REPERES - IREM. N° 33 - octobre 1998

VOIR ET RAISONNER : À LA CONQUÊTE DE L'ESPACE AU COLLÈGE

Claire BAYART, Claude GOS, Chantal HINDELANG,
Marie-Anne KEYLING, Claude MATHERN,
Monique ORTLIEB, Jean-Claude RAUSCHER,
Gabrielle ROESCH

IREM de Strasbourg

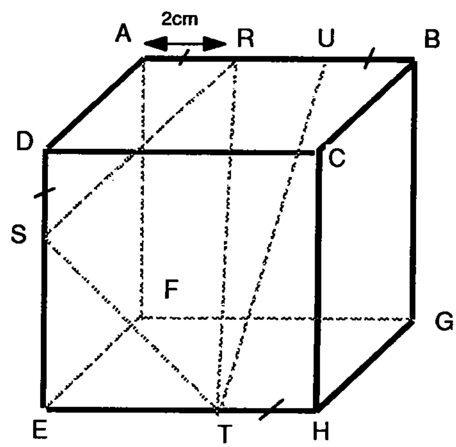
I. Enseigner la géométrie dans l'espace au collège : une question de temps disponible ?

Que faire au début du collège pour initier nos élèves à la géométrie dans l'espace ? Leur demander d'observer et de décrire des solides ? D'en réaliser les patrons ? De les représenter en perspective ? Le programme et les ouvrages scolaires nous invitent à pratiquer ces activités avec nos élèves. Mais cette pratique pose souvent un important problème de gestion du temps dans notre enseignement. En effet, nous sentons bien qu'il faut consacrer un temps non négligeable à ces activités pour qu'elles permettent à nos élèves de se familiariser efficacement avec l'espace. Mais de ce temps, bien souvent nous n'en disposons pas ou nous ne le donnons pas, surtout dans les premières années du collège. Ne serait-ce que parce qu'il semble en concurrence avec le temps consacré aux autres apprentissages comme par exemple celui laissé à la géométrie plane. Il reste alors peu de place à attribuer à la géométrie dans l'espace. D'ailleurs, elle se trouve souvent reléguée en fin d'année scolaire.

Pourtant, très rapidement, les élèves doivent être capables d'analyser les situations dans l'espace présentées par les exercices de 4^e et 3^e. Ces exercices se présentent généralement sous la forme d'un énoncé accompagné par une représentation de la situation en perspective. En voici un exemple tiré du chapitre “Théorème de Pythagore et applications” du livre de 4^e de l'IREM de Strasbourg [5]. Il est assez représentatif et permet une première description des compétences qui sont demandées aux élèves dans le cadre de la géométrie de l'espace. Nous proposons à nos lecteurs de l'exécuter avant de lire la brève analyse que nous en faisons.

Comme nous, peut-être auront-ils des surprises !

Problème 1



1° Représenter, comme ci-dessus, un cube dont l'arête mesure 5,5 cm.
2° Placer les points R, S et T sur les arêtes AB, DE et EH, tels que AR = DS = HT = 2 cm.
3° Calculer ST^2 et RS^2 (on admettra que le triangle RDS est rectangle en D).
4° Placer le point U sur l'arête AB tel que BU = 2 cm.
Quelle est la nature du quadrilatère BHTU ?
Utiliser alors le triangle TUR pour calculer RT^2.
5° Prouver que le triangle RST est rectangle.
6° Construire, au compas et à la règle, en vraie grandeur, les triangles ARD, RDS et RST.

Une analyse, même rapide, de cet énoncé nous laisse entrevoir les difficultés que les élèves devront surmonter pour réussir dans les tâches qui leur sont proposées. L'énoncé précise que le triangle RDS est rectangle en D. Au collège, l'élève n'est en effet pas censé savoir qu'une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à toute autre droite de ce plan. Soit ! Par contre, il n'y a aucune indication immédiate en ce qui concerne la nature du triangle RUT. L'énoncé incite à utiliser la propriété de Pythagore pour calculer le carré de RT. Mais la représentation donnée tend à piéger le regard de notre élève et des professeurs que nous sommes : sur la figure le triangle RUT semble rectangle en R. Pourtant, c'est l'angle en U qui est droit. La question qui demande de préciser la nature du quadrilatère BHTU peut désamorcer ce piège. Mais encore faut-il avoir compris que contrairement à ce qui se passe en géométrie plane, le fait de représenter une situation en 3D dans un plan en 2D se solde généralement par une perte d'informations accessibles à la vision. Par exemple, un angle droit n'apparaît pas nécessairement comme droit. Il faut ensuite savoir restituer ces informations par une représentation mentale en 3D de la situation représentée en 2D. Il s'agit de savoir repérer et se représenter un plan dans lequel on pourra réaliser une analyse fiable qui déjouera le piège tendu au regard. Ici, on doit faire le lien avec la question précédente (nature du quadrilatère BHTU) et considérer le plan ABHE dans lequel on peut situer le triangle RTU.

On voit sur cet exemple que, par rapport à la géométrie plane, la géométrie dans l'espace pose de nouveaux et redoutables problèmes à qui veut s'y aventurer.

II. La question de la progression

Comment préparer nos élèves à affronter ces difficultés malgré les contraintes de temps ? Comment les initier à l'analyse de situations dans l'espace ? On voit déjà, après cette brève analyse, qu'il ne s'agit peut-être pas seulement d'une question de temps consacré à cet enseignement. En effet, pour que le temps consacré à la géométrie dans l'espace en classe soit suffisant sans être dévorant, il faut qu'il soit efficace. Or, notre impression *a priori* concernant notre pratique dans ce domaine était surtout celle d'un manque de cohérence entre les différentes activités réalisées avec nos élèves. On leur faisait bien construire en début de collège des cubes, des pavés et des prismes droits pour les décrire et les observer, compléter des représentations en perspective parallèle, réaliser des patrons, etc. Mais pourquoi faire telles activités à tels moments ? Quels apprentissages en résultent ? Ces apprentissages se révéleront-ils utiles aux élèves pour faire face aux situations qu'on leur proposera en fin de collège ? Et comment les développer alors ? A de telles questions nous ne savions pas proposer de réponses réfléchies. Mais y répondre semblait une nécessité pour élaborer une progression cohérente tout au long des quatre années du collège et proposer à nos élèves des parcours d'apprentissage motivants et cohérents. Pour les définir, on peut dans un premier temps se référer au programme et à ses commentaires (chose qu'on a parfois tendance à oublier). Ils ont en effet le mérite de suggérer une progression en termes de contenus précis et de compétences visées. Mais dans un second temps, nous nous sommes rendu compte que, pour définir une progression, une analyse plus précise des tâches en jeu par l'observation des élèves en activité se révèle nécessaire. Commençons par rappeler ce que nous suggère le programme.

III. La progression esquissée par le programme : apprendre à voir pour apprendre à calculer et à raisonner.

Du point de vue des solides étudiés, le parallélépipède rectangle est "vu" en 6^e, le prisme droit et le cylindre de révolution en 5^e, la pyramide et le cône de révolution en 4^e et la sphère en 3^e. Au delà de ces contenus, le programme évoque et justifie aussi une progression en termes de compétences à développer tout au long des quatre années. Tout comme dans les apprentissages en géométrie plane, dans les apprentissages relatifs à l'espace, "voir" est indispensable. Mais comme nous l'avons constaté en analysant l'exercice proposé par le livre de l'IREM de Strasbourg, le regard est encore bien plus complexe dans la géométrie dans l'espace que dans la géométrie plane. Pour être pertinent, il demande à être éduqué. Le programme de collège subordonne donc les capacités de calculer et d'argumenter à celles de "voir dans l'espace". Les premières années du collège sont consacrées à apprendre à voir et à dégager les principales connaissances : "dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient ; elles fournissent un terrain pour dégager quelques propriétés élémentaires du parallélisme et de l'orthogonalité". Par la suite, en troisième par exemple, les élèves doivent savoir utiliser ces images mentales pour observer et argumenter en faisant appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme, sans toutefois que ces énoncés soient à expliciter par ces élèves. En fait, ils doivent surtout savoir utiliser ces images mentales pour faire des calculs en utilisant explicitement des outils tels que le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès dans des situations simples et uniquement à propos de travaux sur les solides. En fin de collège, les élèves devraient donc être capables d'analyser une situation de l'espace telle que nous l'avons vue à travers le problème 1.

Ainsi, les commentaires du programme esquissent une perspective pour la progression à mener : apprendre à voir dans l'espace pour apprendre progressivement à y calculer et y raisonner. Ils donnent même des indications plus précises pour entreprendre cette progression. En 5^e par exemple, les commentaires stipulent : “ Passer de l'objet à ses représentations constitue encore l'essentiel du travail... L'usage d'outils informatiques (logiciels de géométrie dans l'espace) peut se révéler utile pour une meilleure visualisation des différentes représentations d'un objet. Ces travaux permettront de consolider les images mentales déjà mises en place, relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité. ”

Analysons plus précisément encore les compétences en jeu dans le “voir” et le “raisonner” dans l'espace.

IV. Voir et raisonner dans l'espace pour résoudre un problème : quelles sont les compétences en jeu ?

Distinguer les différentes façons de communiquer aux élèves les données d'un problème permet déjà de décrire les tâches en jeu dans la géométrie tridimensionnelle et de repérer quelques modalités classiques d'enseignement. Nous en voyons quatre :

– Une première est de décrire la situation problématique uniquement par un texte. Elle suppose que l'élève est capable de se représenter en 3D la situation décrite et d'en donner une représentation en 2D.

– Une deuxième, la plus fréquemment rencontrée dans les manuels et dans les évaluations “classiques” (contrôle continu, brevet, etc.), est d'adjoindre au texte une représentation en perspective de la situation. Elle suppose que les élèves sachent “lire” ces représentations.

– Une troisième est d'adjoindre au texte une maquette ou un patron. Pour des raisons pratiques, elle ne se rencontre pas dans les livres mais seulement dans les activités menées en classe.

– Une quatrième est rendue possible avec les logiciels informatiques qui permettent de travailler sur un problème à partir d'une représentation en 3D qu'on peut faire virtuellement “bouger”.

Ces façons de livrer une situation problématique aux élèves ne sont pas équivalentes. Chacune d'elles induit des tâches de natures différentes. Nous allons à présent analyser celles qui entrent en jeu dans les deux premières présentations, c'est à dire celles par lesquelles en fin de compte les élèves sont en général “évalués”. Ceci permettra de situer la perspective trop partielle de certains efforts d'enseignement et de mettre à jour des aspects essentiels des compétences nécessaires pour aller à la conquête de l'espace.

a) Difficultés des problèmes présentés uniquement par un texte

Commençons par l'analyse des tâches à effectuer par les élèves dans le cas *a priori* le plus difficile, lorsque le problème de représentation de la situation est entièrement à leur charge. Voici des exemples extraits du manuel de 3^{e} *Maths*, IREM de Strasbourg [6].

Exemple 1 :
Un fin bâtonnet de 16 cm de longueur entre-t-il dans une boîte cubique de 10 cm de côté ?

Exemple 2 :
Une boule de pétanque en acier, de 75 mm de diamètre, a laissé dans le sable une trace de 72 mm de diamètre. A quelle profondeur s'était-elle enfoncée ?

Exemple 3 :
Lors d'un meeting aérien, quatre avions volent en formation. Chaque avion est à égale distance des trois autres. Leur altitude est alors de 800 m pour trois d'entre eux et de 1000 m pour le quatrième. Calculer la distance qui sépare deux avions. (D'après *Math sans Frontières*, Alsace, 1992).

Pour résoudre le premier problème, il est nécessaire de savoir se représenter les problèmes de distance entre des points à l'intérieur d'un cube. Par exemple, on doit choisir des sous-figures planes extraites de la situation en 3D qui permettent d'avoir une prise par la raison et par le calcul sur la question.

Pour résoudre le deuxième problème, il faut aussi savoir "entrer dans le solide" par des sections judicieusement choisies pour établir le lien entre le diamètre de la trace, le rayon de la boule et la distance du centre de la boule à la trace.

Par ces deux premiers exemples, on voit qu'une bonne représentation mentale des solides en jeu est nécessaire. La maîtrise de ces situations se manifestera d'ailleurs par la capacité des élèves à produire un dessin présentant les situations 3D sur une feuille, d'abord par une représentation en perspective, ensuite par la représentation de sous-figures planes extraites de l'objet.

Le troisième problème montre la difficulté de ces entreprises dans toute son ampleur.

Pour résoudre le troisième problème, l'élève saura placer trois points équidistants sur un plan, mais comment y faire entrer l'espace pour y faire figurer le quatrième point ? Comment représenter une situation en 3D sur une feuille ? Comme le montre l'épistémologie dans ce domaine, le problème n'est pas "mince" ! Représenter un objet 3D en 2D demande une compréhension et une maîtrise des règles qui régissent un mode de représentation. Et savoir réaliser un tel passage, c'est déjà avoir une représentation mentale opératoire de la situation.

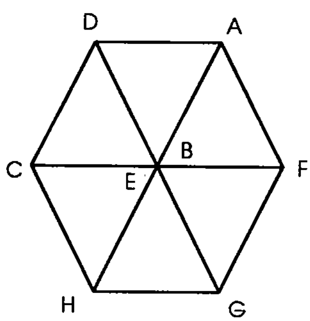
On comprend alors que les problèmes de géométrie de l'espace où aucune représentation ne vient accompagner le texte sont relativement rares dans les livres et posés plutôt en fin de chapitre, lorsque les connaissances ont été en principe assimilées. Pour résoudre les problèmes, l'élève a donc dans une majorité de cas une représentation en perspective à sa disposition. *A priori* on peut penser qu'il s'agit là d'une aide qui lui facilite le travail !

b) Les problèmes accompagnés d'une représentation en perspective de la situation sont-ils plus faciles ?

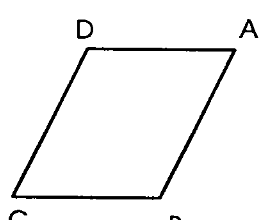
On peut le penser car l'élève a alors un support pour voir et raisonner. Mais il ne faut pas oublier les contraintes et les pièges occasionnés par le passage des objets tridimensionnels à l'une de leurs représentations bidimensionnelles.

La première difficulté est de voir qu'une figure représente bien une situation tridimensionnelle. Ce n'est pas toujours facile, même pour un oeil averti ; ainsi la figure de l'exemple 4 peut représenter un cube. L'inverse arrive aussi : certains élèves en début de collège appellent la figure de l'exemple 4' un carré, parce qu'ils imaginent un carreau vu en perspective.

Exemple 4

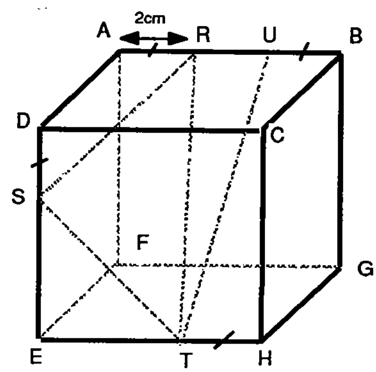


Exemple 4'



Ensuite il y a d'autres difficultés que nous avons déjà eu l'occasion de repérer à propos du problème 1. Pour situer ces difficultés, rappelons succinctement la teneur du problème et posons-nous quelques questions à son sujet.

Exemple 5 :



A partir de la figure ci-dessus, il s'agit de prouver que le triangle RST est rectangle en calculant ST^2, RS^2 et RT^2.

– Quelle est la nature du solide ABCDEFGH ? Il y a une première difficulté : un même dessin peut représenter plusieurs types d'objets. Ainsi présenté, il pourrait tout aussi bien s'agir d'un cube que d'un parallélépipède. Pour déjouer cette ambiguïté, il est nécessaire de préciser dans les hypothèses la nature de l'objet représenté (ce qui est fait dans l'énoncé initial de l'exemple 5). Mais signalons que, sans cette précision, le lecteur n'a aucun moyen pour trancher.

– La face DCHE est-elle la face avant ou arrière ? Il y a une autre ambiguïté classique sur l'orientation de l'objet représenté. Pour la lever, on recourt en général à l'usage de couleurs ou comme ici de pointillés. Mais même avec des pointillés, le lecteur peut encore voir tantôt un cube où

DCHE est une face avant, tantôt un cube où DCHE est une face arrière. Arriver à voir à volonté l'une ou l'autre de ces situations est d'ailleurs bon signe quant à nos capacités perceptives !

– Les triangles SRT et RUT sont-ils dans un même plan ? Une contrainte très forte de la représentation d'un objet 3D en 2D est de représenter une multiplicité de plans parallèles ou sécants dans un seul plan. Discerner ces plans à partir d'une représentation en perspective devient alors un problème.

– Quelle est la nature des triangles CBE et BFD ? Le triangle RUT est-il rectangle en R ? La représentation d'un objet 3D en 2D fixe nécessairement un point de vue qui donne une image insuffisante ou déformée de l'objet. Contrairement à la géométrie plane, l'accès aux informations n'est pas immédiat. Ce qui se donne à voir demande un traitement pour être confirmé ou infirmé. Il faut, par exemple, imaginer la situation vue sous un autre angle. Mais cela ne suffit pas. Il faut aussi savoir raisonner pour valider les hypothèses nées de ces changements de points de vue : par exemple établir que le triangle DFB est équilatéral parce que ses côtés sont des diagonales des faces du cube.

En conclusion, même si l'on est familier avec l'usage des représentations en perspective, on voit que les réponses ne sont pas immédiates. Un temps de réflexion et d'analyse est nécessaire. A ce sujet, J. Hubbard écrit :

"Nous ne voyons des objets sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà : un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau. Pour l'analyser il doit le voir bouger ou le regarder avec des lunettes stéréoscopiques." (*cf.* [3] cité dans [4])

Il apparaît donc clairement que le fait d'accompagner un problème par une représentation en perspective de la situation ne facilite pas décisivement le travail de l'élève, s'il n'a pas déjà intégré des images mentales de la situation, images sur lesquelles il peut efficacement opérer en les faisant bouger et en raisonnant à partir d'elles.

c) Voir et raisonner dans l'espace : les compétences à développer

La conclusion précédente peut paraître un peu désespérante : ne savent voir et raisonner dans l'espace que ceux qui ont à leur disposition des représentations mentales sur lesquelles ils peuvent opérer ! Le problème reste entier : comment aider les élèves à se fabriquer ces représentations ? Cette analyse des difficultés de quelques problèmes de 3D à propos de solides au programme du collège nous permet déjà de repérer de façon plus opératoire quelques conditions nécessaires (mais non suffisantes, surtout prises isolément) que doivent remplir les élèves pour qu'ils puissent surmonter ces difficultés. Ces conditions sont : connaître les règles élémentaires du dessin en perspective (conservation du parallélisme et des milieux), avoir compris qu'on ne peut comme en géométrie plane se fier à ce qui est vu sur le dessin et qu'une représentation en perspective se traduit par des pertes d'informations, enfin savoir qu'il est possible de restituer certaines informations en faisant bouger mentalement un objet 3D représenté en 2D, en raisonnant sur l'objet représenté ou en discernant les plans pertinents pour la résolution du problème.

V. Nos élèves savent-ils voir et raisonner dans l'espace : compte rendu d'une enquête

Dans quelle mesure les conditions du paragraphe IVc) étaient-elles *a priori* remplies chez nos élèves ? C'est ce que nous avons voulu savoir avant d'élaborer des stratégies d'enseignement. Pour cela, nous avons élaboré un test d'évaluation qui nous a permis de faire l'état des lieux au début de notre recherche. Cet outil devait permettre de voir si les élèves savaient représenter des situations dans l'espace et analyser les représentations de situations de l'espace dans le plan. Il devait aussi montrer si, de la cinquième à la troisième, on assistait à une progression des capacités visées ou au contraire à une stagnation. Cela était possible car nous avons fait passer ce test dans nos classes de 5^{e} (136 élèves) de 4^{e} (106 élèves) et 3^{e} (116 élèves). La population interrogée correspondait à des situations variées de recrutement d'un point de vue sociologique.

a) Les objectifs du test

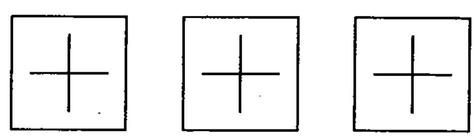
Le but était d'évaluer les compétences des élèves dans le domaine de la géométrie dans l'espace tels que nous venons de les décrire. Tout d'abord avec la question 1, il s'agit de savoir si les élèves savent produire ou compléter la représentation en perspective d'un cube en respectant les règles de ce genre de production. Dans les questions 2, 3 et 4 nous avons présenté plusieurs points de vue d'un même objet. Par ce procédé, nous avons cherché à savoir si les élèves savent qu'il ne faut pas se fier aux apparences d'une représentation, mais de faire bouger mentalement un cube ou d'en analyser les caractéristiques, soit à partir des faces, soit en discernant des plans sécants pour restituer certaines informations. La question 5 permet surtout de voir si les élèves savent discerner des plans dans une représentation en perspective.

Nous présentons ici une courte analyse des résultats que nous avons obtenus. Le lecteur intéressé par les résultats statistiques complets et plus de détails d'analyse pourra se référer à [2].

b) Analyse des résultats du test

Exercice 1 : Les élèves savent-ils produire ou compléter la représentation en perspective d'un cube en en respectant les règles ?

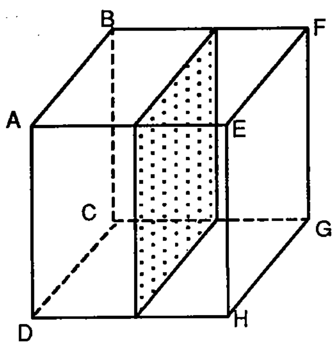
On a des étiquettes carrées sur lesquelles figure un signe +. Chaque étiquette a les mêmes dimensions que les faces d'un cube. On colle ces étiquettes sur les faces du cube.

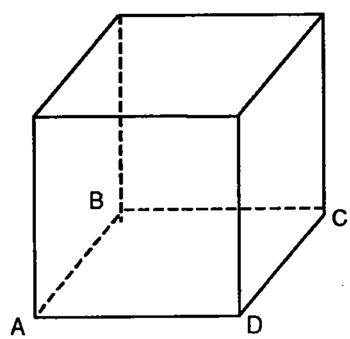


Dessine ce cube de façon à voir 3 faces munies de leurs étiquettes.

Nous avons observé que le dessin des croix est bien moins réussi que celui du cube (27% de réussite pour les croix contre 78% pour le cube en 4). Cela montre que la réussite du dessin du cube ne signifie pas que les règles de la perspective parallèle sont connues et encore moins maîtrisées. On peut penser qu'il s'agit surtout de la reproduction de dessins déjà vus antérieurement (éventuellement appris sur quadrillage). Beaucoup d'élèves représentent les croix sur les faces latérales du cube telles qu'elles seraient vues sur la face avant du cube. Les règles de conservation du parallélisme et des milieux ne sont pas appliquées. A noter qu'en troisième, 60% des élèves testés n'ont pas encore assimilé ces règles.

Exercice 2 : Les élèves savent-ils déterminer et imaginer les mouvements d'un cube à partir de représentations en perspective ?





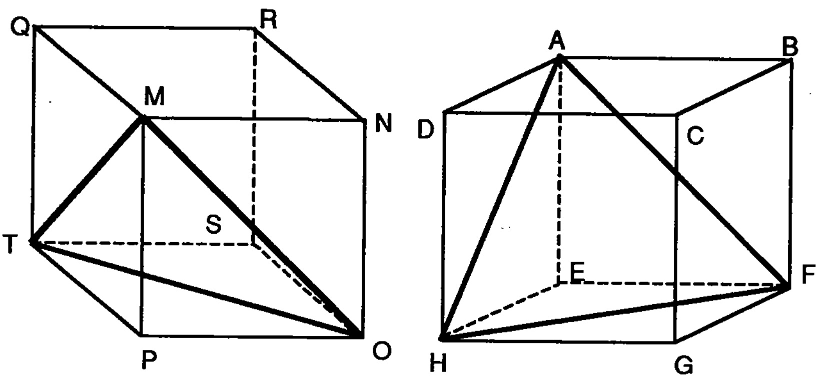
On a tourné le cube.
Replace les sommets manquants et dessine la partie grisée sur le nouveau cube.

Nous avons obtenu un bon taux de réussite de la cinquième à la troisième (85 à 91% pour le placement des sommets et 61 à 78% pour la position du plan). Cela est vrai, dans une moindre mesure, pour la deuxième question. Peut-on, pour autant, penser que les élèves ont bien imaginé la rotation du cube ? Ce n'est pas sûr car certains indices permettent de résoudre la question sans "voir" la rotation en jeu, par exemple en raisonnant uniquement sur la désignation des faces et des arêtes. Le taux élevé de réussite à cet exercice ne témoigne donc pas de façon incontestable de la capacité des élèves à faire bouger mentalement une représentation du cube dans l'espace. Les exercices suivants nous ont apporté davantage de précisions à ce sujet.

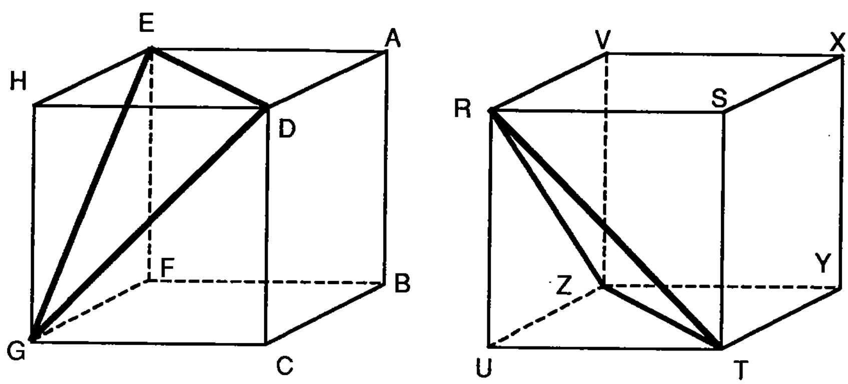
Exercices n°3 et n°4 : Les élèves sont-ils capables de "Voir" des triangles identiques dans des cubes représentés sous des points de vue différents ?

Les deux cubes ci-dessous ont la même dimension.
Dans chacun d'eux, on a dessiné un triangle.
Dominique dit : "Le triangle AHF et le triangle MOT sont identiques".
Claude dit : "Les triangles AHF et MOT sont différents (n'ont pas les mêmes dimensions)."

A ton avis, quel enfant a raison ? Pourquoi ?



Les deux cubes ci-dessous ont la même dimension.
Dans chacun d'eux, on a dessiné un triangle.
Benoît dit : "Le triangle DGE est isocèle, le triangle RZT est quelconque."
Paul dit : "Les triangles DGE et RZT sont tous les deux équilatéraux."
A ton avis, quel enfant a raison ? Pourquoi ?



Nous avons obtenu un fort taux d'échec et peu de progrès de la cinquième à la troisième (75%, 74% et 68% d'échec respectivement en 3^{e}, 4^{e} et 5^{e}). Les productions des élèves montrent qu'une majorité d'entre eux a effectivement traité les dessins comme des figures planes : ils se fient à l'aspect des triangles ou mesurent les longueurs de leurs côtés. Ainsi, à propos de l'exercice 3 voici quelques réponses représentatives :

"C'est Claude qui a raison car le triangle AFH est plus grand que le triangle MOT"

"C'est Claude qui a raison car le triangle MOT est un triangle rectangle et le triangle AFH est équilatéral ; ils ne peuvent pas être identiques"

Ou à propos de l'exercice 4 :

"Benoît a raison car ED = 2,2 cm,

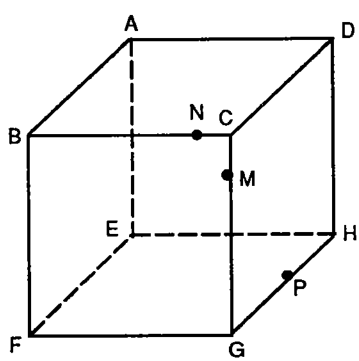
EB = DG=5,5 cm donc le triangle EDG est isocèle en G. Le triangle RZT est quelconque car RZ = 3,5 cm RT = 5,5 cm, ZT = 2,4 cm"

"Aucun des deux n'a raison parce que EDG n'est pas isocèle ni équilatéral" (sur la figure la présence d'arcs de cercle montre que l'élève a utilisé un compas pour comparer les longueurs des côtés).

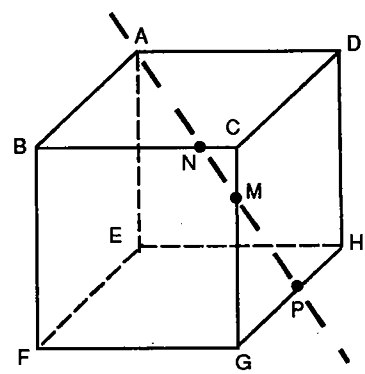
Les représentations données et les textes qui les accompagnent (*"les deux cubes ci-dessous ont la même dimension"*) ne conduisent pas forcément les élèves à traiter d'une situation de l'espace : ils traitent une configuration plane. Et cela se confirme par leurs réponses à l'exercice 4.

Pour les élèves qui imaginent en revanche un cube qu'on fait bouger, on remarque que, les mots "isocèles" et "équilatéraux" ont provoqué une analyse plus fine de la situation. Les justifications font appel plus souvent aux *"diagonales des faces du cube"* que dans l'exercice 3 où on trouve plutôt des formules plus lapidaires du type *"on a tourné le cube"*.

Exercice 5 : Les élèves savent-ils discerner des plans dans une représentation en perspective ?



Ce dessin représente le cube ABCDEFGH.
Le point M est un point de l'arête [CG], le point N est un point de l'arête [BC], et le point P est un point de l'arête [GH].



La droite (AM) a été tracée dans le cube ABCDEFGH.

Le dessin ci-dessus représente cette nouvelle situation.

Certains élèves s'interrogent devant ce que représente ce dessin :

*Paul dit : **Cette droite (AM) passe par le point P."***
A ton avis a-t-il raison ? *OUI* *NON* *J'HESITE*
Marie rétorque : ***"Mais non, c'est la droite (NM) qui passe par P."***
A ton avis a-t-il raison ? *OUI* *NON* *J'HESITE*
Julien veut mettre tout le monde d'accord et dit : ***"De toute façon, les droites (AM) et (NM) sont dans le cube une et une seule droite."***

A ton avis a-t-il raison ? *OUI* *NON* *J'HESITE*
Hinda intervient : ***"Mais non, vous vous laissez tromper par le dessin, les deux droites (AM) et (NM) sont différentes et aucune ne passe par P."***
A ton avis a-t-il raison ? *OUI* *NON* *J'HESITE*
Et toi, quel est ton point de vue ? Pourquoi ?

Le but de cet exercice est de tester les élèves sur leur capacité à repérer à partir de cette représentation que dans la réalité la droite AM ne peut pas passer par N, ni par P.

Si les exercices 3 et 4 pouvaient être résolus par l'analyse des faces du cube, dans l'exercice 5, il faut savoir repérer que la droite AM n'est contenue dans aucun des plans correspondants aux faces du cube mais dans le plan AEGC "coupant" le cube, laissant de côté les points P et N.

L'analyse des réponses de nos élèves fait apparaître trois catégories :

– Les élèves qui n'avaient aucun doute :*"Les points A, M, N, P sont alignés"*. Ces élèves traitent la figure en dimension 2. Ils sont de loin les plus nombreux.

– Les élèves, peu nombreux, qui ont su discerner que ce qui apparaît sur la représentation comme une droite passant par A, N, M et P peut dans la réalité en 3D recouvrir des situations bien différentes. Mais ils ne se sont pas forcément tenus au fait qu'il était indiqué dans l'énoncé que c'est la droite AM qui a été représentée. Voici quelques avis représentatifs de cette catégorie :

"Ils se laissent tout simplement tromper par le dessin, les deux droites sont différentes, aucune ne passe par P"

"Je crois que c'est une droite et qu'elle passe par A et P, mais comme c'est un cube en perspective, ça nous trompe, elle ne passe pas par M et N"

– Les élèves qui, après avoir pris connaissance des avis de Marie, Julien, Paul et Hinda, ont bien compris la nature du problème didactique que nous nous posions. Voici une réponse donnée :*"Je me demande si on doit répondre aux questions par rapport à la réalité ou au dessin"*.

En conclusion

Le verdict est clair. Si l'exercice 1 nous montre des élèves qui savent assez souvent représenter des situations de l'espace (mais peut être de façon stéréotypée), les réussites aux exercices 3, 4 et 5 restent faibles de la cinquième à la troisième. Les élèves en regardant une figure en dimension 2 ne sont pas habitués à imaginer l'objet et à raisonner sur l'image mentale de cet objet. Ils la traitent comme une figure plane et non comme une représentation d'un objet de l'espace. Les images mentales qui permettent d'interpréter les représentations ne sont pas constituées. Notre analyse donne une idée des différentes appréhensions des représentations dans l'espace par les élèves :

Premier type d'appréhension : La représentation en 3D est prise comme une situation en 2D au premier degré ! L'élève colle à la réalité du dessin et ne fait pas le lien avec la situation en 3D.

Deuxième type d'appréhension : L'élève distingue la réalité de la représentation et la réalité de l'objet représenté. Mais on peut distinguer différents degrés de perfectionnement :

– L'élève a compris que la représentation est différente de la réalité mais ne produit aucune analyse pour faire le lien. Il se contente de dire que l'objet en réalité est différent de ce qui est donné à voir sur la représentation.

– L'élève est capable de lier la représentation avec l'objet réel par des analyses faites à partir des faces du solide.

– L'élève est capable de lier la représentation avec l'objet réel par des analyses faites non seulement à partir des faces du solide mais en imaginant des sections du solide non matérialisées sur la représentation.

Troisième type d'appréhension : L'élève sait non seulement faire une entrée en 3D à partir de la représentation en 2D mais aussi établir des faits en raisonnant à l'aide de propriétés de l'espace (orthogonalité et parallélisme dans l'espace par exemple).

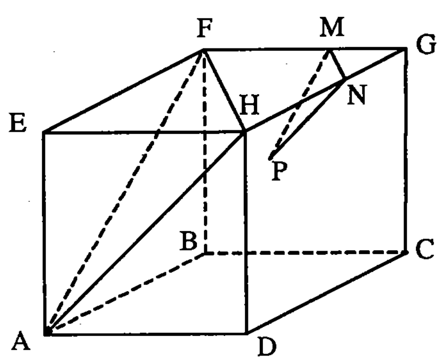
C'est au deuxième type d'appréhension que le collège devrait raisonnablement mener un maximum d'élèves afin qu'ils puissent développer plus explicitement les démonstrations au lycée. Quelles sont les stratégies d'enseignement qui permettront cela ? C'est la question que nous allons aborder maintenant en présentant nos propositions.

VI. Voir et raisonner dans l'espace : les stratégies d'enseignement

L'analyse des résultats du test met à mal une idée qui préside parfois à nos efforts, en l'occurrence maladroits, d'enseignement : **Il ne suffit pas d'enseigner le code de lecture et d'écriture des représentations en perspective.**

Même si de nombreux élèves arrivent à représenter un solide tel que le cube et ses faces en perspective, ils n'arrivent pas pour autant à traiter une représentation de l'espace en faisant le lien avec la dimension 3.

M.-P. Rommevaux [4] et A. Chevalier [1] nous montrent le piège tendu par un effort d'enseignement prioritairement et uniquement axé sur l'apprentissage des règles de représentation en perspective. Ces règles, comme par exemple la conservation du milieu et du parallélisme, relèvent de la géométrie plane et du coup les élèves traitent les représentations comme des figures planes comme sur l'exemple suivant :



Production d'élève pour le dessin de la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à AFH passant par le point M de l'arête FG.

Cet exemple montre bien que ce n'est pas par la connaissance *a priori* du code de lecture et d'écriture des représentations en perspective que l'élève développera sa connaissance des situations en 3D. Il est nécessaire que dans sa phase d'apprentissage, l'élève ait à sa disposition, non seulement une représentation, mais aussi une maquette de la situation, maquette qu'il pourra faire bouger à sa guise.

C'est dans l'interaction entre la représentation et la maquette manipulable que l'élève pourra développer des représentations mentales. Pour favoriser cette interaction entre maquette et représentation, il faut développer la capacité à repérer et à représenter en vraie grandeur des sous-figures planes.

C'est en sélectionnant des sections des solides que l'on peut analyser plus précisément la nature de certaines relations entre les éléments de la situation (orthogonalité, parallélisme ou égalité de longueurs par exemple). Cet aspect nous rend attentifs aux variables à prendre en compte pour les maquettes proposées aux élèves. Un cube peut se présenter sous différentes formes :

– une maquette pleine et opaque,
– une maquette "découpée" par des sections, notamment par assemblage de deux prismes droits ayant pour bases des triangles rectangles isocèles,
– une maquette creuse où seules les faces, transparentes ou non, sont matérialisées,
– une maquette squelettique où seules les arêtes sont matérialisées (par des tiges soudées par exemple).

Le choix effectué permettra ou non certaines actions matérielles (manipulations, découpages, dessins, projections) qui détermineront les appréhensions possibles. Une maquette opaque et pleine par exemple rendra difficile la perception d'un triangle situé "à l'intérieur" du cube. En revanche une maquette "fil de fer" ou transparente autorisant le dessin permet de repérer, de confirmer ou d'infirmer une conjecture sur la nature d'un tel triangle.

Finalement, les activités que l'on proposera aux élèves se déploieront autour de trois registres figuratifs :

– Les objets tridimensionnels (maquettes)
– Leurs représentations en perspective
– Des représentations de sous-figures planes des objets considérés.

C'est la pratique des passages d'un registre à l'autre qui permettra aux élèves de se constituer leurs représentations mentales dans l'espace et d'acquérir progressivement les compétences en jeu.

Dans la brochure IREM [2], nous présentons une série d'activités échelonnées de la sixième à la troisième qui, à notre avis, permettent aux élèves de se construire des représentations des objets étudiés. Nous en faisons ici un résumé succinct illustré de quelques exemples d'exercices.

– En sixième, il s'agit d'introduire la représentation en perspective. Nous centrons les activités sur les maquettes de cubes. Nous les utilisons pour préciser le vocabulaire et faisons réaliser leurs propres modèles aux élèves à l'aide de patrons ; puis, à l'aide d'une maquette "squelettique" (éventuellement projetée au tableau), nous leurs faisons découvrir les règles de la représentation en perspective.

Enfin, nous proposons des exercices sur le passage de la maquette (ou du patron) à la représentation en perspective : coloriage de faces, placement de figures sur les faces. (Par exemple, l'exercice 1 du test et l'exercice présenté en annexe 1.)

– En cinquième, les activités ressemblent à celles de sixième, mais concernent la construction et la représentation de prismes droits. (Par exemple, on demande de reconnaître la hauteur dans une série de représentations en perspective de prismes droits, *cf.* annexe 2). On y adjoint des constructions de maquettes de cylindre.

– En quatrième, nous voulons amener les élèves à dépasser les apparences de la représentation en perspective des solides pour déterminer les propriétés réelles de l'objet représenté. Nous proposons des exercices basés sur l'étude des sous-figures du cube comme dans l'annexe 3. En outre, nous faisons déterminer la nature de tous les triangles ayant pour sommets, trois sommets du cube.

– Enfin, en troisième, nous préconisons une construction d'une maquette de sphère tiré de [5].

Nos activités font principalement appel à des techniques de "travaux manuels". Nous n'avons pas proposé d'activités utilisant des logiciels de construction parce que nous ne disposons pas d'un équipement informatique suffisant pour mener une expérimentation avec nos élèves. L'utilisation d'un logiciel comme par exemple Géospace contribuerait certainement à développer le "voir" dans l'espace chez nos élèves.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CHEVALIER, *Analyse du problème SEC. Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace*, Edition IREM-USTL, Montpellier, 1989.

[2] GROUPE COLLEGE DE STRASBOURG, *Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège*, Brochure IREM, Strasbourg, 1997.

[3] J. HUBBARD, Entretien réalisé par E. NOE, retranscrit dans *POUR LA SCIENCE*, n°153, juillet 1990, pp. 6-8.

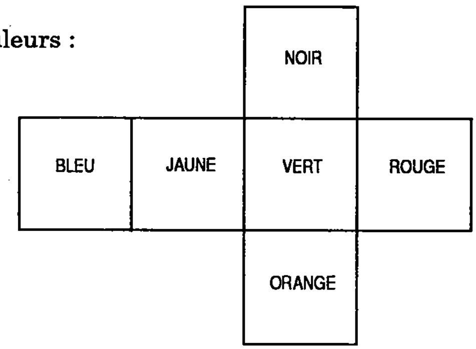
[4] M.-P. ROMMEVAUX, "Le premier pas dans l'espace", *in Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, vol 4, IREM de Strasbourg 1991, pp. 85-123.

[5] IREM-STRASBOURG, *Maths 4^e^*, Hachette-Istra, 1992.

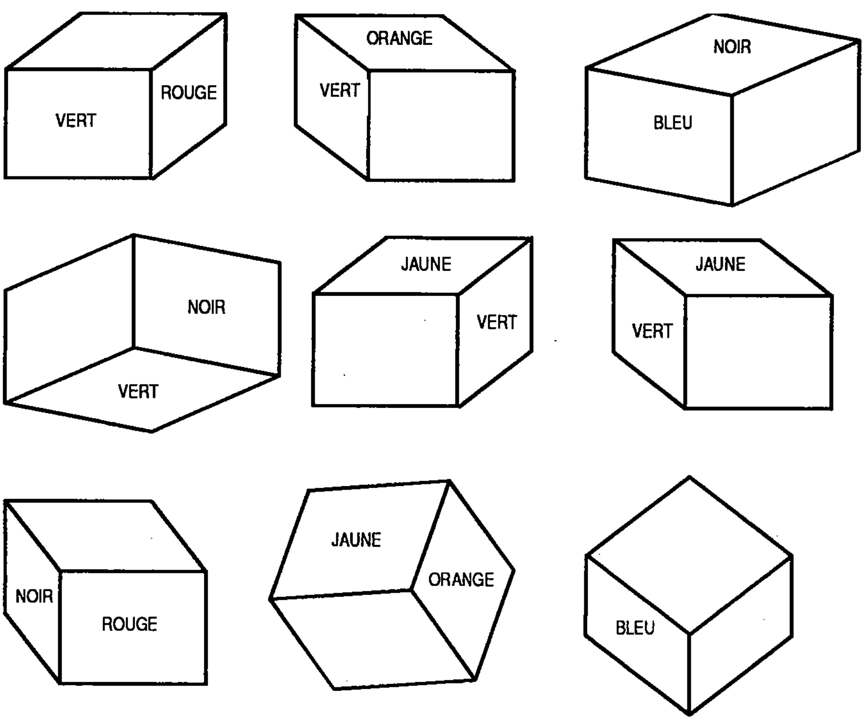
[6] IREM-STRASBOURG, *Maths 3^e^*, Hachette-Istra, 1993.

ANNEXE 1 : CUBE COULEUR

Voici le patron d'un cube avec ses couleurs :



Ce cube est représenté 9 fois en perspective.
Trouver sur chaque représentation la couleur qui manque.

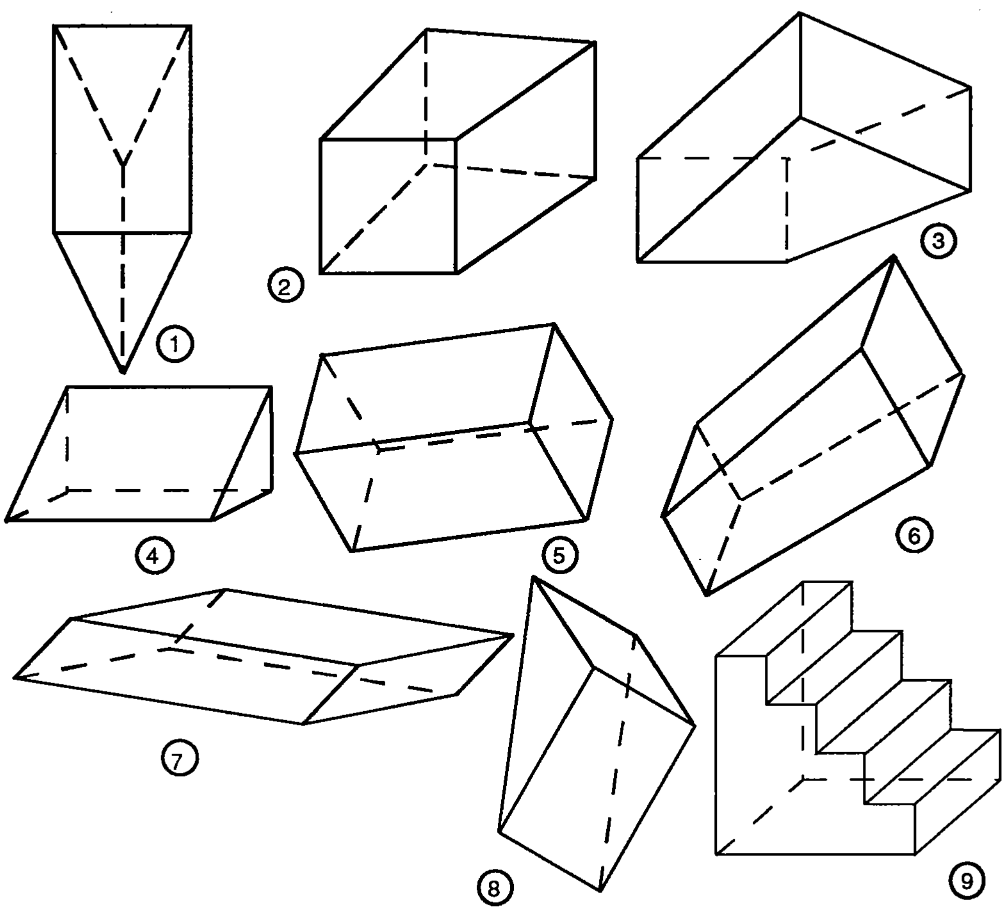


NB : Dans cette activité les élèves sont invités à utiliser leurs crayons de couleur.

ANNEXE 2 :
RECONNAITRE LA BASE ET LA HAUTEUR D'UN PRISME DROIT

Voici des représentations de prismes droits.

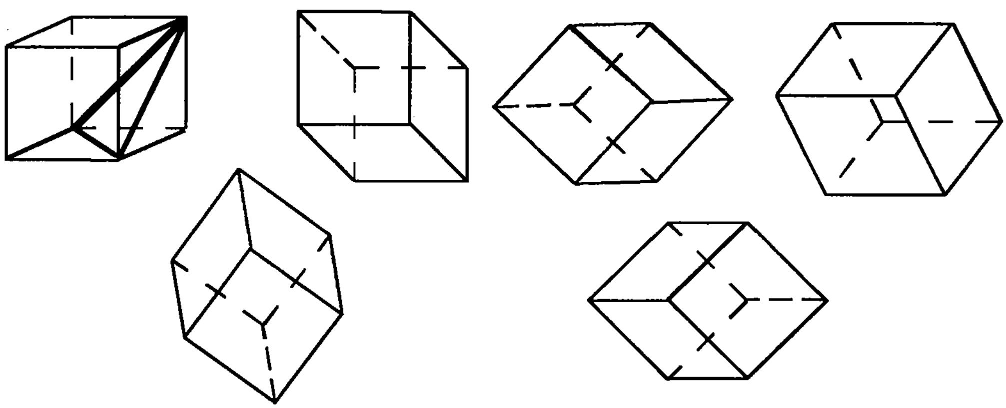
Sur chaque prisme colorie en rouge une base et en bleu une hauteur.



ANNEXE 3 : SITUATION 2

Voici la représentation en perspective d'un cube avec le dessin d'un triangle.

Sur chacun des 5 cubes suivants, dessine un triangle superposable au triangle dessiné sur le premier cube.



Explique ce que tu fais pour dessiner un tel triangle.