LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Dans ce numéro, nous accueillons Jean-Claude Duperret qui nous propose sa réflexion personnelle sur l'enseignement des mathématiques au collège.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages.

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

REPERES - IREM. N° 33 - octobre 1998

Point de vue

POURQUOI LES MATHÉMATIQUES ? QUELLES MATHÉMATIQUES ?

Point de vue d'un enseignant de collège

Jean-Claude DUPERRET

Si dans un groupe d'adultes, on découvre que vous êtes enseignant de mathématiques, deux attitudes complètement opposées scinderont l'assemblée. Ceux qui vous renverront une image définitivement négative des mathématiques : "Je n'aimais pas ça" en ajoutant "j'étais nul" comme si vous alliez encore les interroger. Ceux qui au contraire vous diront : "J'aimais ça" en précisant "j'avais de bonnes notes" comme une espèce de connivence avec vous. Aucune autre matière ne renvoie une image aussi affective : un profond ressentiment associé à l'échec, une grande affection associée à la réussite. Et la question "Pourquoi les mathématiques ?" renvoie systématiquement à ce temps heureux ou malheureux de l'enseignement, et très rarement à un essai d'analyse de ce qu'elles ont pu apporter dans la vie personnelle ou professionnelle.

Pourquoi les mathématiques ?

Pour beaucoup d'entre nous, enseignants de mathématiques, cette question posée à brûle-pourpoint surprend, voire déstabilise. Et pourtant, nous leur avons donné une place importante dans notre vie personnelle et professionnelle. En quoi nous paraissent-elles donc si fondamentales ? Je vois pour ma part trois niveaux de réponse :

– pour les outils qu'elles forgent, pour les propriétés qu'elles établissent, pour les beaux résultats qu'elles construisent.
– pour ce qu'elles développent comme aptitudes lors de la résolution de problèmes : un comportement d'expert, avec la recherche de la meilleure stratégie, du modèle le plus pertinent.

– pour l'expérience intellectuelle qui d'abord transcende notre pensée, dans une vision idéalisée du monde qui nous le rend plus intelligible, puis la libère dans une vision impossible ("Je le vois mais je ne peux le croire" Cantor).

Pour beaucoup de nos élèves la question devient vite : à quoi ça sert ? Nous ne pouvons échapper à ce souci d'utilité, et les premières mathématiques que nous leur proposons prennent fortement appui sur leur quotidien, ou, de manière plus précise, sur leur perception "naturelle" du monde qui les entoure : l'ancrage dans la réalité est la condition nécessaire pour motiver leur apprentissage. Mais notre souci va être de les amener à changer ce regard sur le monde, en développant des modèles théoriques non contingents à la réalité. Un enjeu fondamental de notre enseignement va être la modélisation, c'est-à-dire le passage de la "réalité" au "modèle", et du "modèle" à la "réalité". Et la gageure va être de mener de front l'apprentissage des modèles et de la modélisation.

Pourquoi les mathématiques ? Parce qu'elles contribuent par ce subtil jeu d'aller-retour entre la "connaissance naturelle" et la "connaissance évoluée" à l'un des objectifs fondamentaux de tout enseignement : apprendre à penser. En ce sens elles sont au cœur du système éducatif comme un élément fort de la construction de l'individu.

Quelles mathématiques ?

Si elles ne sont que techniques, recettes, algorithmes souvent déconnectés de la réalité, leur apprentissage apparaîtra vite comme rébarbatif et stérile, leur enseignement deviendra alors une suite de recettes, donnant des connaissances à court terme. A plus longue échéance cela conduira à cette dichotomie dans la population dont je parlais au début : ceux qui auront bien voulu entrer dans notre jeu et en feront un élément de développement personnel et de réussite ; ceux qui y seront restés hermétiques et en garderont toujours un profond sentiment d'échec. Sans nier la nécessité d'un tel apprentissage, il faut donc pour justifier la place des mathématiques leur donner une double dimension : culturelle et formatrice de l'individu. Culturelle, en les plaçant dans une perspective historique qui situe leur mission première : résoudre des problèmes, c'est-à-dire se mettre dans une constante confrontation au non savoir. Formatrice de l'individu, en développant ce comportement d'expert dont je parlais plus haut.

Pour que nos élèves sentent que ce que nous leur enseignons est vivant, et participe à leur construction, il faut les rendre acteurs, c'est-à-dire les placer en activité mathématique. Celle ci commence en général par une recherche personnelle, défi entre le problème et nous, démarche intellectuelle intime qui développe et construit notre pensée. Celle ci continue dans une communauté scientifique, la classe dans notre enseignement, communauté qui permet successivement le débat en soumettant aux preuves et réfutations les diverses possibilités de solutions, puis l'assurance de la certitude partagée.

Quelles mathématiques ? Toutes celles qui ont permis à la science de se construire son histoire, toutes celles qui permettront à nos élèves de se construire ce regard scientifique.

Quels contenus ?

En termes de contenus les programmes

de collège, lieu de la scolarité obligatoire, me semblent bien pensés, en proposant trois grands types de travaux, interactifs et complémentaires.

Les travaux géométriques

Leur contenu est fortement marqué par l'héritage des Grecs, qui ont toujours eu pour souci de modéliser le monde réel. En ce sens, on peut dire que les axiomes d'Euclide apparaissent comme des règles de bon sens traduisant, de façon locale, la perception que l'on peut avoir du monde. Et on retrouve dans notre enseignement cette démarche : passage d'une "figure physique" à une "figure idéale" ; passage d'une validation par la mesure à une validation par la démonstration ; rencontre avec des figures de plus en plus complexes dans lesquelles il faudra apprendre à retrouver des figures plus simples, porteuses de propriétés, démarche heuristique qui préparera l'argumentation. Tout cela participe à une conceptualisation du réel sur laquelle se fonderont des règles de traitement scientifiques.

Illustrons cela avec une étude de cas : la propriété de Thalès, de notre Thalès, celui des lignes proportionnelles.

– Est ce une configuration ? Oui, dans la mesure où c'est une figure prototypique déclenchant un réflexe de reconnaissance (cela marche très bien chez nos élèves).

– Est ce un théorème ? Oui, pourvu qu'on puisse s'appuyer sur des résultats déjà établis, et avec une méthode de validation reconnue. A cet égard, on peut parfaitement dans nos programmes le faire en utilisant la méthode des aires d'Euclide.

– Est ce un modèle ? Oui, ou plutôt des modèles, des modèles géométriques (affine, vectoriel, transformations...) ; le modèle proportionnalité-linéarité, c'est-à-dire la formalisation du lien entre parallélisme et égalité de rapports ; le modèle numérique, c'est-à-dire le passage du rationnel au réel, du commensurable à l'incommensurable (notion qui n'est plus dans nos programmes actuels).

– Est-ce un concept ? Oui, un concept fédérateur de tous ces modèles, avec ses champs de problème, ses invariants de situation. On pourrait même dire que c'est un des concepts les plus forts mathématisant la réalité. La perception du monde, et la géométrie élémentaire sont fortement liés à la notion de figures semblables : que la notion vague de "même forme" conduise à des relations de proportionnalité est un des points fondamentaux de l'enseignement de la géométrie au collège ; qu'à son sujet on amène les élèves à comprendre comment on fabrique des instruments intellectuels permettant d'une part de préciser la notion, d'autre part de l'utiliser pour résoudre un certain nombre de problèmes est l'illustration de l'enseignement scientifique.

Les travaux numériques

Le passage du numérique au littéral, le passage du traitement arithmétique au traitement algébrique sont là encore des enjeux fondamentaux du collège. Qu'une lettre puisse cacher n'importe quel nombre, qu'elle puisse être tour à tour inconnue, variable, paramètre, ce statut n'étant déterminé que par la compréhension du contexte, est un obstacle redoutable. Que le symbole d'égalité puisse cacher des statuts aussi différents que l'identité, l'affectation, une égalité conditionnelle rajoute à cet obstacle. Cet apprentissage est en tout point comparable à celui d'une langue étrangère, avec ses conventions d'écriture (le vocabulaire), ses règles de travail, les propriétés algébriques (la grammaire). Ceci faisait dire à Condorcet en 1798 : "Les mathématiques sont une science bien traitée dont la langue est l'algèbre."

Prenons là encore une étude de cas pour illustrer cela : la résolution de problèmes par la mise en équation. L'élève a appris dès l'école élémentaire à résoudre des problèmes par "l'arithmétique" : il part de ce qui est connu, et, le sens de l'énoncé éclairant le choix des opérations, de résultat numérique en résultat numérique, il aboutit à la valeur inconnue cherchée. La méthode algébrique va aller à l'encontre de l'arithmétique : reconnaître l'inconnue du problème, accepter de la désigner par une lettre et d'opérer sur elle comme il le ferait sur un nombre connu ; puis traduire les données en une chaîne d'opérations écrites en ligne, en respectant les conventions d'écriture. Mais ce qui va être le plus difficile pour lui, c'est que le sens du problème non seulement n'indiquera plus les étapes de résolution, mais deviendra même un obstacle à l'acquisition de l'algorithme.

Accepter de résoudre un problème par l'algèbre, c'est accepter d'en perdre le sens externe. Il faut donc soigneusement construire le sens interne, sinon les élèves feront de la résistance : renoncer à des méthodes arithmétiques bien assises sur le sens du problème, oser le passage à l'algèbre alors que leur niveau en calcul algébrique est encore bien fragile, tout cela représente un véritable défi intellectuel. Les convaincre qu'à terme ils auront gagné en économie et en puissance de travail est notre pari d'enseignant.

La gestion de données

Cette partie du programme est "naturellement" celle où les mathématiques et la réalité vont être le plus en interaction. C'est dans cette partie que l'élève va de façon privilégiée développer des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations, en s'appuyant sur de fréquents changements de registre. Partant d'un texte, souvent écrit en français, comportant un certain nombre de données chiffrées, il devra déjà organiser ces données, par exemple sous la forme de tableau ou de graphique, deux cadres dont il faut développer l'interactivité. Puis des calculs permettront de transformer ces données, de les synthétiser. De même les résultats pourront eux aussi être donnés dans différents registres suivant la nature du problème étudié : texte français, tableau, graphique, résultat numérique...

C'est enfin dans cette partie qu'apparaît le mieux le rôle éducatif et social des mathématiques. La lecture, l'interprétation, l'utilisation de diagrammes, tableaux, graphiques, leur analyse critique aident l'élève à mieux comprendre les informations qu'il reçoit, et, en cela, contribuent à son éducation civique. La liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, en particulier sciences de la vie et de la terre, géographie, technologie prend ici tout son sens, en intégrant les connaissances dans une vision plus large.

Comment les mathématiques vont-elles participer à la réalisation d'un tel enjeu : en proposant des modèles de traitement et de validation. De tous ces modèles, celui qui va permettre de gérer le maximum de situations est la proportionnalité. Si l'enseignement de ce modèle relève de beaucoup de disciplines, les mathématiques en sont un lieu de systématisation.

Illustrons cela avec les statistiques et les probabilités. Les statistiques ont pour fonction essentielle de gérer des informations issues de l'observation. Leur traitement, que ce soit par les tableaux, les graphiques, ou les calculs, relève de la proportionnalité, au moins au niveau du collège. Dans les classes supérieures arrivent les probabilités, modèles mathématiques *a priori*, mais qui prennent naissance dans les statistiques avec l'approche fréquentiste. C'est un des temps les plus forts de la modélisation dans l'enseignement mathématique :le passage de l'observation au modèle.

Et dans les probabilités, nous retrouvons cette dominance du modèle linéaire. Veut-on constituer un échantillon ? On cherche à faire une photographie en miniature de la population. Veut-on modéliser le hasard ? On le rend uniforme. Allons plus loin : un dé est caché sous une couverture, et on vous demande quelle est la probabilité que la face supérieure soit un six... Au stade philosophique, c'est-à-dire au stade ultime (au sens noble du terme), la proportionnalité n'est elle pas le masque scientifique de notre ignorance ?