REPERES - IREM . N° 30 - janvier 1998

UNE EXPÉRIENCE D'ENSEIGNEMENT EN GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

Hombeline LANGUEREAU
Claude MERKER
IREM De Besançon

Depuis Janvier 1993, une nouvelle structure fonctionne en DEUG MIAS : les "T.P." (1). Une heure et demie par semaine pendant dix-huit semaines, étudiants et enseignant travaillent sur un thème choisi librement par l'enseignant et sur lequel les étudiants sont invités à faire preuve d'imagination.

Nous nous proposons dans cet article de présenter succinctement les T.P., puis de détailler le sujet de géométrie non euclidienne.

A la suite de la réforme du DEUG de 1992, l'année universitaire comporte deux semestres : le premier est un semestre d'orientation avec examen en décembre et le second, qui débute en janvier, est centré sur les mathématiques et l'informatique. Pour ce semestre,, l'enseignement des mathématiques se répartit entre 3 heures de cours, 4,5 heures de T.D. et 1,5 heure de T.P. hebdomadaires. Les T.P. furent conçus par le groupe université de l'IREM de Besançon dans la continuité des modules du lycée avec l'objectif de favoriser l'autonomie des étudiants en les amenant à préparer des exposés et à réfléchir sur des problèmes leur permettant de développer leur imagination et d'utiliser l'ensemble de leurs connaissances. C'est ainsi qu'il n'y a pas de programme imposé et que l'enseignant a la totale liberté de choix tant sur le contenu que sur la méthodologie. Les enseignants qui assurent les T.P. sont volontaires, titulaires à l'université et ont pour la plupart des activités au sein de l'IREM : participation au groupe université, groupe liaison lycée-université ou histoire des mathématiques.

(1) Travaux Personnels ou Travaux Pratiques : comme vous voulez !

Quant à l'évaluation, elle est elle aussi laissée à l'appréciation des enseignants plus ou moins basée sur les comptes-rendus des problèmes, l'exposé oral et le texte écrit de l'exposé. Le T.P. fournit une note sur 40 (Le total des points est sur 360) à l'étudiant. L'habitude veut qu'un étudiant ayant travaillé "sérieusement" ait une note de 14 sur 20.

En général, les groupes sont constitués de dix-huit étudiants qui travaillent en trinômes. Durant le semestre, douze séances sont réservées aux travaux de recherche et six séances aux exposés.

Le plus souvent, l'enseignant choisit le thème de recherche imposé aux étudiants qui travaillent en trinômes. Éventuellement plusieurs enseignants font travailler simultanément leurs groupes d'étudiants sur le même thème. Parmi ceux-ci, il y eut :

– l'étude du chaos en tant que modèle d'évolution d'une population animale,
– le codage,
– l'équation de Pell-Fermat,
– la cycloïde au XVII^{e} siècle,
– les raccordements de courbe,
– la construction des polygones réguliers,
– l'inversion.

Quant aux exposés, la diversité est très grande : d'une part certains enseignants imposent un sujet connexe au problème posé, alors que d'autres proposent le plus souvent des sujets culturels ou historiques ou laissent le choix du sujet aux étudiants qui le souhaitent ; d'autre part certains d'entre nous guident les étudiants dans leur exposé alors que d'autres découvrent l'exposé en même temps que les étudiants du groupe.

Parmi les sujets connexes aux problèmes, notons les titres suivants :

– les fractions continues,
– les critères de divisibilité,
– le calcul de la longueur d'une courbe.

Parmi les sujets à dominante culturelle :

– l'équation du troisième degré,
– l'intégration des sinus par Roberval,
– l'équation du second degré,
– le logarithme,
– le nombre d'Or,
– Fermat.

Voici un des thèmes proposés à trois des quatorze groupes en 1995-96 : une approche pratique et même concrète de la géométrie non euclidienne.

Ce thème qui déstabilise complètement permet de faire réfléchir les étudiants sur les définitions et théorèmes bien connus (La somme des angles d'un triangle vaut deux droits... Des définitions du carré équivalentes en géométrie euclidienne ne le sont plus...). Nous espérons de plus qu'un enseignement ultérieur de géométrie différentielle sera plus qu'un ensemble de théorèmes à appliquer pour résoudre des problèmes d'examen.

Pour cela nous avons demandé aux étudiants de venir avec une orange, une poire, une banane, une balle de tennis, du scotch, des ciseaux, des élastiques, des épingles, un mètre de couturière... et d'autres matériels de ce genre. Nous avons apporté une mappemonde.

La première consigne d'H.L. est : *Tracer un carré sur chacun de ces objets.*

La première question de C.M. est :

Imaginer que vous êtes un animal à deux dimensions habitant à la surface de la sphère, quelles sont vos droites ? Le papier cité en annexe 1 a été distribué d'entrée de jeu.

H.L. : Pendant une heure, les étudiants sont occupés avec des élastiques, des épingles et des feutres à tenter de tracer un carré ayant 4 côtés égaux et 4 angles droits, sans succès.

C.M. : Sans succès ?

H.L. : Ils ont pris un "morceau de droite" – sans savoir ce que ça veut dire – matérialisé par l'élastique, reporté la longueur à angle droit à chaque extrémité et là il y avait problème pour rejoindre les deux autres morceaux sur l'orange et sur la poire, mais pas sur la banane. Je ne suis intervenue qu'après une heure et quart pour leur proposer d'expliciter la définition qu'ils utilisaient : 4 angles droits, 4 côtés égaux. *N'y aurait-il pas d'autres définitions du carré ? Les mots angles, côtés sont-ils définis ?* Comme la construction citée plus haut n'aboutissait pas, les étudiants ont tenté la définition du carré comme parallélogramme particulier.

C.M. : Je n'ai pas commencé par les carrés, mais par les triangles. Les étudiants de mes groupes n'ont travaillé qu'avec des oranges et des mappemondes, c'est-à-dire sur la sphère. Je leur ai d'emblée demandé de préciser ce que pouvaient être les côtés d'un triangle, autrement dit les segments de droite sur la sphère.

Pour un des deux groupes, l'idée naturelle de droite a été tout de suite le grand cercle. Pour l'autre, tout cercle pouvait être une droite ; personne ne songeait à prendre autre chose que des cercles comme droites. Tout le monde tenait à ce qu'une droite soit un plus court chemin. (Personne ne songeait à la droite comme *chemin le plus droit ;* pourtant l'idée aurait pu venir avec le scotch). J'ai fait remarquer au deuxième groupe qu'entre deux cercles joignant A et B, le plus court est le moins courbé. Après un accord sur le grand cercle comme droite, nous avons envisagé une kyrielle de triangles pour observer leur somme d'angles : triangles équatoriaux à trois angles droits, très petits triangles, énormes triangles (complémentaires des très petits), triangles filiformes, triangles-grands-cercles à trois angles plats. Presque tous les étudiants voient que la somme des angles est plus grande que π. A la question : *quelle est la limite supérieure de la somme des angles ?* deux réponses sont proposées : 5π si les énormes triangles sont admis, 3π si on n'est pas d'accord pour qu'un triangle occupe plus d'une demi-sphère. C'est l'occasion d'une discussion sur la liberté des définitions.

Ceux qui ont la meilleure intuition infinitésimale sentent qu'un tout petit triangle n'a jamais une somme égale à π, mais à π plus quelque chose qui ne disparaît qu'avec le triangle. Beaucoup ont remarqué que si la surface du triangle augmente, il en est de même de la somme de ses angles.

Lors de ces premières séances, les étudiants se sont rendu compte qu'une partie des évidences était liée aux habitudes.

H.L. : A la deuxième séance, après un bref rappel de la première, le problème est devenu : *tracer deux droites parallèles. A ma première question : "Qu'est-ce qu'une droite ?"*, la réponse immédiate et générale : "$y = ax + b$" est abandonnée immédiatement au profit de : "le plus court chemin entre deux points" ; et l'on constate que sur la sphère ce sont les grands cercles [2]. La question du parallélisme peut se poser : les étudiants ont pris "droites qui ne se coupent pas", ont cherché en vain à fabriquer des droites parallèles sur l'orange. Ce n'est qu'à la fin de la troisième séance qu'ils renoncent à l'espoir d'en trouver.

C.M. Il me semble que les étudiants ont vite admis que tous les grands cercles se coupent, mais l'existence de parallèles revenait en force dès que la notion de parallélisme intervenait implicitement ; dans cette troisième séance j'ai imposé un exercice : *tracer trois grands cercles qui, en se coupant deux à deux, forment un triangle et trouver la relation entre la somme de ses angles et son aire :*

$$\text{Angle A} + \text{Angle B} + \text{Angle C} = \pi + \frac{S}{R^2}$$

H.L. Ce n'est qu'au début de la quatrième séance que le texte donné en annexe 2 a été distribué aux étudiants pour les guider dans la rédaction de leur compte-rendu. Les étudiants ont remarqué que "plus le triangle est grand, plus les angles sont grands", le texte suggérait la formule et sa démonstration.

Toutes deux nous avons constaté que les étudiants étaient rassurés d'avoir un exercice à faire, avec un résultat tangible, exprimé dans des termes mathématiquement acceptables. Nous nous sommes tout de même refusées à mettre une note à leur travail.

Une remarque : des étudiants ont eu un peu de mal à compter les morceaux (le triangle est compté trop de fois mais combien ? 6, 2, 5, ou 4) ; ceux qui n'ont pas eu de problèmes sont ceux qui ont colorié les fuseaux matérialisés sur une balle de ping-pong.

C.M. Après les triangles nous avons abordé les carrés. C'est très difficile de renoncer aux quatre angles droits. Il a fallu très longtemps pour que quelqu'un voie l'impossibilité d'avoir quatre angles droits (la somme des angles d'un carré est nécessairement supérieure à quatre droits, d'après ce qui précède). Les autres étudiants restaient persuadés qu'ils trouveraient un *vrai* carré avec quatre angles droits. Leur solution consistait à construire correctement trois côtés, égaux, avec deux angles droits puis un quatrième "côté" qui n'était plus porté par un arc de grand cercle, cela pour conserver les angles droits. Certains disaient : "puisqu'on est libre de choisir ses définitions, pourquoi astreindre les côtés à être des segments ?", montrant le prix qu'ils étaient prêts à payer. Je leur ai demandé *d'écrire le plus possible de définitions équivalentes du carré en géométrie euclidienne, puis de voir quelles définitions on pouvait garder en géométrie sphérique.* La définition par diagonales égales se coupant à angle droit a fait l'unanimité.

Les deux dernières séances sont consacrées aux cercles tracés sur la sphère. Les rayons sont des portions de grands cercles ; il n'y a plus de rapport constant entre l'aire

(2) Il revient au mathématicien portugais Pedro NUÑES (1492-1577) d'avoir démontré que les arcs de grands cercles étaient les plus courts chemins sur la sphère, à une époque où les recherches mathématiques étaient impulsées par la navigation. On croyait jusque là que le plus court chemin entre deux points de la surface terrestre était la courbe coupant les méridiens à angle constant.

et le rayon, entre la longueur et le rayon, en revanche l'aire reste l'intégrale de la longueur... Tout ceci est soigneusement démontré avec mon aide et en s'appuyant sur le texte de E. Castelnuovo (Voir annexe 1). J'ai conseillé la lecture de la bande dessinée de J.-P. Petit.

H.L. : Selon leur goût, à la suite de discussions provoquées par les "nouveaux" théorèmes, les étudiants ont choisi eux-mêmes leur prolongement à partir de textes que je leur ai fournis :

– Démontrer l'équivalence des différents énoncés du cinquième postulat donnés par Heath (voir mathématiques au fil des âges),
– Regarder les problèmes de cartographie (*Mnémosyne,* n° 12 ou l'article de l'*Encyclopédia Universalis*),
– Regarder la trigonométrie sphérique,
– Démontrer "rigoureusement" les assertions énoncées en géométrie sphérique.

EN CONCLUSION

Malgré nos interventions, les étudiants continuent à chercher des parallèles ; nous avons remarqué qu'ils avaient du mal à trouver une bonne définition de carré (abandonner des propriétés incompatibles est difficile).

De plus, sur la sphère, les droites sont visibles "en entier" : sur le plan, elles sont infinies ; et donc depuis l'école primaire, il faut se convaincre de leur existence (ou à défaut faire confiance au maître). Il en est de même des parallèles puisque la définition de deux droites qui ne se coupent pas est négative.

Constatant les applications de la géométrie sphérique, des étudiants se sont demandé pourquoi les programmes de collège et lycée ne contenaient que de la géométrie euclidienne.

Les étudiants nous ont étonnées par leur ingéniosité. Par exemple, une étudiante a fabriqué un triangle en papier, découpé suivant les médianes sur quelques centimètres à partir de chaque sommet. En appliquant ce triangle fendu sur différentes sphères on constate que les angles augmentent avec la courbure. Faites l'expérience, cela vaut mieux qu'un long discours ! Un autre étudiant a eu une conception originale des triangles de la banane, il y a toujours trois points mais le nombre de côtés est variable (voir l'annexe 4).

Les étudiants qui ont compris les notions précédentes seront en mesure d'apprécier un exposé axiomatique de la géométrie différentielle : ils y retrouveront le théorème remarquable de Gauss, le théorème de Gauss-Bonnet, étudiés, cette fois, d'un point de vue totalement différent, mais dans lesquels ils pourront reconnaître de vieux amis (3).

(3) Les lecteurs de COXETER et GREITZER auront identifié une adaptation des dernières lignes de leur ouvrage *Redécouvrons la géométrie.*

POSTFACE

Ce TP a eu lieu de manière très spontanée. Cela n'empêche pas, un an après de se demander quelles sont les idées qui y ont présidé, de manière plus ou moins consciente. La principale semble être celle-là : faire sentir que l'abstraction mathématique est l'abstraction de quelque chose. En ce qui concerne la géométrie différentielle, ce quelque chose est en rapport avec le monde, avec l'espace.

Il est très rare dans un cours de mathématique d'avoir accès au problème qui s'est posé et qui a donné lieu à une définition, à un théorème, à un nouveau concept. La sphère, être simple s'il en est, contient les prémisses de toute la géométrie différentielle intrinsèque, c'est-à-dire celle où l'espace est vu pour lui-même, pas plongé dans un espace plus grand. C'est pour entrer dans cette problématique, née avec Gauss, que nous avons incité les étudiants à ne pas sortir de l'enclos sans barrière que représente la surface de la sphère, les cercles ont leur centre sur la sphère, leur rayon n'est pas ce que l'on croit, il est plus grand, le centre de la sphère est interdit, puisqu'extérieur etc.

Il serait possible une autre année de mettre le doigt sur d'autres questions, par exemple :

– Faire le lien entre l'excès de somme des angles dans un triangle et l'angle dont a tourné un vecteur transporté parallèlement à lui-même le long des trois côtés lorsqu'il rejoint son point de départ.

– On ne peut pas représenter une sphère avec une seule carte, il en faut au moins deux.

– Pourquoi il est difficile de trouver une bonne définition de la courbure d'une surface. Un étudiant de première année peut très bien comprendre qu'une courbe a presque toujours un cercle osculateur, et une surface rarement une sphère osculatrice. Pourtant la sphère est un étalon de comparaison, même pour les surfaces à courbure non constante...

Si de telles questions, sans souci de rentabilité, rendaient à long terme l'enseignement de la Géométrie différentielle moins nominaliste, nous serions contentes.

BIBLIOGRAPHIE

R. BKOUCHE D. LEHMANN, *Initiation à la géométrie*, PUF 1988.

J. GUICHARD, *Sur les Géométries non euclidiennes*, IREM de Poitiers 1995.

H. LOMBARDI, *Géométries élémentaires*, IREM de Besançon 1992.

J.-P. PETIT, *Le Géométricon*, Belin.

HISTOIRE D'ALGORITHME, Belin.

HISTOIRE DE PROBLÈMES, Ellipse.

MNÉMOSYNE, n°12, IREM de Paris VII.

ANNEXE 1 : GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Texte distribué par C. Merker

La surface de la sphère peut être considérée comme une surface courbe à deux dimensions, sur laquelle on peut étudier quelques figures analogues, jusqu'à un certain point, à celles que l'on peut tracer dans le plan. On s'intéressera aux triangles, aux carrés, aux cercles et aux disques.

Les triangles

Quelle définition raisonnable donner d'un triangle à la surface de la sphère ? Observer sur une orange ou sur une mappemonde plusieurs triangles de taille diverse. Que remarquez vous sur la somme de leurs angles ?

On sait bien que la somme des angles d'un triangle du plan habituel est π. Vous rappelez-vous comment on le démontre ?

Et sur la sphère entre quelles valeurs est comprise la somme des angles d'un triangle ?

Il y a une formule qui lie la somme des angles et la taille du triangle, essayez de la deviner, puis démontrez-la. Elle est un cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet pour des figures composées d'arcs géodésiques ("segments de droites") sur une surface courbe quelconque.

Y a-t-il deux triangles semblables sur la sphère ?

Les carrés

Quelle définition raisonnable donner d'un carré à la surface de la sphère ? Il y a beaucoup de définitions équivalentes d'un carré dans le plan euclidien, on pourra regarder celles qui sont susceptibles d'une transcription sur la sphère.

Quelle est l'aire d'un carré de côté a sur la sphère ?

Y a-t-il un théorème de Pythagore sphérique ?

Les cercles et les disques

Toujours la même chose, quelles définitions donner ? Il faut un centre, un rayon. Et ce serait souhaitable d'avoir une formule donnant le périmètre et l'aire en fonction du rayon, comme pour un brave cercle ou disque euclidien. Rappeler ces formules et dire pourquoi l'une est l'intégrale de l'autre.

L'aire de la sphère est la même que celle du cylindre tangent à l'équateur et de même hauteur. Lire la démonstration ci-dessous (E. Castelnuovo *La mathématique dans la réalité*) qui montre que les aires se conservent par projection *même en petit*. En déduire l'aire d'une calotte sphérique de hauteur h.

On a maintenant tout ce qu'il faut pour établir les deux formules cherchées. Comparer avec la situation dans le plan euclidien (Est-ce qu'il y a encore un nombre π ? ou quelque autre qui joue le même rôle ? Est ce que l'une des deux formules est encore l'intégrale de l'autre ? De deux disques de même rayon, l'un euclidien l'autre sphérique lequel a l'aire la plus grande ?... Etc.

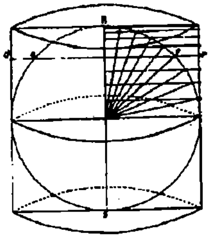
Prolongements

Il existe bien d'autre surfaces que celle très régulière de la sphère. Que pensez vous de la somme des angles d'un triangle dessiné à la surface d'un tabouret de piano ?

Voir ci-après pour la démonstration infinitésimale d'Emma Castelnuovo.

AIRE DE LA SPHÈRE ÉGALÉE À L'AIRE DU CYLINDRE

PROJECTION sur un CYLINDRE



On vérifie une chose inattendue! La surface de la sphère est égale à la surface latérale du cylindre qui lui est circonscrit!

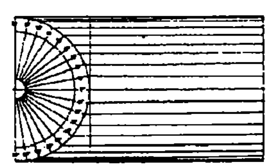
$S_{sphère} = 4\pi r^2$

$S_{lat.\ cyl.} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

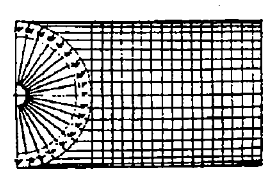
On projette les points de la surface sphérique sur le cylindre au moyen de droites qui s'appuyent sur l'axe NS et lui sont perpendiculaires.

Au point P correspond le point P' sur le cylindre.

La correspondance est <u>biunivoque</u>, à l'exception des points N et S auxquels correspondent les circonférences de base du cylindre.

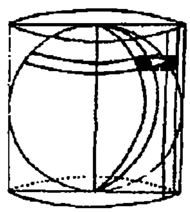


Quand on développe le cylindre sur le plan, on obtient un grand nombre de droites parallèles qui correspondent aux parallèles et un grand nombre de droites perpendiculaires qui correspondent aux méridiens.



I

Dans cette projection ne sont conservés ni les distances, ni les angles.
Plus on s'éloigne de l'équateur, plus les figures sont changées. Les aires sont cependant conservées.



233

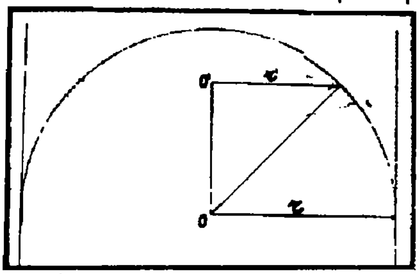
Observez sur la sphère rouge un quadrilatère formé de deux parallèles et de deux méridiens.
Quand il se projette sur le cylindre, nous obtenons un quadrilatère "plus bas" mais "plus large".

On découvre que les aires se conservent même "en petit" : on réussit à démontrer que lorsqu'on projette une zone de la sphère sur le cylindre, la zone change de forme mais l'aire n'est pas changée.

Avant de faire la démonstration, il faut cependant "bien regarder" (fig. 233 et 234) !

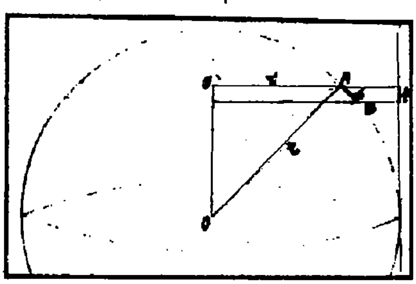
II

En effet, par projection, toute la bande entre deux parallèles "se dilate" autant qu'elle "se contracte". Voici pourquoi :



au parallèle de rayon r' correspond sur le cylindre un cercle de rayon r, dilaté suivant le rapport $\frac{r'}{r}$

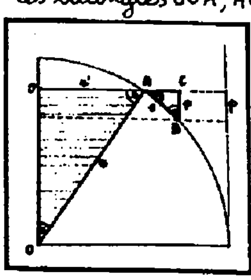
Je considère deux parallèles très voisins : s est donc très petit, il est comme un segment.



A s correspond sur le cylindre le trait p, "construit" selon le rapport $\frac{s}{p}$

Je calcule le rapport $\frac{p}{s}$

les triangles OO'A, ACB sont semblables parce que :



$\hat{O'} = \hat{C}$ parce que droits

$\hat{O} = \hat{A}$ parce que compris entre des droites perpendiculaires.

(OO' ⊥ AC et le rayon ⊥ au cercle).

Alors :

$$\frac{p}{s} = \frac{r'}{r}$$

La "contraction" est donc égale à la "dilatation".

On démontre que les aires ne sont pas changées. La démonstration se base sur la similitude des triangles *OO'A* et *ACB*. Dans cette projection, à des zones dessinées sur la mappemonde correspondent des zones équivalentes sur le cylindre et par conséquent sur le plan ; c'est pour cela que la projection sur le cylindre est utilisée quand on s'intéresse en particulier aux aires.

III

In Emma CASTELNUOVO *La Mathématique dans la Réalité,* Cedic 1980

ANNEXE 2 : T.P. GÉOMÉTRIE EXOTIQUE

Texte distribué par H. Languereau

La sphère

La surface de la sphère peut être considérée comme une surface courbe à deux dimensions sur laquelle on peut étudier quelques figures “analogues” à celles que l'on peut tracer sur le plan. On s'intéressera aux droites, triangles et carrés.

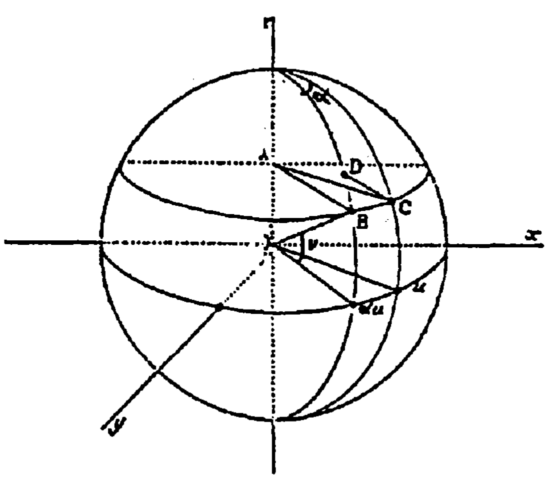
– Donner des définitions “raisonnables” de droites, triangles et carrés.

– Chercher à exprimer la longueur d'un arc de courbe tracé sur la sphère (coordonnées cartésiennes ou coordonnées paramétriques – longitude u et latitude v – d'un point de la sphère)

– Après avoir rappelé la somme des angles d'un triangle du plan habituel et sa démonstration, préciser les valeurs possibles pour la somme des angles d'un triangle sphérique. Puis démontrer que cette somme est π + e (où e est appelé excès sphérique).

Indications : Calculer l'aire d'un fuseau d'angle $\hat{A}$ et décomposer la sphère à l'aide de fuseaux.

– Pour les triangles du plan, des relations existent entre les angles et les côtés : rappeler quelques formules trigonométriques. Quelles relations a-t-on en trigonométrie sphérique ?



ANNEXE 3 : L'EXCÈS SPHÉRIQUE
(Cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet)

Les démonstrations de l'annexe 3, manuscrites ou frappées, sont celles rédigées par les étudiants à la fin du T.P.

Définition de fuseau: *c'est une partie d'une sphère comprise entre deux demi-grands cercles de même extrémités A et A'.*
Si les demi-droites tangentes en A à chacun des demi-cercles déterminent un angle de mesure , on parle alors de ***fuseau d'angle*** .

*Partons d'un triangle tracé sur une sphère.
*Traçons les trois fuseaux partant chacun d'un angle du triangle.
On détermine:

Aire des trois fuseaux=2 aires du triangle+aire de la demi-sphère.

*Soient α,β,γ les trois angles du triangle.
Soit A l'aire du triangle, soit R le rayon de la sphère.
On a:

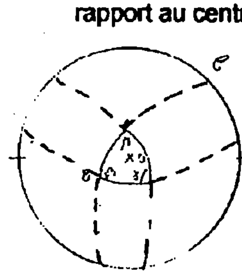
$2\ R^2+2\ R^2+2\ R^2=2A+2piR^2$

$2(\text{ angles})R^2=2A+2piR^2$

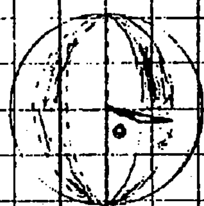
$\Longrightarrow$ $\text{angles}=(2A+2piR^2)/2R^2=(2A/2R^2)+(2piR^2/2R^2)$

$\text{angles}=A/R^2+pi$

Symétrie des fuseaux par rapport au centre O

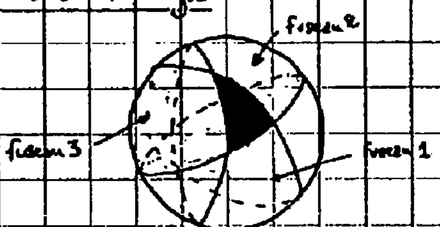


Aire totale de la sphère : $S = 4\pi r^2$



Aire d'un fuseau : $S_f = 4\theta r^2$

Aire d'un triangle



Les 3 fuseaux recouvrent la sphère plus d'une fois :

Aire (fuseau 1) + Aire (fuseau 2) + Aire (fuseau 3) = Aire (sphère) + 4 Aire (triangle)

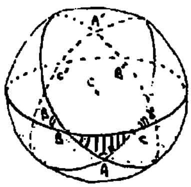
$\Leftrightarrow 4\theta_1 r^2 + 4\theta_2 r^2 + 4\theta_3 r^2 = 4\pi r^2 + 4T$

$\Leftrightarrow T = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi) r^2$

$\Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi + \frac{T}{r^2}$

Donc la somme de 3 angles d'un rectangle est supérieure à π,

elle s'écrit $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi + e$ avec $\boxed{e = \frac{T}{r^2}}$



Si on additionne toutes les surfaces, on aura la surface de la sphère plus 4 fois la surface du triangle car celle-ci est commune aux trois surfaces.

Aire Bleue + Aire orange + Aire Violet = Aire sphère + 4 Aires triangle
car il y a 2 triangles, le orange et le Violet se superposent bien.

$$4 A_{triangle} + A_{sphère} = A_{(A\alpha)} + A_{(B\beta)} + A_{(C\gamma)}$$

$$4 A_{triangle} + 4\pi R^2 = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2$$

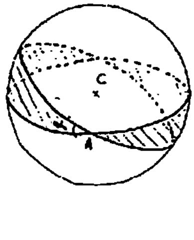
$$4 A_{triangle} = 4 R^2 [\alpha + \beta + \gamma - \pi]$$

$$A_{triangle} = R^2 [\alpha + \beta + \gamma - \pi]$$

Donc l'aire du triangle $= R^2 [\alpha + \beta + \gamma - \pi]$

Nous pouvons voir que suivant la surface sur laquelle nous considérons un triangle, l'aire s'exprime autrement la somme des angles change et sa forme est perçue différemment.
Il y a une formule qui lie la somme des angles et la taille.

Si on a $\alpha = \pi$
alors l'aire = aire de la sphère



$$\text{Surface} = \frac{\alpha}{(\pi)} \times (\text{Aire de la Sphère})$$

$$A_{(A\alpha)} = \frac{\alpha}{\pi} \times 4\pi R^2$$ où R est le rayon de la sphère

$$= 4\alpha R^2$$

Donc la surface du biangle A d'angle α est $4\alpha R^2$.

ANNEXE 4 : IDÉES ET RÉDACTIONS DIVERSES

Comme celles de l'annexe 3, les démonstrations de l'annexe 4 sont tirées des copies des étudiants.

III. BANANE considérée comme une hyperboloïde:

Les définitions que nous allons présentées ne sont valables que sur la partie centrale de la banane. Elles ne peuvent plus s'appliquer aux extrémités, car celles-ci sont pyramidales et arrondies.

a. Définition de la droite:

*En considérant une petite surface plane de la banane, on se situe dans un plan euclidien. Une droite est donc e plus court chemin entre 2 points.

*En considérant la banane, une droite est composée de plusieurs géodésiques, formant un angle dépendant de celui formé par les différentes surfaces du fruit.

b. Définition du triangle:

Lorsque l'on place 3 points sur différentes surfaces, on n'obtient pas un triangle, mais un polygone, dont le nombre de côtés dépend du nombre de surfaces.

Ainsi, si on place les 3 points sur une même surface, on est situé dans un plan euclidien où le triangle est la réunion de 3 géodésiques.

Si on place les 3 sommets sur 2 surfaces consécutives, on obtient un pentagone irrégulier.

Si on place les 3 sommets sur 3 surfaces consécutives, on obtient un heptagone irrégulier.

On peut en déduire que le nombre de côtés du polygone obtenu augmente en fonction du nombre de surfaces que recouvre le triangle.

Calcul d'aire:

A présent, on considère une surface qui n'est pas plane sur toute sa longueur, mais elle représente une partie positive ou négative d'une hyperboloïde. La somme des angles d'un triangle est alors une fonction décroissante de sa surface, due à un défaut hyperboloïque.

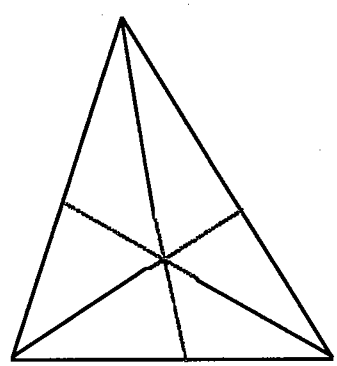
c. Définition du carré:

De même que pour le triangle, le carré devient un polygone dont le nombre de côtés varie en fonction du nombre de surfaces recouvertes par ce quadrilatère.

Définition raisonnable d'un triangle à la surface de la sphère.

Observation :

On trace sur une feuille un triangle quelconque.
On trace les bissectrices de chaque angle et on découpe celles-ci de l'angle jusqu'au point d'intersect°
on peut ainsi le disposer sur la surface d'un globe.



c) Y a-t'il deux triangles semblables sur la sphère ?

Si on omet les triangles identiques, c'est-à-dire obtenus en déplaçant le triangle de référence sur la sphère, deux triangles semblables sont donc deux triangles qui ont les mêmes angles et des rapports de distance égaux (différent de 1)

Or, d'après la formule obtenue dans le paragraphe précédent : $A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \times r^2$, les angles définissent la taille du triangle. Il n'est donc pas possible de trouver deux triangles avec des angles égaux et de taille différente.

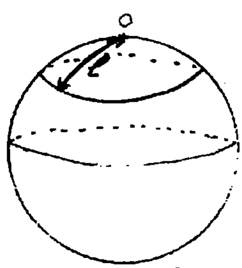
Il n'existe donc pas de triangles semblables sur la sphère.

III Les cercles et les disques

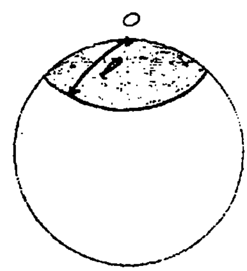
a) Définitions

Un cercle sur la sphère est ~~sont~~ l'ensemble des points à une distance ℓ du centre (ℓ est la longueur de l'arc de cercle), un cercle est donc un parallèle.

Un disque est la surface du cercle, c'est une calotte



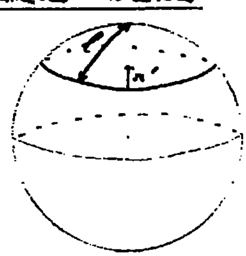
Un cercle de rayon ℓ
et de centre O.

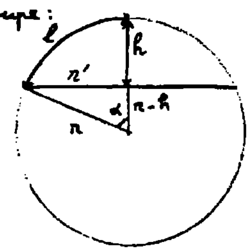


Un disque de rayon ℓ
et de centre O.

b) Formules

Périmètre du cercle





$r^2 = r'^2 + (r-h)^2$

$r'^2 = r^2 - (r-h)^2 = r^2 - r^2 + 2rh + h^2 = h(2r-h)$

$r' = \sqrt{h(2r-h)}$

le périmètre du cercle est $P = 2\pi r' = 2\pi\sqrt{h(2r-h)}$

exprimons h en fonction de ℓ

$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}$ et $\ell = r\alpha$ d'où $\alpha = \frac{\ell}{r}$

donc $\cos\frac{\ell}{r} = \frac{r-h}{r}$ $\quad h = r - r\cos\alpha = r(1-\cos\alpha) = r(1-\cos\frac{\ell}{r})$

d'où $P = 2\pi\sqrt{r(1-\cos\frac{\ell}{r})(2r - r(1-\cos\frac{\ell}{r}))}$

$= 2\pi r\sqrt{(1-\cos\frac{\ell}{r})(2-1+\cos\frac{\ell}{r})}$

$= 2\pi r\sqrt{1-\cos^2\frac{\ell}{r}}$

$\boxed{P = 2\pi r \sin\frac{\ell}{r}}$

<u>Surface du disque</u>

l'aire de la sphère est la même que la surface latérale du cylindre tangent à l'équateur et de même hauteur. les aires se conservent par projection même en petit, donc la surface de la calotte est $S = 2\pi r h$

$S = 2\pi r h = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2(1-\cos\frac{\ell}{r})$

$\boxed{S = 2\pi r^2(1-\cos\frac{\ell}{r})}$

c) <u>Comparaison avec la situation dans le plan Euclidien.</u>

1.) <u>Rapport entre circonférence et diamètre</u>

Dans le plan, π est le rapport de la circonférence sur le diamètre du cercle

Sur la sphère le rapport de la circonférence sur le diamètre est

$$\frac{2\pi r\sin\frac{\ell}{r}}{2\ell} = \frac{\pi r\sin\frac{\ell}{r}}{\ell} = \pi \times \frac{\sin\frac{\ell}{r}}{\frac{\ell}{r}}$$

or $0 < \ell < \pi r$

d'où $0 < \frac{\ell}{r} < \pi$ mais sur $[0, \pi]$ le rapport $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas constant, donc le rapport de la circonférence sur le diamètre n'est pas constant. Donc il n'y a pas de nombre qui joue pour les cercles sphériques le rôle de π pour les cercles du plan.