Notes de voyage

POINTS DE VUE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Gérard KUNTZ
IREM de Strasbourg

A l'invitation du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, j'ai participé au 21^{e} congrès de cet organisme, tenu à l'université Lakehead de Thunder Bay (Ontario), au bord du lac Supérieur. A la fine fleur des didacticiens Canadiens s'étaient joints des représentants de plusieurs autres pays : Etats-Unis, Australie, Singapour, Israël, Italie, Botswana et France. De plus, quelques personnes présentes avaient une bonne connaissance de l'enseignement des mathématiques en Pologne, au Niger et à Madagascar.

Plusieurs thèmes ont retenu mon attention : ils apportent des éclairages nouveaux et des confirmations. Voici les aspects essentiels de cette rencontre.

1°) La crise des programmes et des contenus des mathématiques scolaires

Un atelier y fut consacré, neuf heures durant. Un rapide tour du monde confirma l'universalité de la crise : *des changements de programmes, fréquents et profonds affectent la plupart des pays du monde.* La situation se complique au Canada, parce que les programmes sont établis par chaque province : ils diffèrent de la Nouvelle Ecosse à la Colombie Britannique. Le contraste n'est qu'apparent avec la France centralisée : enseigne-t-on les mêmes mathématiques dans un collège du centre d'une grande ville et dans un collège de banlieue ?

Quelques constantes sont aisément repérables :

a) la forte demande d'éducation (enseignement de masse) *conduit à une réduction constante des objectifs*. Cette évolution est aggravée par *le fossé entre les mathématiques décrites dans les programmes, celles qui sont vraiment enseignées et enfin celles qui sont sujet d'évaluation*. La situation est particulièrement inquiétante en Ontario, où l'absence de politique éducative claire et le manque de compétence (et d'intérêt) des autorités ajoute à la confusion. Tout choix éducatif a une composante politique et budgétaire. Il est souvent difficile de se faire entendre dans ces domaines.

b) Le contre-exemple de Singapour, où les contenus sont ambitieux et les niveaux des étudiants très élevés, souligne *la dimension culturelle du problème* : la société toute entière vit dans un climat d'intense compétition. Les familles ont compris que pour "gagner", il faut un haut niveau de compétence scolaire. De ce fait, la motivation de la plupart des élèves est extrême. Le stress auquel ils se soumettent pour réussir atteint, lui aussi, un niveau inimaginable en Amérique du Nord et en Europe...

c) Des groupes minoritaires d'enseignants tentent de rénover les contenus et les pratiques. Ils se heurtent à de fortes résistances de la part de nombreux enseignants découragés et démobilisés par l'ampleur des problèmes qu'ils rencontrent dans leur pratique quotidienne.

d) Partout se pose le problème *des fortes minorités d'élèves "en échec"*. Le passage de l'enseignement secondaire à l'université entraîne de nombreuses difficultés. On ne sait pas remédier à ce gâchis de manière convaincante.

e) *L'enseignement par "résolution de problèmes (problem solving)" et par "activités" se généralise* (au moins dans le discours). Cela ne se fait pas sans hésitations : quelle ampleur donner à ces activités ? Quel équilibre établir avec le cours ? Un élève "actif" fait-il nécessairement des mathématiques ? Est-il raisonnable de ramener l'enseignement des mathématiques à la seule étude d'une suite de situations-problèmes riches et complexes ? Le même vocable recouvre des conceptions totalement différentes et parfois incompatibles. Parfois, il ne traduit aucune pratique effective : certaines enquêtes ont conclu que, malgré les discours incessants, 70% d'étudiants ne résolvent pas de problèmes !

e) L'Australie a introduit dans l'enseignement une pratique intéressante : *10% du temps d'enseignement est consacré à un travail de synthèse* sur un sujet proposé aux étudiants à partir d'une liste de sujets très variés. Voici un exemple, à la frontière du lycée et de l'université. Un tableau à double entrée en définit les contours. Arithmétique, géométrie, trigonométrie, géométrie analytique, algèbre, probabilités, analyse, logique constituent une entrée classique et sans surprises. La seconde entrée enrichit la perspective : mathématiques pures, informatique, histoire, sciences en général, arts et design, problèmes de société, monde des affaires. Voici quelques thèmes qui en découlent : lois de Kepler, séries de Fourier et harmoniques en musique, validité des arguments en faveur des différents systèmes électoraux, calculs financiers, paradoxes des géométries non euclidiennes, etc.

On retrouve là une excellente idée, qui a cours en seconde année de BTS en France :

REPERES - IREM . N° 30 - janvier 1998

les étudiants y préparent, parallèlement aux enseignements classiques, un thème de fin d'études qui traverse toute l'année. Le sujet, vaste et ambitieux, est traité dans l'esprit d'un travail en entreprise. Il mobilise des connaissances multiples et oblige les étudiants à puiser leurs outils dans des domaines habituellement cloisonnés. Le travail est réparti entre trois ou quatre étudiants qui apprennent à gérer la (longue) durée et à travailler ensemble. L'évaluation finale est faite par des enseignants et des responsables d'entreprises.

L'apparition (surprenante) des TIPE (travaux d'initiative personnelle encadrés) dans les classes préparatoires aux grandes écoles relève des mêmes préoccupations : il est caricatural de sélectionner les futurs ingénieurs uniquement par des épreuves en temps limité portant sur des connaissances ressassées deux ans durant. Les TIPE introduisent la longue durée, la recherche documentaire ou en entreprise et surtout *l'initiative*, qualité essentielle pour de futurs cadres. Mais cette épreuve est tellement en rupture avec l'esprit habituel des concours qu'on trouvera sans doute une parade pour la neutraliser...

La crainte ne relève pas du mauvais esprit : dans la défunte option informatique des lycées, le programme était appliqué, au cours du troisième trimestre, à un sujet de synthèse qui amenait la plupart des élèves à des travaux remarquables, très au-delà des habituelles performances scolaires. C'est pour cela, sans doute, que cette option (sous sa première forme) a été supprimée...

Curieuse idée de confiner, en France, des pratiques qui ont fait leurs preuves et qui préparent à la vie en entreprise, dans des secteurs très limités de l'enseignement.

f) *La technologie (calculatrices et ordinateurs) a déstabilisé de façon durable l'enseignement des mathématiques.* Dans la plupart des pays représentés, on est loin d'avoir maîtrisé le déferlement de l'outil informatique qui modifie profondément les relations des élèves et des enseignants, ainsi que leur rapport au savoir. Il m'a cependant semblé que, si le sujet est universellement évoqué, *la pratique effective reste le fait d'une faible minorité d'enseignants* (alors qu'elle touche la quasi-totalité des élèves). On sent nettement les tensions, les inquiétudes, le sentiment d'être dépassé de beaucoup d'enseignants et leur scepticisme fondamental quant à l'intérêt de l'outil informatique.

Ce sujet va peser longtemps encore sur l'enseignement des mathématiques, avant qu'un équilibre ne soit trouvé : les travaux, souvent remarquables, entrepris et publiés en France, peuvent contribuer à tracer des voies hardies mais réalistes vers l'intégration de la technologie à l'enseignement.

g) Un regret majeur face à ces riches échanges de vue : certaines questions premières, posées avec insistance, ont été “oubliées” de façon répétées, au cours des débats. Avant de définir des programmes, des contenus et des méthodes, il serait utile (indispensable) de préciser le projet éducatif auquel ils répondent : qui veut-on former ? Des ingénieurs ou des citoyens responsables ? Des utilisateurs occasionnels de mathématiques ou des chercheurs ? Quels sont les qualités que la vie économique attend des scientifiques et des techniciens ? Quand ces questions sont posées (elles sont fondamentales) les réactions sont les mêmes partout dans le monde : on les qualifie d'importantes, puis on passe “aux choses sérieuses” ! Il est vrai qu'il est plus aisé de répondre au "comment" qu'au "pourquoi" (et pour qui). *Il est amusant de constater qu'à Strasbourg, Paris et Thunder Bay, les fuites ont même allure.*

h) De nombreuses propositions ont été faites pour aménager les programmes, pour augmenter la qualité de l'enseignement et la réussite des élèves. Elles ne diffèrent pas sensiblement des propositions qu'ont peut lire en France sur le même sujet. Mais une remarque très importante a été opposée à cette frénésie de changement. *L'institution scolaire a des lois d'une rigueur implacable.* Beaucoup de sociologues de l'éducation se sont attachés à les mettre en évidence à travers le monde (Chevallard a été cité comme l'un des promoteurs de cette prise de conscience). On peut les ignorer, mais on se condamne alors à opérer des changements aléatoires, sans efficacité véritable. Une des lois du système éducatif peut se formuler ainsi : *dans l'enseignement, il faut des résultats rapides et faciles à évaluer.* Tout ce qui ne va pas dans ce sens a peu d'avenir. Débat scientifique, thèmes de fin d'année, travaux en groupes, travaux interdisciplinaires, de telles pratiques sont certes saluées avec respect, mais marginalisées dans des secteurs qui font "vitrine" (ateliers de pratique scientifique, PEA, etc.) à la marge du système. On sacrifie ainsi la formation en profondeur des étudiants sur l'autel des statistiques d'examen. N'est-ce pas ainsi que les choses se passent en France ?

2°) L'enseignement au moyen du débat scientifique

L'une des conférences plénières a été prononcée par Raffaela Borasi, une didacticienne travaillant à Rochester aux Etats-Unis (N.Y.). Son titre "What does it really mean to teach mathematics through inquiry" est trompeur. Sa démarche correspond à ce que Marc Legrand appelle le "débat scientifique".

Son point de départ est la remarque suivante : *dans la vie professionnelle, on est rarement (pratiquement jamais) face à des problèmes bien définis, auxquels on pourrait appliquer des méthodes mathématiques clairement répertoriées pour les résoudre. La plupart du temps, la tâche à réaliser se présente de façon vague et informelle, comme "situation-problème".*

Pour illustrer le propos, une vidéo fut projetée, réalisée en formation d'enseignants, sur la notion de pavage d'une partie de plan. Les débats montrent que les participants prennent peu à peu conscience des nombreux problèmes cachés dans l'énoncé informel (problème des bords, répétition "à l'infini" du motif, etc.) La place capitale des enseignants animant le débat apparaît à l'évidence : éviter l'enlisement, relancer le débat par une question, souligner la complexité d'une situation, tout cela ne s'improvise pas. La maturité des animateurs est capitale pour le succès de l'entreprise.

Le pari de Raffaela n'est pas éloigné de celui de Marc Legrand : *on gagne en compréhension et en autonomie en affrontant les questions profondes et difficiles contenues dans les mathématiques enseignées.* La perte d'efficacité initiale par rapport à un cours classique est ensuite compensée par une compréhension en profondeur des notions, qui fait de l'étudiant un scientifique (contrairement à ceux qui récitent des cours non maîtrisés et qu'on évalue sur des problèmes balisés et répétitifs).

Comme en France, l'accueil des auditeurs fut poli et intéressé, sans plus (souffrez que je vous admire et ne vous imite point !). Cette démarche se heurte en effet à de nombreux obstacles : il faut des enseignants de grande maturité maîtrisant bien leur discipline (des questions inattendues peuvent déstabiliser...) ; cette façon d'enseigner ne produit de résultats qu'à moyen et long terme, alors que l'institution en exige de rapides. Des phénomènes de rejet sont apparus de la part d'étudiants soumis à ces démarches, en totale rupture avec leurs habitudes. Des enseignants associés par Raffaella à l'expérience y ont mis fin, brutalement devant le "manque de résultats" (ou leur propre angoisse ?) !

Il est intéressant de voir que dans différents pays du monde, de façon indépendante (Raffaella ne connaissait pas le travail de Marc Legrand), des démarches voisines sont mises en œuvre pour sortir l'enseignement des mathématiques de certaines ornières. Ces approches, nécessairement coûteuses, suscitent partout de vives résistances : elles demandent une remise en cause trop profonde pour une grande majorité d'enseignants. D'où leur malaise : ils ressentent les profondes lacunes de leur enseignement (en ce qui concerne les buts ultimes, l'utilité sociale, les programmes, les méthodes), mais hésitent (répugnent) à le remettre véritablement en cause, de peur d'être durablement déstabilisé. La crise a de beaux jours devant elle !

3°) Apprendre des mathématiques en résolvant des problèmes (très) consistants

Professeur à l'université de Kingston en Ontario, Peter Taylor a introduit sa conférence par les remarques suivantes : "Les manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire se concentrent de façon restreinte sur des habiletés techniques et reflètent bien peu la vitalité de la recherche. Je reproche aux universités leur manque d'imagination pour rendre vivantes les mathématiques du secondaire". Sa démarche consiste à bâtir une famille de problèmes recelant de riches contenus d'apprentissage. "Ces problèmes ne sont pas destinés à être insérés dans le programme à titre d'exemple. *Ils sont le programme*".

La brochure présentée couvre un an et demi d'enseignement en fin de cycle secondaire ("a senior high school mathematics textbook IN PROCESS" Taylorp@post.queensu.ca). Les problèmes sont présentés de façon informelle, sous forme d'observations. En voici un exemple.

La somme des 4 premiers entiers est 10, la somme de leur cubes est 100 : est-ce l'effet du hasard ? Comment prouver, le cas échéant que le constat est plus général ? Des voies algébriques sont explorées, puis des solutions géométriques sont proposées. Autre curiosité : si on calcule le nombre de diviseurs de chaque diviseur de 72, et si on en fait la somme, on trouve 60. Or la somme des cubes des nombres précédents (qui peuvent être répétés) est encore le carré de 60 ! Et l'on repart sur des conjectures à prouver. Leur traitement met en œuvre des outils très divers, qui sont réutilisés dans d'autres problèmes, de type voisin.

De nombreux domaines sont ainsi explorés : l'élève aura, en fin de parcours (au bout de dix-huit mois) découvert et utilisé les résultats et les méthodes répertoriés dans un programme traditionnel. Son activité aura été nettement plus importante que dans un cours traditionnel. Celle de l'enseignant aussi : ceux qui ont travaillé ainsi savent combien il est épuisant de répondre "à la carte" à des élèves explorant des problèmes. Que de questions "non prévues", que de conjectures dont l'enseignant ne sait, pas plus que les élèves si elles sont vraies ou fausses. On travaille avec comme seul filet une longue pratique des mathématiques.

Peter Taylor revendique la même liberté de choix qu'un enseignant de Français : *les textes sur lesquels il fait travailler les élèves peuvent varier sans nuire à la qualité et au contenu final de son enseignement.* Il insiste sur la composante artistique de l'enseignement des mathématiques : faire ressentir aux élèves la beauté, l'élégance de certains résultats n'est pas un aspect négligeable de l'acte d'enseigner.

Peter Taylor a le mérite de pousser jusque dans leurs développements ultimes, des préoccupations que tout enseignant partage, dans ses moments de lucidité. C'est en forgeant qu'on devient forgeron. Plutôt que de parler de "problem solving" comme il est de bon ton, il le pratique intensément. Trop, diront certains. Peut-être, mais son travail montre qu'on peut réellement apprendre autrement. *Le rééquilibrage entre cours et résolution de problèmes est possible. Traiter certaines parties du programme de cette façon n'est pas utopique.*

On peut noter la convergence entre Peter Taylor et Raffaella Borasi. Tous deux mettent l'accent sur une participation intense des étudiants à leur formation. Pour que cela soit possible, ils les font travailler sur des situations riches et complexes. Ils modifient ainsi la place de l'enseignant dans l'apprentissage : il devient chef d'orchestre, recours, centre de ressources pour les étudiants. Ils posent aussi la question de la formation des enseignants : *ces démarches profondément novatrices supposent une formation universitaire et pédagogique qui ne soit pas que magistrale !*

4°) L'enseignement des mathématiques : une réalité complexe, de nature systémique

Au cours de la dernière conférence plénière, Tom Kieren, une figure historique de la didactique des mathématiques au Canada, invita l'auditoire à prendre de l'altitude. A partir des idées des biologistes théoriciens Maturana et Varela, de Merleau-Ponty ou de travaux récents de Brent Davis, il propose de décrire la connaissance mathématique "en action" comme un phénomène à trois facettes.

La connaissance mathématique personnelle résulte de l'émergence, au moyen d'activités avec d'autres, d'un univers mental où les notions mathématiques prennent sens. *Il convient donc de s'intéresser aux mécanismes et aux schémas mentaux que les étudiants développent dans ces activités, et à leur dynamique structurale.*

L'interaction avec d'autres joue un rôle capital dans la construction des connaissances en mathématiques. C'est la seconde facette développée (on y retrouve les préoccupations de Raffaella Borasi et à un degré moindre de Peter Taylor).

Enfin, l'activité mathématique personnelle *doit être replacée dans un contexte plus large* : elle est tributaire de la société où elle est pratiquée (aspects sociaux et politiques), elle est conditionnée par l'histoire de la discipline (les mathématiques ne sont pas nées d'hier, elles ne sont pas figées).

C'est en ayant conscience de l'extrême complexité des actes d'enseigner et d'apprendre, que l'on pourra agir avec une certaine efficacité et trouver les voies d'une meilleure formation d'un plus grand nombre dans le domaine des mathématiques. C'est la conviction de Tom Kieren et d'un grand nombre de didacticiens canadiens. (On peut rapprocher les analyses de Tom Kieren des idées qu'Edgar Morin développe, dans un contexte plus général, dans sa somme, "La Méthode", et en particulier dans "La connaissance de la connaissance (éditions du Seuil) ").

Un dernier mot sur Thunder Bay, petite ville de 113 000 habitants, trait d'union entre l'ouest et l'est du pays. Point géographique le plus à l'ouest sur les grands lacs, de gigantesques trains déversent dans ses silos les montagnes de céréales produites dans les plaines de l'ouest. Des péniches les convoient, par les grands lacs et le Saint-Laurent jusqu'à Montréal. Chargées sur des cargos de haute mer, elles sont dirigées vers la Russie ou l'Afrique. Mais depuis peu, de nouveaux courants d'échanges se dessinent : la Chine et l'Asie en général importent de plus en plus de céréales canadiennes. Thunder Bay risque d'être à terme délaissée au profit de Vancouver.

On peut risquer un parallèle : l'apprentissage des mathématiques structure l'esprit : *il construit des liens entre les connaissances*, parfois de façon surprenante. Mais *leur enseignement est tributaire de l'environnement social et économique*. Faute de s'en préoccuper, les réveils pourraient être, là aussi, douloureux.