REPERES - IREM . N° 33 - octobre 1998

VARIATIONS SUR DES ÉNONCÉS DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE AU COLLÈGE

Jean HOUDEBINE,
Colette LABORDE

INTRODUCTION. LE CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Pour de nombreux élèves de collège, lire et écrire en mathématiques ne peut s'apprendre par la seule immersion en classe de mathématiques. Mettre au point les conditions et moyens susceptibles de permettre un tel apprentissage nécessite au préalable de repérer les types de problèmes rencontrés par les élèves dans les activités langagières auxquelles ils sont confrontés en classe de mathématiques ainsi que les compétences requises pour écrire ou parler "mathématiques" , lire un texte ou comprendre l'enseignant. Les problèmes de type langagier apparaissent de façon particulièrement tangible au collège, alors que les mathématiques font appel à l'expression plus qu'à l'action et que les usages langagiers habituellement en vigueur en mathématiques commencent de s'installer dans les textes à la disposition des élèves ou dans le discours des enseignants.

En 1989 dans le cadre du Comité National des Programmes, un groupe de travail "Langage et Mathématiques" s'était constitué sur ces problèmes, soutenu ensuite par l'INRP en 1992. Animé par R. Tomassone et C. Laborde, il regroupait des enseignants de français et de mathématiques [1]. L'objet de l'article présent est issu d'une partie des travaux de ce groupe. Il concerne la lecture d'énoncés de géométrie au collège.

1. LA LECTURE D'ÉNONCÉS DE PROBLÈMES

1.1. Les questions initiales

Aucun enseignant ne mettra en doute que les énoncés de problèmes font partie des rares textes lus par les élèves en

(1) J. Blanchon, J. Bolon, J. Guibert, M.-F. Guignard, D. Haugazeau, M.-J. Houssin et I. Giorgiutti ont en particulier participé à la mise en place de l'expérimentation rapportée ici.

mathématiques. Or si la lecture de l'énoncé est indispensable, elle n'est la plupart du temps ni objet d'évaluation, ni objet de travail en classe. On se contente bien souvent de regretter qu' "ils" n'aient pas compris l'énoncé ou qu' "ils" l'aient lu trop vite. Tel était le point de départ de notre motivation à porter attention à ce type de lecture, si souvent sollicité mais si rarement travaillé avec les élèves.

Une première série de questions visait tout simplement à mieux connaître l'objet "énoncé de problème". Peut-on dégager des caractéristiques linguistiques spécifiques d'un énoncé de problème ? Quelles sont les variations possibles sur lesquelles on peut jouer dans leur rédaction ?

Une deuxième question concernait les élèves : S'il est possible de varier la forme d'un énoncé, dans quelle mesure ces modifications ont-elles un effet sur la lecture de l'énoncé par les élèves ?

Puisqu'il apparaît que donner des problèmes à résoudre ne suffit pas pour surmonter les difficultés concernant la lecture d'énoncés, il est indispensable d'inventer d'autres tâches dans ce but. Comment les choisir de manière pertinente constituait une troisième interrogation.

1.2. Pourquoi choisir des énoncés de géométrie ?

Si des caractéristiques communes à tous les énoncés de problèmes de mathématiques peuvent être dégagées, il n'en subsiste pas moins que chaque domaine engendre un type d'énoncés que les élèves prennent l'habitude de reconnaître. C'est pourquoi nous avons décidé de nous restreindre à un domaine des mathématiques.

Nous avons écarté les problèmes arithmétiques déjà bien étudiés du point de vue de la compréhension et choisi pour objet d'étude des énoncés de géométrie plane, qui conduisent implicitement ou explicitement à une démonstration ; ceux-ci sont relativement plus nouveaux pour les élèves de collège que les énoncés d'arithmétique et pour l'instant très peu analysés. Si l'énoncé d'arithmétique peut relever partiellement du style narratif, l'énoncé de géométrie se trouve sans ambages du côté des mathématiques en recourant à une terminologie spécifique et des structures nominales complexes.

1.3. Lire un énoncé de problème : quelle tâche pour l'élève ?

Les chercheurs en psycholinguistique considèrent que dans une tâche de lecture d'un texte quelconque, le sens est construit par le lecteur à partir du texte bien sûr, mais aussi à partir de ses propres connaissances sur le contenu du texte et sur la langue. En particulier, les divers éléments du texte ne sont pas traités de façon uniforme par le lecteur, et ce traitement va dépendre de la finalité de la lecture.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que, dans le cas des énoncés de problèmes, le lecteur sélectionne les informations jugées les plus importantes et qu'à partir de cette sélection il organise le sens de l'énoncé en reliant les informations secondaires aux principales. Les résultats de Nesher et Teubal (1975) vont dans ce sens en montrant l'importance, dans les énoncés de problèmes d'arithmétique, des mots inducteurs comme "ajouter", "fois", "plus", "moins". Cette sélection des informations principales est tributaire de plusieurs éléments en conjonction :

– des éléments linguistiques de l'énoncé ;
– des connaissances du lecteur dans le domaine mathématique concerné ;
– des habitudes, des règles implicites qui gèrent la communication entre auteur et lecteur, en un mot du contrat didactique ; nous en parlerons dans le paragraphe suivant ;
– de la situation particulière de lecture et en particulier de sa finalité.

Quand on donne à un élève un énoncé de problème pour le résoudre, sa lecture est gérée par une finalité bien précise : la résolution du problème. Le traitement de l'énoncé va alors se faire avec plusieurs objectifs complémentaires :

– comprendre la situation qui est décrite, c'est-à-dire se construire une représentation. Dans le cas des énoncés de géométrie la figure jouera un rôle important dans cette représentation de la situation.

– comprendre la tâche exacte qui est attendue ; repérer la partie informative et la question, analyser la question, mais aussi faire appel aux usages de la classe.

– essayer de se servir des éléments de l'énoncé pour la résolution du problème.

Dans la pratique, ces trois objectifs ne sont pas toujours présents à l'esprit de l'élève ; mais ils sont cependant indissociables : la représentation de la situation comme celle de la tâche se construisent au fur et à mesure de la résolution ; on voit l'élève revenir sur le sens de l'énoncé alors qu'il est engagé dans la résolution. Notons cependant que ces allers et retours sont cognitivement difficiles quand ils obligent à revenir sur des décisions déjà prises ; nous avons observé que chez les élèves en début de collège la représentation est rapidement élaborée et évolue très peu au cours de la résolution du problème (Julo, Houdebine *et al.*, 1990, Guillerault et Laborde 1985).

La poursuite de ces différents objectifs conduit à des traitements de nature différente :

– structuration de l'énoncé en parties, repérage de la partie informative et des questions, découpage en unités plus petites, repérages des données et des relations existant entre elles.

– transformation des éléments de l'énoncé en vue de pouvoir les utiliser pour la construction de la figure ou pour la résolution : par exemple dans "construis deux triangles ABC et ABD tels que...", l'élément "triangle ABC et ABD" peut être transformé en "quatre points A, B, C et D, sommets de deux triangles ABC et ABD" pour mener à un procédé de construction géométrique.

1.4. Le rôle du contrat didactique

L'étude de solutions d'élèves à des énoncés de problèmes mathématiques dit "absurdes" a été historiquement à l'origine de la vulgarisation de la notion de contrat didactique. A cette occasion, des règles implicites, auxquelles obéissent de façon usuelle les énoncés standards de problèmes scolaires en mathématiques, ont été mises en évidence : par exemple, le nombre nécessaire et suffisant de données est fourni dans l'énoncé (Semadeni 1987) ; les éléments intermédiaires à envisager ne doivent pas être trop nombreux, de même que les changements de points de vue, les notions à utiliser ne doivent pas présenter un trop grand degré d'excentricité par rapport aux notions du programme scolaire en vigueur au niveau concerné, sauf si l'enseignant délibérément et explicitement décide de confronter les élèves à une activité de résolution de problème sortant des habitudes scolaires (de nouvelles règles implicites s'établissent alors entre l'enseignant donneur de problèmes et les élèves chargés de les résoudre). Ces règles implicites prennent des formes spécifiques à chaque domaine mathématique.

En géométrie plane, ces règles concernent pour beaucoup le rôle du dessin dans la résolution du problème et les évidences visuelles que l'élève est en droit d'utiliser. Certains procédés de résolution sont attendus de la part des élèves, d'autres sont jugés illicites. Les frontières du licite connaissent des variations suivant les niveaux scolaires, voire les enseignants et suivant les types de problèmes. On peut ainsi distinguer quatre types de problèmes suivant le rôle du dessin :

– les problèmes de reproduction de dessins fournis avec parfois des données verbales supplémentaires (ils ont cours surtout en Sixième et Cinquième) ; un dessin est donné en entrée de la tâche, il en est demandé un autre en sortie (Pluvinage 1989 et Rauscher 1993) ;

– les problèmes de construction qui consistent à demander la construction (en général à la règle et au compas) d'un dessin satisfaisant à un ensemble de conditions ; des données verbales sont fournies en entrée, un dessin est à donner en sortie par les élèves ;

– les problèmes de programme de construction, où le but est d'écrire un texte permettant de "construire la figure" ; un dessin et des données verbales sont fournis, un texte est demandé à l'élève en sortie ;

– les problèmes de démonstration dans lesquels on a à établir des propriétés géométriques à partir d'un ensemble donné de propriétés. Le dessin n'est qu'un élément auxiliaire du problème.

Examinons les attentes implicites de l'enseignement au niveau du collège dans ces quatre types de problèmes. Dans les problèmes de reproduction, l'élève est en droit de tirer certaines informations visuelles du dessin à reproduire ; ainsi, il est en général permis de conclure à l'alignement de trois points ou à l'intersection de trois droites, à l'appartenance d'un point à une droite ou à un segment au seul vu du dessin.

Les problèmes de construction sont des classiques, surtout lorsqu'ils relèvent de la catégorie règle et compas : certains usages des instruments y sont permis, d'autres non. Ainsi la construction d'une tangente à un cercle passant par un point donné extérieur au cercle ne peut se faire par pivotement de la règle autour du point. On ne peut de même trouver le centre d'un cercle en essayant plusieurs positions avec le compas de façon à tracer un cercle coïncidant avec le cercle donné. Le tâtonnement ou encore la stratégie essai-erreur validée par un contrôle perceptif est illicite. Comme le dit Chevallard (1991), seule est véritablement en jeu la constructibilité de l'objet géométrique et non sa représentation effective. Le licite connaît aussi des variations. Suivant les exercices, on admettra ou l'on interdira le report de mesures par règle graduée.

On retrouve des contraintes analogues

pour les programmes de construction ; mais la particularité de la tâche en ajoute d'autres, liées à la production du texte. Par exemple on évitera les indications sur l'usage des instruments comme : je pointe mon compas sur le point A.

Cette brève analyse met en évidence la spécificité des problèmes de démonstration auxquels nous allons nous intéresser plus particulièrement. D'abord, dans certains problèmes de construction, le point de départ peut être laissé au choix de l'élève ; ce n'est jamais le cas dans les problèmes de démonstration, où les hypothèses sont fixées par l'énoncé. Ensuite, dans ces problèmes, l'élève n'est pas en droit de tirer certaines informations du dessin comme il le fait dans les problèmes de reproduction.

Si l'on se réfère aux seuls termes d'un énoncé de problème de démonstration qui ne fait pas mention de dessin, l'élève serait tout à fait en droit de fournir une justification de la propriété à établir sans fournir de dessin. Mais parce que le dessin est un élément d'appui de l'élaboration de la preuve, il est implicitement demandé aux élèves d'accompagner d'un dessin la rédaction de la preuve. Le rôle de ce dessin dans l'élaboration de la preuve est d'ailleurs réglementé comme l'expriment certains manuels actuels :

"Attention ! Certaines impressions sont parfois mauvaises. *L'utilisation des instruments* permet seulement *de se faire une idée de* certaines propriétés d'une figure. Cela s'appelle *faire une conjecture* ("il semble que", "on dirait que"). Quand on affirme un résultat, il faut toujours le prouver en utilisant une ou plusieurs propriétés étudiées en classe.

On dit aussi *montrer* ou *démontrer* ou *justifier*." (Delord, Terracher et Vinrich ; 4^e^, 1992, Collège Hachette, p. 138).

Le dessin n'est qu'un pourvoyeur d'impressions visuelles susceptibles de donner des idées de propriétés géométriques mais, contrairement aux problèmes de reproduction, il n'est pas permis de les considérer comme vérifiées par l'objet géométrique dont le dessin est une représentation. Seuls les faits théoriques et, de plus, vus en classe, sont à utiliser dans une chaîne de déductions. Le contrat paraît clair, il l'est un peu moins si l'on approfondit tant soit peu la question. Les propriétés d'ordre, de régionnement, dans certains cas d'intersection, peuvent être en général admises directement de la constatation visuelle sur le dessin (Arsac 1990) et non à justifier. Mais la propriété d'alignement de trois points qu'il est licite de tirer du dessin quand il s'agit d'un problème de reproduction, doit être justifiée dès qu'il s'agit d'un problème de démonstration. Les exigences diffèrent suivant les deux types de problèmes.

Outre le rôle du dessin dans la résolution de problème en géométrie, l'interprétation de la consigne comporte aussi beaucoup d'implicite ; ce que l'on est en droit d'exiger des élèves reste souvent tacite. Le manuel de Quatrième cité plus haut indique ainsi (p. 139) dans un encart intitulé "Important" :

"Pour répondre à une question du type "Quelle est la nature du triangle...". "Préciser la nature du quadrilatère..." "Que peut-on dire des droites..."il faut *toujours justifier* (2) ses affirmations (même si cela n'est pas demandé dans la consigne)."

(2) En italique dans le texte.

L'appel à une démonstration n'est donc pas toujours explicite dans la formulation de la consigne.

Une autre règle implicite est que les données du problème ne doivent pas vérifier une propriété supplémentaire, non indiquée dans l'énoncé, donnant lieu à ce qu'on appelle un cas particulier.

2. Une expérience de la cinquième à la seconde

Ce serait une tâche gigantesque et d'intérêt discutable que de repérer l'effet sur la compréhension des élèves de chacune des variations possibles d'un énoncé de problème. Nous avons préféré mener une étude d'ampleur réduite en jouant sur quelques variations à la fois d'énoncés donnés à lire à des élèves de collège (5^e, 4^e, 3^e) et de finalités de lecture.

2.1. La difficulté de choisir une tâche

Comme nous l'avons déjà dit, l'objectif de notre expérience était double. D'une part nous souhaitions comprendre de manière plus approfondie les difficultés des élèves liées à une maîtrise insuffisante de la lecture de textes d'énoncés de problèmes de géométrie ; nous souhaitions que les tâches choisies conduisent les élèves à des réponses révélatrices de leurs représentations concernant les énoncés. D'autre part nous voulions repérer les tâches nouvelles susceptibles de contribuer à l'apprentissage de cette lecture.

Donner à résoudre des problèmes ne satisfaisait aucun de ces deux objectifs ; en particulier pour le premier nous pensions qu'il était trop difficile, dans l'état actuel des connaissances sur le sujet, de distinguer les difficultés liées à la lecture de celles qui viennent de la résolution.

Demander aux élèves de s'exprimer à propos de l'énoncé, est une tâche trop complexe, en particulier pour les élèves de Cinquième, car cela leur demande d'écrire un texte inhabituel.

Nous aurions pu leur demander, comme cela se fait souvent, d'écrire des énoncés à partir d'une figure et de quelques informations. Cette tâche d'écriture a sans doute un rôle formateur pour la lecture. Mais, ne comportant aucune lecture d'énoncés pour les élèves, elle ne pouvait nous donner des éléments fiables sur leurs représentations concernant cette lecture, d'autant plus que le mot “énoncé” recouvre des choses très diverses pour des élèves de collège.

Finalement les tâches de réécriture nous ont paru les plus prometteuses. Du point de vue de la formation, elles conduisent à une lecture approfondie du texte que l'on doit modifier. La présence de l'énoncé initial devrait permettre à l'élève de repérer la structure des énoncés dont on parle. L'originalité de la tâche lui donne une certaine liberté pour s'exprimer. En ce qui concerne les représentations, on peut penser que les modifications apportées concerneront des caractéristiques du texte essentielles aux yeux des élèves.

Nous avons finalement choisi 5 tâches différentes. Les trois premières tâches concernent 9 énoncés construits à partir de trois problèmes, en faisant varier les caractéristiques rédactionnelles ; nous présentons ces énoncés dans le paragraphe suivant. Les deux dernières tâches concernent un seul énoncé.

Première tâche : Voici 9 problèmes. Quel est celui qui te paraît le plus difficile à lire ? Réécris l'énoncé de ce problème pour qu'un élève le lise avec moins de difficultés.

Deuxième tâche : Voici 9 problèmes. Quel est celui qui te plaît le moins ? Réécris l'énoncé de ce problème pour qu'il soit plus agréable à lire.

Troisième tâche : Voici des énoncés de problèmes. Ils ne sont pas écrits de la même manière. Écris l'énoncé 2 comme l'énoncé 9, puis l'énoncé 2 comme l'énoncé 7, puis l'énoncé 6 comme l'énoncé 2.

Quatrième tâche : Voici un problème : *Quelle figure forment les milieux des côtés d'un quadrilatère ?*
Un élève prétend que c'est une question de cours. Peux-tu le réécrire pour qu'il ait la certitude que c'est bien un problème ?

Cinquième tâche : Voici un énoncé de problème :
On se donne 5 points : A, B, C, D, E. Que peut-on dire des points D, E et C si on sait que : AB = AC, ABCD est un parallélogramme, et A et E sont symétriques par rapport à (BC) ?
Écris un nouvel énoncé du même problème, en écrivant d'abord les informations nécessaires pour construire la figure et ensuite la question.

La première tâche cherche plutôt à mettre en évidence des difficultés de lecture ressenties par les élèves. La seconde et la quatrième vont être l'occasion de rendre plus explicites certains éléments du contrat didactique. La troisième devrait permettre à l'élève de repérer certaines caractéristiques d'un énoncé de problème, sans être obligé de les expliciter. La cinquième explore une difficulté essentielle : repérer les données du problème et la propriété concernée par la question.

Cette expérience s'est déroulée sur 7 classes de collège et un groupe d'élèves instituteurs.

En travail individuel :
une classe de 5^e de 29 élèves, tâches 1, 5 et 3 ;
une classe de 4^e de 25 élèves, tâche 3 ;
une classe de 3^e de 29 élèves, tâches 5 et 4 ;
une classe de 3^e de 15 élèves, tâches 5, 2 et 3.

En travail de groupes :
Une classe de 4^e, 4 groupes, tâches 5, 2 et 3 ;
une classe de 4^e, 10 groupes, tâche 3 ;
une classe de 3^e, 7 groupes, tâche 1 ;
un groupe d'élèves d'instituteurs, 9 groupes, tâche 3.

Ont été le plus utilisées, les tâches 3 et 5 qui demandent des réécritures suivant des contraintes "objectives" (réécrire un énoncé comme un autre ou avec des contraintes de structuration) en opposition à des contraintes plus "subjectives" (réécrire pour qu'il soit plus facile à lire, plus agréable...).

2.2. Les neuf énoncés choisis

Pour nos trois premières tâches, nous avons choisi de proposer aux élèves 9 énoncés de forme variée.

Énoncé 1 : On considère le quadrilatère ABCD. I est le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD], L le milieu de [DA]. Montrer que (IJ) est parallèle à (KL).

Énoncé 2 : On considère le triangle ABC, I milieu de [AB], J milieu de [BC], K milieu de [CA]. Que peut-on dire de la figure AIJK ?

Énoncé 3 : ABCD est un parallélogramme. On sait que AB = AC. On construit A', symétrique de A par rapport à la droite (BC). Quel est le milieu de [DA'] ?

Énoncé 4 : Démontrer que les milieux des trois côtés d'un triangle et l'un des sommets de celui-ci forment un parallélogramme.

Énoncé 5 : Démontrer que les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.

Énoncé 6 : On se donne 5 points : A, B, C, D, E. Que peut-on dire des points D, E et C si on sait que : AB = AC, ABCD est un parallélogramme, et A et E sont symétriques par rapport à (BC) ?

Énoncé 7 : Quelle figure forment les milieux des côtés d'un quadrilatère ?

Énoncé 8 : On construit un triangle ABC tel que AB = AC. On construit la parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AB) passant par C ; elles se rencontrent en D. On construit A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Montrer que C est le milieu de [DA'].

Énoncé 9 : Quatre piquets A, B, C, D sont placés dans un champ. Isidore se place au milieu entre A et B, Jean au milieu entre B et C, Geneviève au milieu entre C et D, Michèle au milieu entre D et A. Isidore, Jean, Geneviève et Michèle sont-ils les sommets d'un parallélogramme ?

Trois problèmes

Nous sommes partis de trois problèmes. Le premier, qualifié parfois de problème de Varignon, correspond aux énoncés 1, 5, 7 et 9 (quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un quadrilatère), le deuxième aux énoncés 2 et 4 (quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un triangle et l'un des sommets du triangle), le troisième aux énoncés 3, 6 et 8 (deux des parallélogrammes formés par les droites des milieux d'un triangle dans un cas particulier).

3. Des éléments d'analyse des énoncés choisis

Cette analyse ne peut avoir comme objectif de conclure au degré de lisibilité de nos énoncés, encore moins à leur qualité intrinsèque. D'une part la lisibilité d'un énoncé est relative à un lecteur, d'autre part un énoncé n'est ni bon, ni mauvais dans l'absolu, il est plus ou moins adapté à telle ou telle situation, à tel objectif d'apprentissage. Il s'agit d'expliciter les différentes caractéristiques de chaque énoncé afin de prévoir les difficultés des élèves et de faciliter de ce fait l'analyse des copies.

Nous pourrions faire l'analyse séparément pour chacun de ces problèmes mais il nous a paru plus pertinent de la faire pour tous les énoncés à la fois. Cependant on ne peut parler ici d'une grille d'analyse, car les éléments retenus sont très liés aux situations que nous avons choisies.

3.1. Présentation des objets du problème : leurs caractéristiques géométriques

Les référents

Tous ces problèmes gravitent autour d'une figure de référence, familière aux élèves : un triangle, un quadrilatère, un parallélogramme. Mais des variations ont cependant été introduites à ce propos dans la partie informative.

L'énoncé 9 n'explicite pas de figure de référence (il n'introduit que des points). La place d'une telle figure varie dans les autres énoncés. Les énoncés 1, 2, 3 et 8 commencent par sa donnée alors que les énoncés 4, 5, 6 et 7 ne la placent pas au début. Notons que l'énoncé 6 ne peut conduire les élèves à faire d'un pentagone la figure de référence ; il n'y a pas de telle figure à leur niveau scolaire et le problème ne s'intéresse en aucun cas aux propriétés de cette figure.

Le deuxième problème, correspondant aux énoncés 2 et 4, est fondé sur une figure très familière des élèves de Quatrième : le triangle des milieux ; cela est susceptible de provoquer une centration des élèves sur les droites des milieux et les propriétés qui leur sont attachées.

Des variations ont aussi été faites dans les référents relatifs aux questions. Les questions ouvertes sollicitent de façon privilégiée certains référents et cela selon les connaissances des élèves du niveau scolaire concerné. Ainsi la question "Que peut-on dire du quadrilatère AIJK ?" appelle d'abord une vraie réponse de la part des élèves (une réponse du type "il n'y a rien à dire" est en rupture de contrat) ; ensuite elle renvoie pour ces derniers aux quadrilatères remarquables du programme : parallélogramme, rectangle, losange, carré. Deux questions ouvertes (énoncés 2 "Que peut-on dire de la figure AIJK ?" et 7 "Quelle figure forment les milieux d'un quadrilatère ?") renvoient à une figure et non à un quadrilatère ; on peut se demander si, de ce fait, elles rendent moins facile l'association à des quadrilatères particuliers. Cependant le terme "quadrilatère", employé dans l'énoncé 7, rend peut-être cette évocation plus facile. La question "Que peut-on dire des points D, E, C ?" est-elle plus naturellement associée à l'idée de points alignés qu'à celle de milieu ? Enfin, il est probable que la question "Que peut-on dire des quatre points A, I, J, K ?" ne renverra à aucun référent pour les élèves de Quatrième ; des élèves de Terminale penseraient peut être à des points cocycliques.

Dans les questions fermées sur le quadrilatère des milieux d'un quadrilatère des énoncés 5 et 9, la référence à un parallélogramme peut conduire les élèves à envisager le milieu des diagonales.

La présentation

Pour introduire un objet géométrique ou pour poser une question à son propos, il y a souvent plusieurs manières de le présenter dans l'énoncé. Cela se produit en particulier dans nos énoncés pour la présentation des quadrilatères. Dans les énoncés 4, 5 et 7, le quadrilatère dont on cherche les propriétés est décrit comme un ensemble de quatre points : "les milieux forment un parallélogramme", alors que l'énoncé 9 suggère qu'un quadrilatère a des sommets et donc des côtés : "...sont-ils les sommets d'un parallélogramme".

Cette dernière façon de présenter un quadrilatère est sans doute plus conforme aux représentations des élèves ; suivant des travaux déjà anciens comme ceux de Van Hiele (*cf.* un compte-rendu de ces travaux dans Wirszup 1976) on peut faire l'hypothèse que les élèves conçoivent un polygone plutôt comme un contour qui limite une certaine surface que comme une suite de points. Elle correspond aussi à la façon dont les ouvrages de géométrie anciens définissaient les polygones ; ce n'est qu'avec les manuels de la réforme des mathématiques modernes qu'est apparue dans l'enseignement l'idée de les réduire à une suite de quatre points.

Nombre d'objets et de propriétés explicités

C'est l'énoncé 8 qui est, de ce point de vue le plus complexe, puisqu'on y trouve explicitement présents : triangle, égalité de longueurs, symétrique, milieu et parallèle (2 fois), intersection de droites ("se rencontrent"). Cela est dû bien sûr à la complexité de la configuration même, mais aussi au choix de présenter le parallélogramme contrairement aux énoncés 3 et 6, sous la forme de quatre droites parallèles deux à deux.

3.2. La cohérence des énoncés

Certaines cohérences de points de vue facilitent la lecture de l'énoncé et la résolution de problème.

Le point de vue sur la situation géométrique

Chaque énoncé adopte un ou plusieurs points de vue sur la situation géométrique concernée. Mais il peut arriver que ceux-ci ne soient pas cohérents tout au long de l'énoncé :

– cohérence entre la partie informative et la consigne

Duval (1991) a montré que les problèmes dont la question prend un point de vue différent de celui de l'exposé des données, sont moins bien réussis par les élèves de collège ; il a introduit à ce propos la notion de congruence sémantique. On peut observer que les énoncés 2 et 4 sont dans ce cas, la partie informative présentant un triangle alors que la question porte sur un quadrilatère. Le conflit sera d'autant plus fort à partir de la classe de Quatrième, que la figure de référence introduite, à savoir le triangle des milieux d'un triangle, est un objet d'enseignement prégnant.

Les énoncés 5 et 7 sont aussi dans ce cas : quadrilatère dans les données, parallélogramme dans la question. Le changement de point de vue est plus fort dans l'énoncé 9 dont la partie informative ne présente que des points et la consigne un parallélogramme.

– cohérence interne à la partie informative

La mention en début d'énoncé d'une figure particulière introduit *de facto* un point de vue ; les éléments qui suivent peuvent compléter de façon plus ou moins naturelle cette figure, ou au contraire obliger à la considérer autrement ou à ne plus la considérer du tout. Il y a alors un changement de point de vue. Dans l'énoncé 3 par exemple, on examine un parallélogramme ABCD. Cela crée une différence de point de vue sur AB et sur AC (l'un est tracé, l'autre ne l'est pas) qui peut rendre incompréhensible l'égalité AB = AC.

Dans l'énoncé 6, au contraire, le début est présenté en termes de points et une figure forte de référence, un parallélogramme, est introduite en milieu d'énoncé.

– cohérence entre l'énoncé et son traitement pour la résolution

Un énoncé de problème peut présenter une cohérence de points de vue interne, mais son traitement en vue de la résolution peut relever d'un point de vue non cohérent avec celui de l'énoncé. C'est le cas par exemple de l'énoncé 1 pour la résolution duquel le tracé des diagonales du quadrilatère ABCD est indispensable, alors qu'il ne fait pas réellement partie du point de vue qui se dégage de l'énoncé.

Le type d'introduction des données

L'énoncé 3 est particulièrement hétérogène. Le début décrit une figure déjà tracée avec usage du verbe "être" et de l'expression "on sait que", la suite est en revanche exprimée en termes de construction. L'énoncé 8 est au contraire très homogène car il se présente comme un programme de construction.

Ordre de présentation des données

Cette caractéristique est spécifique des problèmes de géométrie. La finalité première de la lecture de l'énoncé est le tracé d'un dessin associé à l'énoncé. Si les informations sont données dans un ordre congru au tracé, la charge de travail sera moins grande, les informations utilisées pour le dessin pouvant être aussitôt oubliées. De plus bien souvent, probablement aussi pour des raisons de charge cognitive, les élèves privilégient le tracé à la lecture en continu du texte : dès qu'il est possible de tracer quelque chose avec les informations données, ils interrompent leur lecture et passent au dessin.

Dans les énoncés 1, 2, 8 et 9, l'ordre de présentation des données est conforme à celui du tracé du dessin . Ces deux ordres diffèrent légèrement dans les énoncés 4, 5 et 7 où les compléments de nom "milieux des côtés" introduisent des objets dépendant d'autres objets non encore cités. Dans l'énoncé 6, la succession des deux phrases "On se donne 5 points : A, B, C, D, E" et "ABCD est un parallélogramme" provoque un conflit, la deuxième phrase remettant en effet en cause les cinq points supposés quelconques et dessinés par un grand nombre d'élèves lors de la lecture de la première phrase. Dans l'énoncé 3, AB = AC remet en cause le parallélogramme ABCD déjà tracé.

Pour chaque problème, il y a donc des variations dans les énoncés sur la compatibilité de ces deux ordres. Les variations les plus importantes ont lieu pour le troisième problème, entre l'énoncé 8 (compatibilité totale) et les énoncés 3 et 6 (conflit).

3.3. Les caractéristiques textuelles

Examinons maintenant des variables concernant la forme des textes des énoncés choisis.

Partie informative et consigne

Les énoncés que nous étudions sont constitués, en première analyse, de deux parties : une partie qui contient les informations sur la figure à considérer et une partie qui constitue une consigne ou une question. Mais ces parties ne sont pas toujours séparées ; par exemple l'énoncé : "Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme" peut être considéré comme une consigne à lui tout seul dans laquelle sont introduites les données du problème. Il paraît alors inintéressant de chercher absolument à délimiter la consigne et par exemple à déterminer si "milieux" fait partie de la consigne ou de la partie informative. En revanche, on peut distinguer des degrés plus ou moins grands d'imbrication. Ainsi dans “Obtient-on un parallélogramme, si on joint les milieux des côtés d’un quadrilatère ?”, la question est plus clairement séparée des données que dans l’énoncé précédent. De ce point de vue on peut dire qu’elles sont nettement séparées (partie informative d’abord, consigne ensuite) pour les énoncés 1, 2, 3, 8 et 9. La consigne est distincte de la partie informative dans l’énoncé 6 mais placée en son milieu. Elles ne sont pas séparées dans les énoncés 4, 5 et 7.

La forme de la consigne est une variable supplémentaire : elle peut être ouverte (“que peut-on dire ?” question en “vrai ou faux”) comme dans les énoncés 9, 2, 3, 6 et 7 ou fermée, la propriété à montrer étant indiquée dans l’énoncé, comme dans les énoncés 1, 4, 5, 8. Il est à attendre que la forme de la consigne joue un rôle non seulement sur la lecture même de l’énoncé mais sur la résolution du problème par les élèves (Robert 1990). On peut noter que seul un phénomène de contrat conduit à fournir dans la réponse une justification dans le cas des consignes non fermées.

Notons que, pour nos énoncés, l’élève est absent de la première partie et des consignes ouvertes, alors qu’il est présent dans les consignes fermées qui prennent une forme injonctive : infinitif d’injonction ou impératif : “montrez(r) que”, “déduisez (re) que”.

Groupes nominaux

Le discours mathématique en géométrie présente en général la caractéristique d’avoir recours à des groupes nominaux complexes, et cela dès le collège : “A symétrique de B par rapport à la droite D”. Les objets géométriques dépendent en effet d’autres objets et on ne peut les introduire qu’en précisant les arguments dont ils dépendent. Là où l’algèbre utilise un symbolisme spécifique, la géométrie fait appel à la langue naturelle et donc à des groupes nominaux complexes (chaîne de compléments de nom) dans lesquels les relations entre objets sont exprimées par des prépositions dont l’usage est fixé. On constate que les énoncés 1, 2, et 9 n’en contiennent pas, alors que dans les énoncés 6 et 8 les expressions “symétrique de”, “parallèle à” conduisent à en introduire un.

En revanche, c’est la recherche de concision qui, pour les énoncés 4, 5 et 7, conduit à des syntagmes nominaux complexes tels “les milieux des trois côtés d’un triangle”.

La lecture de ces groupes nominaux complexes nécessite leur segmentation qui ne va pas toujours de soi pour les élèves. En effet, les connaissances mathématiques du lecteur constituent une aide importante pour mener à bien cette segmentation.

Subordonnées

Un autre élément de complexité syntaxique réside dans la présence de subordonnées. Les unités en jeu sont alors plus grosses (ce sont des propositions avec un verbe) et plus facilement identifiables. Un rapide examen des énoncés de problèmes géométriques au collège montre d’ailleurs que, contrairement au cas des groupes nominaux complexes, la présence de phrases à subordonnées est relativement rare sauf dans les expressions du type “démontrer que”.

En revanche, l’énoncé 6 contient une subordonnée introduite par “si” qui contient elle-même trois subordonnées introduites par “:”. On peut se demander si la présence de ces “:” ajoute à la difficulté ; la formulation : “si on sait que AB = AC, que ABCD est un parallélogramme et que A et E sont symétriques par rapport à (BC)" serait-elle plus facile à lire ?

Notons enfin que l'expression "on construit A', symétrique de A..." serait sans doute remplacée dans un texte de français par : "On construit A' qui est le symétrique de A..."

Lexique

Les variations ont surtout porté sur l'introduction des données : "on considère", "on se donne" (inhabituel), "on sait que" (qui peut être interprétée comme une conséquence), "est", "on construit". Seuls les énoncés 3 et 6 utilisent plusieurs termes d'introduction.

L'emploi de lettres

Les énoncés relatifs aux deux premiers problèmes ont recours ou non, suivant les cas, à des dénominations d'objets géométriques par des lettres. Le troisième problème ne donne lieu qu'à des énoncés avec des lettres. Dans ces énoncés, on ne trouve nulle part des expressions du genre "le point A" ou "la droite (AB)".

Les marques d'énonciation

Deux énoncés ne font appel à aucune marque de la situation d'énonciation : le 7 et le 9. Les autres énoncés relèvent d'un énonciateur indéfini ("on"). Les variations dans ces énoncés portent sur le récepteur : absent (3), indéfini (2 et 6), ou implicitement présent (4, 5 et 8).

Habillage

L'habillage de 9 est très discutable. Il n'ajoute en effet aucune signification nouvelle au problème, ni ne présente d'intérêt.

3.4. Un essai de classification

Un examen attentif de toutes les remarques précédentes, conduit à regrouper les 9 énoncés en quatre classes, chacune regroupant les énoncés qui ont des caractéristiques voisines :

– la classe des énoncés 4, 5 et 7 (les énoncés 4 et 5 présentent les mêmes caractéristiques)
– la classe des énoncés 1, 2, 9 et 8 (qui regroupe les énoncés les plus simples)
– l'énoncé 3 plus proche de cette deuxième classe que de la première
– l'énoncé 6 distant de tous les énoncés mais un peu proche de l'énoncé 3.

4. Le point de vue des élèves

4.1. Quelques faits révélateurs

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous disposions de 128 copies (29 d'élèves de Cinquième, 39 d'élèves de Quatrième, 51 d'élèves de Troisième et 9 d'élèves instituteurs). L'objet de ce paragraphe est de citer quelques faits qui se sont dégagés de leur analyse.

L'importance et le rôle d'une figure de référence familière aux élèves

Dans les tâches de réécriture de l'énoncé 6, sur 44 élèves de Troisième concernés, 20 suppriment : "on se donne cinq points A, B, C, D, E" pour le remplacer en tête par "ABCD est un parallélogramme". Sur 25 élèves de Quatrième, 8 élèves font la même transformation, 5 élèves commencent par le "pentagone ABCDE", 3 introduisent un "polygone" ou un "parallélogramme

ABCDE". Ces transformations sont absentes en Cinquième. Nous interprétons ces modifications comme une préférence marquée pour la donnée en début d'énoncé d'une figure scolaire classique du programme : un parallélogramme, un triangle, un quadrilatère (cinq points en revanche ne constituent pas une telle figure). Il serait intéressant de vérifier si la plupart des énoncés scolaires présentent cette caractéristique. Cela pourrait aussi confirmer que la donnée de quelques points ne constitue pas une figure pour les élèves, de la même façon qu'un quadrilatère ne peut se réduire pour eux à quatre points.

Nous avons pu en outre repérer que l'influence de la figure de départ, lorsqu'elle existe, paraît marquante. En effet, près de 50% des réécritures des énoncés 2 et 4 mentionnent un triangle au lieu d'un quadrilatère dans la question. Certaines formulations sont même du type : "le triangle AIJK", ou encore "I, J, K sont les sommets d'un parallélogramme". Cela conforte notre hypothèse d'une préférence de cohérence de points de vue entre partie informative et question et montre bien le rôle des caractéristiques rédactionnelles de l'énoncé relatives à la cohérence. Notons que les réécritures citées plus haut de l'énoncé 6 vont dans le sens d'une plus grande cohérence de l'énoncé puisqu'elles suppriment la coexistence des deux points de vue : cinq points et parallélogramme. Peut être faut-il y voir l'impossibilité pour les élèves d'envisager deux figures de référence dans le même problème.

On peut sans doute relier à ces modifications la surprise exprimée oralement par plus de la moitié d'une classe devant la formulation "un triangle ABC tel que AB = AC" plutôt que "un triangle ABC isocèle". Nous l'interprétons comme le souci par les élèves de condenser dans une figure de référence des informations données sous forme analytique. On peut penser que la figure "triangle isocèle" est plus évocatrice des propriétés à mettre en œuvre que la mention AB = AC. Ce serait cette potentialité d'association de propriétés géométriques à des figures qui expliquerait cette préférence des élèves à l'existence d'une figure de référence familière en début de problème. On peut y voir l'influence de l'enseignement, un des objectifs des programmes du collège étant justement la connaissance de propriétés géométriques de figures particulières.

Une égalité gênante

Les propriétés associées par les élèves à la figure donnée au début de l'énoncé ne sont pas toujours valides ; ainsi de l'examen des productions des élèves à propos des énoncés 3 et 6 sur l'égalité AB = AC, il semblerait que, dans un parallélogramme, quelques uns s'attendent à ce que la longueur de la diagonale soit différente de celle d'un côté. Un groupe d'élèves de Quatrième va jusqu'à écrire : "AB ne peut être égal à AC parce que AC est une diagonale". Mais la réaction la plus fréquente semble être le refus d'une égalité entre un segment qui est déjà dessiné et un qui ne l'est pas encore. 6 copies de Troisième sur 43 vont transformer la phrase en ajoutant le mot diagonale : "AB est égal à la diagonale AC" ou encore 3 élèves écrivent : "A est équidistant de B et C". On trouvera 2 fois l'erreur "AB = BC". Enfin 10 élèves de Troisième vont ajouter entre "ABCD" et "AB = AC" une liaison avec les mots "tel que", "dont", ou "de façon que".

Cette observation montre que les caractéristiques des énoncés que nous avons dégagées, exercent une influence sur la lecture non seulement une par une, mais aussi de par leur combinaison. Ainsi l'exemple qui vient d'être donné montre que l'ordre de présentation des données est particulièrement crucial quand une donnée supplémentaire est conflictuelle avec ce que les élèves attachent à la figure de référence donnée en début d'énoncé.

La réécriture de l'énoncé 7 par les élèves de Troisième.

Cet énoncé est très différent d'un énoncé standard. Il est donc intéressant d'examiner les modifications apportées par les élèves de Troisième. On observe des modifications attendues : Plus du tiers parlent de joindre les points. Presque tous vont ajouter des lettres, mais le quart des élèves ne les ajoutent que pour le quadrilatère donné et non pour les milieux des côtés. Un quart de ceux qui rajoutent des lettres pour les milieux vont faire une globalisation avec le plus souvent le mot "respectivement". Il est plus surprenant de voir que plus d'un tiers des élèves introduisent l'expression "quadrilatère quelconque" ou des expressions plus explicites encore comme dans l'expression de la question : "Après avoir essayé tous les cas possibles, dites quelles figures vous obtenez".

Un groupe nominal complexe

Les 2/3 des élèves de Troisième modifient l'expression : "A et E sont symétriques par rapport à (BC)". L'expression la plus fréquente est "E est symétrique de A par rapport à (BC)". Cette expression est en effet plus congruente à la construction de la figure alors que l'expression donnée dans le problème correspond plus à un constat.

Cependant on mesure le malaise de certains élèves à plusieurs indices : 3 élèves suppriment l'information ; d'autres utilisent des formules non standard comme "E symétriquement opposé au point A par la droite (BC)" ou "A et E = (BC)" ; d'autres encore essaient de couper cette expression en deux comme : "Faire le symétrique de A par rapport à (BC). Ce symétrique sera E" ou "A est le symétrique de E. L'axe de symétrie est (BC)". Enfin il y a des retours souvent incomplets à la définition comme "(AE) ⊥ (BC)" ou "A et E sont sur la médiatrice de (BC)".

Ajout de mots

Ce fait est très net surtout pour les mots d'articulation en Troisième. Les mots ajoutés sont très variés. Les plus fréquents sont des pronoms relatifs ("qui", "dont" et "où"), les conjonctions "tel que", "pour que" et "de façon que", le participe présent ("étant", "ayant", "sachant"), des mots indiquant la succession ("puis", "ensuite", "après avoir") ou "il faut que".

Les élèves ajoutent souvent des mots pour présenter les données comme : "le point A" à la place de "A", "la droite (BC)", à la place de "(BC)".

Un mauvais découpage

Nous en avons repéré un dans la phrase : "que les milieux des trois côtés d'un triangle et l'un des sommets de celui-ci forment un parallélogramme" ; le "et" a été interprété par un élève comme reliant deux propositions et non deux noms. Du coup la proposition "l'un des sommets de celui-ci forment un parallélogramme" lui a paru incompréhensible.

Formulation et place de la question

La plupart des élèves sont capables de

repérer la question et de la placer dans la dernière phrase de l'énoncé. Cependant il arrive que cette phrase contienne encore des données, comme par exemple : "Que peut-on dire de DEC sachant que AB = AC ?".

Dans les classes de Troisième beaucoup d'élèves réécrivent les énoncés en mettant la question à la fin, même si on ne le leur demande pas. Ceux de Cinquième et de Quatrième expriment leur rejet des énoncés débutant par une question en disant par exemple ; "c'est une question de cours", "il n'y a pas de données", "on pose la question avant d'avoir vu la figure".

Certaines formulations semblent rejetées. Par exemple, presque tous les élèves d'une classe de Troisième modifient l'expression : "Quelle figure forment...". Les expressions utilisées sont alors très variées : "Que dire alors", "Quelle est la nature", "Quelles relations existe-t-il", "Que constatez vous", "Quelle figure obtenez vous", "Que représente la figure".

Des mots et des expressions rejetés

A tous les niveaux, les élèves remplacent souvent les mots d'introduction de données, d'articulation ou certains mots spécifiques. Notons les cas les plus frappants :

"On se donne" a été souvent remplacé par "on donne", "on nous donne", "on te donne", "on a donné" mais aussi par "on a", "placer", "construire",

"On construit" par "dessiner", "tracer" ("construire" est sans doute réservé aux tâches de construction),
"On considère" par "voici",

"Se place" par "est placé".

"On sait que" est pratiquement supprimé par les élèves de Troisième.

Quand il n'y a rien pour introduire une donnée, les élèves ajoutent souvent un mot : "on considère", "soit", "tracer".

L'expression "les droites se rencontrent en D" est souvent rejetée pour "se coupent", "se croisent" ou même "forment le point D".

Quand on examine ces modifications, elles sont le plus souvent judicieuses et correspondent aux expressions usuelles imposées par le contrat didactique.

Les énoncés mal aimés

Il s'agit ici de jugements portés par les élèves alors qu'on ne leur demandait pas de résoudre les problèmes. En Cinquième, ce sont les énoncés 8 et 9 qui sont considérés comme difficiles, sans doute parce qu'ils sont les plus longs ; en Troisième, c'est plutôt l'énoncé 6 et à un moindre degré le 7. L'énoncé 6 présente en effet un haut degré de complexité relatif à plusieurs caractéristiques. L'énoncé 7 pourrait être aussi rejeté en raison de son caractère en forte rupture avec les énoncés habituels.

La présentation des textes

Un des aspects les plus frappants des copies que nous avons étudiées est la négligence vis à vis de la ponctuation. Plus de la moitié des copies ont une ponctuation quasiment inexistante. Même le point d'interrogation de la question manque dans beaucoup de copies.

Une autre caractéristique est la présentation sous forme de paragraphes, souvent autant de paragraphes qu'il y a d'informations ; parfois deux paragraphes, un pour la question et un pour la partie informative. Faut-il y voir un élément de structuration ?

La réécriture et la résolution de problèmes

Les productions des élèves montrent bien que dans une tâche de réécriture, les élèves de Cinquième se préoccupent très peu de la résolution du problème. L'oubli d'une information ou de la question est fréquent, les difficultés de lecture sont associées à des critères sans lien avec la résolution : la longueur du texte, des tournures inhabituelles. Au contraire pour des adultes (élèves instituteurs) même s'ils ne sont pas très à l'aise en mathématiques, la résolution prime tout ; beaucoup ont noté par exemple, avant de réécrire un énoncé du même type que nos 9 énoncés, la présence d'une donnée inutile.

Le fait que les énoncés 4, 5 et 7 soient constitués d'une seule phrase conduit certains élèves à considérer qu'il ne s'agit pas véritablement d'un problème, mais plutôt d'une question de cours : on trouve par exemple une réécriture de l'énoncé 5 qui débute par "Démontrer avec une leçon que". On peut penser que, pour ces élèves, la démarche sollicitée n'est pas de mettre en œuvre une recherche sur la figure proposée, mais de découvrir, dans la liste des théorèmes connus, celui qui est utile.

L'habillage

Il est considéré comme une gêne par la plupart des élèves. On le constate dans leurs commentaires, mais aussi dans la non prise en compte de l'idée d'habillage dans la "réécriture de l'énoncé 2 comme l'énoncé 9". Cependant il est très apprécié par quelques élèves en difficulté en mathématiques qui y voient une rupture avec les mathématiques qu'ils rejettent.

4.2. Quelques questions en suspens

Cette première expérimentation laisse bien des questions sans réponse. Les informations les plus fiables semblent en effet venir des réécritures proposées par les élèves. Or, de ce point de vue, les tâches que nous avons proposées conduisent à de grosses différences. Par exemple, nous avons obtenu de nombreuses réécritures des énoncés 6, 7, 8 et 9 et très peu des autres énoncés, sauf pour l'énoncé 2 dans le cadre de l'imitation du style d'un autre énoncé.

Du coup, il nous a été impossible de recueillir assez d'indices dans les copies que nous possédions pour répondre à une question essentielle : la classification des énoncés, dégagée par l'analyse *a priori*, a-t-elle une signification didactique ? On peut seulement noter trois faits qui vont dans ce sens : une copie de Cinquième, émettant des jugements sur tous les énoncés, regroupe les énoncés 2, 8 et 9 d'une part et les énoncés 4, 5 et 7 d'autre part ; les modifications sur l'énoncé 6, dont nous avons beaucoup parlé, semblent spécifiques à cet énoncé ; quand on examine les modifications apportées, les énoncés 1, 2, 8 et 9 sont les moins modifiés (remplacement, suppression ou ajout de quelques mots, globalisation). Cependant un fait semble séparer les énoncés 4 et 5 de l'énoncé 7 : dans les rares réécritures des deux premiers, on ne trouve pas en effet l'apparition du mot "quelconque" et l'idée de joindre certains points est présente dans les réécritures de l'énoncé 7.

Nous souhaitions confirmer la préférence "triangle isocèle" à "triangle tel que

AB = AC". Or elle n'a pu être observée sur les copies, l'énoncé 8 n'ayant été réécrit que par des élèves de Cinquième qui font très peu de modifications de cette importance. Pour ce même énoncé, une préférence pour une description de la figure en termes de parallélogramme plutôt que de "parallèles" n'a pu davantage être testée.

4.3. Les représentations des élèves

Les faits précédents confirment un certain nombre d'idées qui ont été déjà développées par ailleurs sur les représentations que se font les élèves quand ils lisent un énoncé de problème. Par exemple, l'importance des figures de référence est confirmée.

Mais il nous semble, malgré les insuffisances notées dans le paragraphe précédent, que quelques nouvelles hypothèses peuvent se faire jour :

– Pour chaque élève existe un certain nombre de prototypes relatifs aux énoncés : le début d'un énoncé doit commencer par la donnée d'une des figures classiques, la question doit se trouver à la fin, la question doit être précédée de données. Les réactions devant l'énoncé 7 en sont l'illustration la plus flagrante. Il serait utile de mieux connaître ces prototypes.

– La présence d'une et d'une seule figure de référence semble être un élément essentiel pour les élèves. Par exemple, dans l'énoncé 2, parler de triangle dans les données et de quadrilatère dans la question leur parait constituer une contradiction.

– La différence entre "soient A, B, C, D quatre points" et "soit ABCD un quadrilatère" leur semble importante. Cela confirme les remarques du paragraphe 2, alors que d'un point de vue mathématique on pourrait considérer ces deux informations comme tout à fait équivalentes.

– Les élèves sont très sensibles à de petits indices textuels : ils éprouvent ainsi le besoin de parler de quadrilatère quelconque à propos de l'énoncé 7 et non pour l'énoncé 1. Ils voient une différence importante entre "ABCD est un parallélogramme et AB = AC" et "ABCD est un parallélogramme dont la diagonale AC est égale au côté AB".

– Le fait d'associer une démarche de résolution de problème à un énoncé n'est sans doute pas évidente pour les élèves de collège, surtout pour les élèves de Cinquième. En témoignent certaines fautes de réécriture (oubli d'une question, données changées...). Les élèves travaillent le texte sans le lier au problème à résoudre.

– La variété des mots employés par les élèves montre qu'ils manquent beaucoup moins de vocabulaire qu'on ne le dit généralement. Cependant des élèves ont des mots mal aimés. Ces mots dépendent largement de la classe : par exemple, un enseignant nous a signalé que dans sa classe le mot construire est ressenti comme un bricolage alors que dans une autre classe il sert assez souvent à remplacer "on se donne". Le mot d'introduction "soit" a été systématiquement employé par les élèves d'une classe et par aucun élève des autres classes.

– Le fait que, dans la tâche 5, la place de la question soit le plus souvent repérée, peut conduire à penser que ce n'est pas le repérage de la question qui est la principale cause d'erreur.

– Les tâches de réécriture sont bien adaptées aux élèves de Troisième, car ils sont capables de prendre des initiatives, et les productions sont souvent faciles à exploiter lors d'un débat. Les élèves de Cinquième au contraire hésitent à modifier de manière substantielle un énoncé. Ils vont s'attacher à des détails plus superficiels. On peut penser qu'ils ont du mal à gérer à la fois la réorganisation des données et la production d'un texte. La mise au point de fiches performantes sera donc plus délicate pour ce niveau.

CONCLUSION

De la diversité des données recueillies dans notre expérimentation, due à la variété des niveaux scolaires concernés, se dégagent quelques points forts. D'une part deux variables dans l'écriture des énoncés s'avèrent jouer un rôle important dans la lecture, d'autre part les élèves ont manifesté certaines compétences que nous n'attendions pas vraiment.

Des variables importantes

L'absence d'une figure de référence en début d'énoncé semble gêner fortement les élèves, qui se sont empressés dans leur réécriture de démarrer leur énoncé par la donnée d'une figure de référence qu'ils jugeaient centrale pour le problème : triangle, quadrilatère... A contrario, la présence d'une figure de référence en début d'énoncé a une incidence certaine sur la façon dont les élèves envisagent le reste de la description de la situation géométrique du problème. Cette figure semble jouer un rôle primordial pour l'élève lecteur, c'est autour d'elle que s'articulent les autres éléments de l'énoncé du problème. L'une des conséquences en est que la présence d'une seconde figure de référence dans l'énoncé, constitue une gêne, voire soulève un conflit que l'on peut catégoriser dans les cas de non congruence de points de vue. La seconde figure oblige à changer de point de vue, la coordination entre les deux figures de référence s'avérant en général trop difficile à effectuer pour les élèves. L'économie cognitive va dans le sens du maintien d'une seule figure de référence.

L'absence d'indication du tracé d'un élément de la figure (un segment le plus souvent) peut également gêner les élèves. Certains proposent par exemple de modifier l'énoncé 7 en mentionnant le fait qu'il faut joindre les milieux du quadrilatère considéré. Tout se passe comme si la figure formée par ces points ne peut exister que si elle est tracée sur le dessin. De même, il est difficile de parler de l'égalité de deux segments AB et AC si l'un d'eux n'est pas tracé (énoncé 6). Mais il serait faux de dire qu'en absence d'indication de tracé dans l'énoncé, les élèves ne procèdent pas au tracé. La seule introduction d'un triangle ou d'un quadrilatère sans mention de son tracé enclenche automatiquement le tracé des côtés par les élèves mais non celui des diagonales, très probablement parce qu'ils considèrent un polygone comme l'ensemble de ses côtés et non de ses sommets, comme nous l'avons dit plus haut. Les rapports entre les données explicites de l'énoncé et le dessin à tracer qui lui est associé ne se laissent pas enfermer dans une règle unique simple, mais reposent à la fois sur des usages et les représentations que le lecteur a élaborées des objets mathématiques en jeu. Les productions des élèves nous ont ainsi fait prendre conscience de l'importance de la mobilité en géométrie élémentaire entre points et droites, que souvent les élèves ne maîtrisent pas parce qu'elle est pratiquée de façon implicite dans l'enseignement sans faire l'objet d'un apprentissage spécifique, comme le mentionnent en particulier Robert et Tenaud (1989) à propos de la résolution de problèmes de géométrie en Terminales C.

Il est important de souligner que les variables critiques ainsi dégagées n'existent que de par la nature géométrique des problèmes : absence ou présence d'une figure, absence ou présence de l'indication d'un tracé. Cela montre bien le caractère relatif d'une grille d'analyse d'énoncés : si des éléments généraux d'analyse (tels la séparation ou l'imbrication de la consigne et de la partie informative) peuvent s'appliquer à des énoncés mathématiques de domaines différents, des variables rédactionnelles cruciales sont dépendantes du domaine mathématique. Une grille d'analyse ne saurait être appliquée de façon figée à un grand ensemble d'énoncés et de situations de lecture différentes. Bien au contraire, nous cherchons à défendre l'idée qu'une grille se forge en fonction de la situation de lecture concernée. Évidemment, il est nécessaire de disposer d'outils pour pouvoir la forger. Notre article souhaite justement apporter quelques éléments à cette fin.

Des capacités de lecture et d'écriture

Dans les réécritures qu'ils ont produites, les élèves ont fait preuve d'une plus grande richesse de lexique que celle qu'on leur attribue en général. Ce décalage ne serait-il pas dû au type de tâche inhabituel de notre expérimentation ? Les tâches de reformulation en mathématiques ne sont pas des tâches scolaires standards, et, lorsqu'elles concernent des énoncés de problèmes, elles le sont encore moins. Si on demande à un élève d'écrire un énoncé de problème, on lui demande de quitter sa position d'élève et de prendre celle du professeur. Les repères habituels ne fonctionnant plus, les élèves ont pu avoir recours à un vocabulaire et à des expressions qu'ils ne s'autorisent pas en tant qu'élèves, ou qu'ils ne croient pas autorisées dans les tâches habituelles comme la rédaction de démonstrations.

Les élèves ont montré qu'ils étaient le plus souvent capables de distinguer la consigne de la partie informative mais pas toujours de façon stricte. Des informations relatives aux données du problème peuvent rester attachées à la question car elles l'étaient dans le texte initial. En revanche, ils savent déplacer la question à la fin de l'énoncé et le font en majorité. Ils semblent même préférer cette place. Est-ce le résultat d'habitudes apportées par l'enseignement des mathématiques ?

L'impression qui se dégage des productions des élèves conduit à rejeter des jugements définitifs globaux du type “ils ne savent pas lire”. Les élèves manifestent des compétences mais aussi des préférences, ils sont sensibles à des variations rédactionnelles. Il semblerait que c'est plus la conjonction de difficultés ou d'usages inhabituels qui soit susceptible de gêner fortement la lecture qu'une seule caractéristique donnée. Nous avons d'ailleurs pu noter qu'une caractéristique de l'énoncé pouvait rejaillir sur d'autres. Des expérimentations en cours semblent confirmer cette impression.

Des variations au service de l'apprentissage

Se pencher sur l'influence de la rédaction des énoncés de problèmes de géométrie sur leur lecture par les élèves permet de prendre conscience de l'ampleur des variations possibles à disposition du concepteur d'énoncés. Il nous paraît important que les enseignants soient à même de jouer sur ces variations possibles en fonction de leurs objectifs. S'ils désirent ne pas soulever de difficultés spécifiques de lecture mais diriger le travail des élèves vers la résolution même, ils éviteront des structures syntaxiques complexes, un lexique inhabituel, des implicites sur le tracé, des conflits potentiels entre plusieurs figures de référence. S'ils cherchent à développer les compétences de lecture, ils joueront en sens contraire sur les variables citées.

Nous voudrions en effet souligner d'une part que l'apprentissage des mathématiques passe par l'apprentissage de la lecture et de l'écriture en mathématiques, d'autre part que ces deux types de compétences (production et compréhension) se développent en interdépendance. En conséquence, il s'avère, à notre avis, fructueux de concevoir des tâches nouvelles qui reposent sur cette dialectique entre lecture et écriture. Nous en avons utilisé certaines dans l'expérimentation rapportée ici. Par exemple, savoir rédiger "à la manière de" est une tâche héritée de nos collègues de français qui nécessite de repérer d'abord les caractéristiques rédactionnelles à plagier. Il s'agit bien là d'amener les élèves à décortiquer les énoncés de problèmes pour en comprendre le fonctionnement et par là le maîtriser. C'est une activité sur la langue en mathématiques (ce qui n'est pas sans plaire aux élèves, de par le sentiment de maîtrise de ce qui, d'habitude, est réservé aux enseignants, qu'elle suscite) mais qui engage le contenu mathématique. On ne peut changer l'ordre des informations dans un énoncé, sans prendre en compte les relations de dépendance entre objets du problème. On ne peut réécrire un syntagme nominal complexe décrivant un objet mathématique ("symétrique d'un point par rapport à une droite") sans comprendre la définition de cet objet. Voilà une occasion fructueuse pour les élèves de faire véritablement des mathématiques en jouant sur les mots.

RÉFÉRENCES

ARSAC, G. (1992) : "Le problème de la figure", *in* : *L'initiation au raisonnement déductif au collège* , Arsac G. *et al.* (eds) (pp. 167-175) Lyon : Editions IREM de Lyon et PUL.

CHEVALLARD, Y. (1991) "Autour de l'enseignement de la géométrie", *Petit x* , 27, 41-76.

DUVAL, R. (1991) : "Interaction des différents niveaux de représentation dans la compréhension de textes", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 136-196, Strasbourg : Editions de l'IREM.

GUILLERAULT, M. et LABORDE, C. (1985) : "A study of pupils reading geometry", *in* : *Pragmatics and Education,* Lowenthal F., Vandamme F. (eds.) (pp. 107-122) London et New-York : Plenum Press.

JULO, J., HOUDEBINE, J. *et al* (1990) : *Développer l'Activité de Représentation*, Rennes : IREM de Rennes.

NESHER, P. et TEUBAL, E. (1975) : "Verbal cues as interfering factor in verbal problem solving", *Educational Studies in Mathematics*, 6, 41-51.

PLUVINAGE, F. (1989) : "Aspects multidimensionnels du raisonnement géométrique", *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 2, ULP et IREM de Strasbourg, 5-24.

RAUSCHER, J.-C. (1993) : *L'hétérégonéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège,* Thèse de l'Université des Sciences Humaines de Strasbourg.

ROBERT, A. (1990) : "Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels", *Bulletin de l'APMEP*, n° 367, 55-62.

ROBERT, A. et TENAUD, I. (1989) : "Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminales C", *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.9/1, 31-70.

SEMADENI, Z. (1987) : "Verbal problems with missing, surplus or contradictory data", *Séminaire de l'équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble : Université Joseph Fourier.

WIRSZUP, I. (1976) : "Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry", *in* : *Space and Geometry*, (pp. 75-97) ERIC : Ohio.