais existe-t-il une règle de dérivation pour une composée ? La réponse est oui. Il s'agit de la règle de Faà de Bruno. Cette dernière étant peu connue, nous la rappelons dans le lemme suivant (pour davantage de détails, voir [2]) :

**Lemme 10.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions $n$ fois dérivables, alors $f \circ g$ est $n$ fois dérivable et*

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\Sigma\, ia_i = n} K\langle a_i\rangle \left(f^{(\Sigma a_i)} \circ g\right) \prod_{i>0} \left[g^{(i)}\right]^{a_i}$$

*où la somme principale porte sur toutes les suites $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}^*}$ de naturels telles que $\sum_{i>0} ia_i = n$, et où*

$$K\langle a_i\rangle = \frac{\left(\sum_{i>0} a_i\right)!}{\prod_{i>0} (a_i!\, i!^{a_i})}.$$

On remarquera que, dans (1), le dernier $a_i$ est un exposant et non un ordre de dérivation. D'autre part, si $\sum ia_i = n$, alors $a_i = 0$ pour $i > n$ ; donc, dans cette formule, toutes les sommes et le produit sont finis, bien qu'ils soient écrits comme s'il s'agissait de séries et d'un produit infini.

EXEMPLE 4 : Pour $n = 4 = \sum_{i>0} ia_i$, les suites possibles sont reprises dans le tableau suivant :

| $\langle a_i \rangle i \in \mathbb{N}^*$ | $\Sigma a_i$ | $K\langle a_i \rangle$ |
|---|---|---|
| $\langle 4,0,0,0,0,\ldots \rangle$ | 4 | 1 |
| $\langle 2,1,0,0,0,\ldots \rangle$ | 3 | 6 |
| $\langle 0,2,0,0,0,\ldots \rangle$ | 2 | 3 |
| $\langle 1,0,1,0,0,\ldots \rangle$ | 2 | 4 |
| $\langle 0,0,0,1,0,\ldots \rangle$ | 1 | 1 |

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{\mathrm{IV}} &= (f^{\mathrm{IV}} \circ g)g'^4 + 6(f''' \circ g)g'^2 \\ &\quad + (f'' \circ g)[3g''^2 + 4g'g'''] + (f' \circ g)g^{\mathrm{IV}}.\end{aligned}$$

Le quotient de deux fonctions se laisse-t-il faire aussi facilement ? Oui ! Enfin, presque...

**Proposition 11.** *Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables en 0 et si $g(0) \neq 0$, alors $f / g$ est $n$ fois dérivable en 0* et

$$T_n\left(\frac{f}{g}\right) = T_n\left(\frac{T_n f}{T_n g}\right). \qquad \texttt{[Quo]}$$

Ceci découle des raccourcis `[Pol]`, `[Prol]` et `[Comp]` (composer la fonction $x \mapsto 1/x$ avec $g$).

Mais comment calculer le membre de droite ? Avons-nous vraiment gagné quelque chose ? Ici, c'est l'algèbre qui vient à notre secours : comme nous allons le voir dans le lemme suivant, pour calculer $T_n(T_nf / T_ng)$, il suffit de diviser $T_nf$ par $T_ng$ suivant les puissances croissantes, à l'ordre $n$. Rappelons d'abord ce que signifie "diviser suivant les puissances croissantes". (Voir aussi [5].)

DÉFINITION : Soit n $\in \mathbf{N}$ et $N$, $D \in \mathbf{R}[x]$ ; si $D(0) \neq 0$, il existe un et un seul polynôme $Q$ de degré inférieur à $n$ et un unique polynôme $R$, tels que

$$N(x) = D(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

Les polynômes $Q$ et $R$ s'appellent respectivement *quotient* et *reste* à l'ordre $n$ de la division de $N$ par $D$ suivant les puissances croissantes.

**Lemme 12.** *Soit N et D deux polynômes, le terme constant de D étant non nul. Le polynôme de Maclaurin de N / D est le quotient à l'ordre n de la division de N par D suivant les puissances croissantes.*

DÉMONSTRATION. Soit $Q$ le quotient à l'ordre $n$ de la division de $N$ par $D$ suivant les puissances croissantes. Grâce à la proposition 1, il suffit de montrer que

$$Q^{(k)}(0) = \left(\frac{N}{D}\right)^{(k)}(0) \qquad (2)$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$. Par définition de $Q$, il existe un polynôme $R$ tel que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + x^{n+1}\frac{R(x)}{D(x)}$$

Donc, en utilisant la formule de Leibniz,

$$\left(\frac{N}{D}\right)^{(k)}(x) =$$

$$= Q^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, \frac{(n+1)!x^{n+1-i}}{(n+1-i)!}\left(\frac{R}{D}\right)^{(k-i)}(x)$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$. L'égalité (2) en découle directement.

EXEMPLE 5 : Calculons le polynôme de Maclaurin d'ordre 5 de tg. D'après [Quo], il suffit de calculer le quotient à l'ordre 5 de $T_5\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120$ par $T_5\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$, selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
-\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & \hline x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\
\hline
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \dots\right) & \\
\hline
\frac{2x^5}{15} + \dots & \\
-\left(\frac{2x^5}{15} - \dots\right) & \\
\hline
\dots &
\end{array}$$

Ainsi, $T_5\text{tg}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$. Remarquons que dans l'utilisation de l'algorithme de division, il est permis d'ignorer les termes dont le degré dépasse (strictement) 5.

D'autres raccourcis sont imaginables :

connaissant le polynôme de Maclaurin d'une fonction $f$, comment calculer celui de

- La dérivée de $f$ ?
- L'intégrale indéfinie de $f$ ?
- La fonction $cf$ ($c \in \mathbf{R}$) ?
- La fonction $f \circ c\mathrm{I}$ (où $\mathrm{I}$ est la fonction identité) ?

EXEMPLE 6 : Soit $f(x) = \cos x^2$ et $g(x) = \sin x^2$. Cherchons $T_4f$ et $T_4g$. Après calcul des dérivées de $f$ et de $g$ jusqu'à l'ordre 4, nous obtenons $T_4f(x) = 1 - x^4 / 2$ et $T_4g(x) = x^2$. Si nous nous souvenons que $T_2\cos(x) = 1 - x^2 / 2$ et $T_2\sin(x) = x$, que constatons-nous ? De manière plus générale, comment obtenir un polynôme de Maclaurin de $f \circ \mathrm{I}^m$ à partir d'un polynôme de Maclaurin de $f$ ? Et qu'en est-il de $f \,.\, \mathrm{I}^m$ ?

Nous pouvons aussi trouver un raccourci pour $f \,.\, \mathrm{I}^m$. Mais auparavant il faut prolonger continument cette fonction en 0 ; d'après le théorème 2, il est clair que la valeur sur laquelle il faut appliquer 0 est $f^{(m)}(0) / m!$ ; nous avons alors la

**Proposition 13.**
*Si*

- $m > 0$ ;
- *$f$ est $m$ fois dérivable en* 0 ;
- $f^{(j)}(0) = 0$ $(0 \leq j \leq m - 1)$ ;
- $g(x) = \begin{cases} f(x) / x^m & \text{si } x \neq 0 \,; \\ f(m)(0) / m! & \text{si } x = 0 \,; \end{cases}$
- g est $(m + n)$ *fois dérivable en* 0,

*alors $f$ est $(m + n)$ fois dérivable en* 0 *et*

$$\mathrm{T}_n g = \frac{T_{n+m} f}{\mathrm{I}^m}. \qquad \texttt{[Qx^m]}$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'appliquer `[Prol]` puisque, pour tout $x$, $f(x) = x^m \,.\, g(x)$.

Le moment est venu de rassembler les résultats obtenus ainsi que la réponse à certaines des questions posées dans ce paragraphe (voir le tableau 1).

## 6. Exemples

EXEMPLE 2 (DÉTAILS) : Nous sommes à présent à même de justifier facilement les résultats obtenus plus haut : remarquons tout d'abord que nous sommes dans un cas correspondant au raccourci `[Qx^m]` et que par conséquent, pour $x \neq 0$,

$$T_nf(x) = \frac{T_{n+2}\left(\sqrt{1 + (\_)^3} - 1\right)(x)}{x^2}$$

En utilisant les raccourcis `[Som]`, `[Pol]` et `[Cx^m]`, il vient

$$T_nf(x) = \frac{(T_{\lfloor n+2/3 \rfloor}\sqrt{1 + \_})(x^3) - 1}{x^2}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} T_1f(x) &= T_2f(x) = T_3f(x) \\ &= \frac{(T_1\sqrt{1 + \_})(x^3) - 1}{x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_4f(x) &= T_5f(x) = T_6f(x) \\ &= \frac{(T_2\sqrt{1 + \_})(x^3) - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Comme $(T_2\sqrt{1+\_})(x) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{1}{8}\mathrm{x}^2$, nous avons les polynômes de Maclaurin indiqués dans le paragraphe 4.

EXEMPLE 7 : Soit à calculer $\lim_0 f / g$ où $f(x) = \mathrm{tg}\, x - x$ et $g(x) = x - \sin x$.

Nous utiliserons plusieurs fois le

**Tableau 1**

*Résumé des raccourcis de calcul des polynômes de Maclaurin (les hypothèses de régularité sur les fonctions concernées ne sont pas rappelées)*

| | |
|---|---|
| [Pol] | Si $Q(x) = \Sigma_{k=0}^{d} a_k x^k$, alors $T_n Q(x) = \Sigma_{k=0}^{\min(d,n)} a_k x^k$ |
| [Som] | $T_n(f \pm g) = T_n f \pm T_n g$ |
| [Pro1] | $T_n(fg) = T_n(T_n f \,.\, T_n g)$ |
| [Pui1] | Si $m \in \mathbf{N}$, $T_n(f^m) = T_n((T_n f)^m)$ |
| [Pro2] | Si $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = g(0) = \ldots = g^{(l-1)}(0) = 0$, alors $T_n(fg) = \mathrm{Tn}(T_{n-l}f \,.\, Tn\text{-}kg)$ |
| [Pui2] | Si $n \geq m \geq 1$ et si $f(0) = 0$, alors $T_n(f^m) = T_n((T_{n-m+1}f)^m)$ |
| [Comp] | Si $g(0) = 0$, alors $T_n(f \circ g) = T_n(T_n f \circ T_n g)$ |
| [Quo] | Si $g(0) \neq 0$, alors $T_n\left(\frac{f}{g}\right) = T_n\left(\frac{T_n f}{T_n g}\right)$ |
| [Der] | $T_n(f') = (T_n + 1f)'$ |
| [Int] | $T_n\left(\int_0^{-} f\right) = \int_0^{-} T_n - 1f$ |
| [MFct] | $T_n(cf) = c \,.\, T_n f$ |
| [MVar] | $T_n(f \circ c\mathrm{I}) = T_n f \circ c\mathrm{I}$ |
| [Cx^m] | Si $n \geq m \geq 1$, alors $T_n(f \circ \mathrm{I}^m) = (T_{\lfloor n/m \rfloor} f) \circ \mathrm{I}^m$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de $x$ |
| [Px^m] | Si $n \geq m$, alors $T_n(\mathrm{I}^m f) = \mathrm{I}^m \mathrm{T}_{n-m} f$ |
| [Qx^m] | $\mathrm{T\_n}\left(\frac{f}{\mathrm{I}^m}\right) = \frac{T_{n+m} f}{\mathrm{I}^m}$ |

raccourci [Som]. Tout d'abord, $T_1 \sin(x) = T_2 \sin(x) = x$, donc $T_1 g = T_2 g = 0$ : il est nécessaire d'utiliser des polynômes de Maclaurin d'ordre 3 au moins ; cet ordre 3 convient bien, car

$$\begin{aligned} T_3 g(x) &= x - T_3 \sin(x) \\ &= x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^3}{3!}\,; \end{aligned}$$

d'autre part (*cf.* ex. 5),

$$\begin{aligned} T_3 f(x &= T3\operatorname{tg}(x) - x \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - x = \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3/3!} = 2.$$

EXEMPLE 8 : Soit à calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^4$, où $f(x) = 1 - \cos x - \operatorname{tg} x + \ln(1+x)$.

Introduisons $g(x) = x^4$ ; selon le raccourci [Pol], $T_n g = 0$ lorsque $n < 4$ et $T_4 g(x) = x^4$ ; nous travaillerons donc avec des polynômes de Maclaurin d'ordre 4.

Grâce au raccourci [Som],

$$T_4 f = 1 - T_4\cos - T_4\operatorname{tg} + T_4(\ln(1 + \_\,))\,;$$

dès lors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \operatorname{tg} x + \ln(1+x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\begin{array}{c} 1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) \\ - (x + \frac{1}{3}x^3) \\ + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \end{array}}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right)x^4}{x^4} = \frac{7}{24}.$$

EXEMPLE 9 : Soit à calculer $\lim_0 f/g$ où $f(x) = 2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3$ et $g(x) = x^4 \sin x$. Selon le raccourci [Px^m], $T_4 g = 0$ et $T_5 g(x) = x^5$ ; nous utiliserons donc des polynômes de Maclaurin d'ordre 5. Grâce aux raccourcis [Pol], [Som] et [MFct],

$$T_5 f(x) = 2(T_5 \operatorname{tg} - T_5 \sin)(x) - x^3\,;$$

dès lors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^4 \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\begin{array}{c} 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5) \\ - 2(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5) \\ - x^3 \end{array}}{x^5} = \frac{1}{4}$$

EXEMPLE 10 : Soit à calculer

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right).$$

Cette limite est égale à

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}.$$

Un changement de variable la transforme en

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y+1)\ln(1+y) - y}{y\ln(1+y)}.$$

Notons $g(y) = y\ln(1+y)$ ; selon le raccourci [Px^m], $T_1 g = 0$ et $T_2 g(y) = y^2$ ; nous travaillerons donc avec des polynômes de Maclaurin d'ordre 2. Introduisons $f(y) = y\ln(1+y) + \ln(1+y) - y$. Grâce aux raccourcis [Pol] et [Som],

$$T_2f(y) = T_2g(y) + T_2(\ln(1+\_))(y) - y.$$

La limite proposée est donc égale à

$$\lim_{y\to 0}\frac{y^2 + (y - \frac{1}{2}y^2) - y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 11 : Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+1}\,e^{-1/(2x^2)} - x^2\cos(1/x)\right).$$

En posant $y = 1/x$ et en utilisant les raccourcis [Pol], [Prol], [Som], [Cx^m] et [Mvar], la limite devient successivement (avec quelques petits abus d'écriture) :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{1+y^4}\,e^{-y^2/2} - \cos y}{y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{T_2\left(T_2\sqrt{1+y^4}\cdot T_2\,e^{-y^2/2}\right) - T_2\cos y}{y^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{T_2\left((T_0\sqrt{1+\_})(y^4)\times(T_1\,e^{-(\_)/2})(y^2)\right) - T_2\cos(y)}{y^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{T_2\left(1\cdot(1-\frac{1}{2}y^2)\right) - \left(1-\frac{1}{2}y^2\right)}{y^2}$$

$$= 0,$$

l'ordre des polynômes à utiliser ayant été préalablement déterminé par l'examen du dénominateur.

Exemple 12 : Soit à calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x - \operatorname{tg} x}$$

Il suffit de travailler à l'ordre 3 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\operatorname{tg} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2)}{x-(x+\frac{1}{3}x^3)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x};$$

comme cette dernière limite n'existe pas, la limite proposée n'existe pas non plus. (Mais les limites à gauche et à droite valent respectivement $+\infty$ et $-\infty$.)

Il est bon, ici, de faire observer que le théorème 2 donne un moyen de prouver qu'une limite n'existe pas, au contraire des différentes versions du théorème de L'Hospital, qui ne fournissent jamais que des conditions suffisantes d'existence d'une limite.

## 7. De Maclaurin à Taylor

Comme nous l'avons dit, en pratique, ce sont les polynômes de Taylor autour de 0 qui sont les plus efficaces. Cependant, nous pouvons nous demander ce que deviennent tous les raccourcis du tableau 1 si nous travaillons avec des polynômes de Taylor en un point a quelconque. Grâce à la proposition 1, nous obtenons la

**Proposition 14.** *Si g est n fois dérivable en 0 et si $f(x) = g(x-a)$, alors f est n fois dérivable en a et*

$$T_{n,a}f(x) = (T_ng)(x-a).$$

Cette proposition devrait nous aider à généraliser le tableau 1. Remarquons que si le passage de 0 à un a non nul se fait sans difficultés pour le raccourci [Som] par exemple (on a simplement $T_{n,a}(f \pm g) = T_{n,a}f \pm T_{n,a}g$), dans d'autres cas, ce n'est pas aussi simple : un peu de prudence s'impose. Par exemple, pensez-vous que si $Q(x) = \Sigma_{k=0}^{d} a_k x^k$, alors $T_{n,a}Q(x) = \Sigma_{k=0}^{\min(d,n)} a_k x^k$ ? Dans le même esprit, la forme générale de [Comp] est donnée par la

**Proposition 15.** Si $g$ est $n$ fois dérivable en a et si $f$ est $n$ fois dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est $n$ fois dérivable en a et

$$T_{n,a}(f \circ g) = T_{n,a}(T_{n,g(a)}f \circ T_{n,a}g).$$

EXEMPLE 13 : Soit à calculer $\lim_0 f / g$ où $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos 2x}$ et $g(x) = \sin^2 x$. Tout d'abord, l'ordre 1 ne convient pas car $T_1(\sin^2) = 0$. Nous pouvons par contre utiliser l'ordre 2 puisque d'après le raccourci [Pui2],

$$T_2(\sin^2)(x) = T_2((T_1 \sin)^2)(x) = x^2.$$

D'autre part, comme $(T_2\sqrt{1+\_})(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, nous obtenons par la proposition 14

$$T_{2,1}\sqrt{\_}(x) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}.$$

Dès lors, via la proposition précédente et le raccourci [Mvar] (et avec un petit abus d'écriture) :

$$T_2\sqrt{\cos(2\_)}(x) =$$

$$= T_2(T_{2,1}\sqrt{\_} \circ T_2(\cos(2\_)))(x)$$

$$= T_2\left((T_{2,1}\sqrt{\_})\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right)\right)$$

$$= T_2\left(1 + \frac{1-2x^2-1}{2} - \frac{(1-2x^2-1)^2}{8}\right)$$

$$= 1 - x^2.$$

Par conséquent, $T_2f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - (1-x^2) = \frac{1}{2}x^2$ et la limite donnée est égale à

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

## RÉFÉRENCES

[1] Jacques DOUCHET, Bruno ZWAHLEN, *Calcul différentiel et intégral, 1 – Fonctions d'une variable réelle*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983.

[2] Pascal DUPONT, "Dérivées d'ordre supérieur d'une composée de fonctions", *Mathématique et Pédagogie* 83 (1991), 27-34.

[3] Pascal DUPONT, Nicole VAST, "Développements limités", *Mathématique et Pédagogie* (à paraître).

[4] Jean MAWHIN, *Analyse – Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992

[5] J. QUINET, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Tome 1, Algèbre*, 5e éd., Dunod, Paris, 1973.