POUR DIVERSIFIER LES PROBLÈMES DE REPRÉSENTATION DE L'ESPACE EN PERSPECTIVE

Bernard DESTAINVILLE
IREM de Toulouse

Par perspective nous entendons projection cylindrique, c'est-à-dire projection sur un plan suivant une direction donnée ; c'est le mode de représentation de l'espace que les mathématiciens ont adopté, et pour lequel les trois invariants sont :

– conservation de l'alignement de trois points, que nous coderons cons.al ;
– conservation du parallélisme de droites, que nous coderons cons.par ;
– conservation du rapport des longueurs de deux segments parallèles, que nous coderons cons.rap.

Le respect de ces trois propriétés impose beaucoup de rigueur dans tous les problèmes de représentation dès qu'un nombre suffisant de contraintes a été précisé sur l'objet représenté. Ce nombre dépend de l'activité et c'est une des difficultés, plus ou moins formulées dans la tête du débutant, de savoir de combien de degrés de libertés il dispose pour faire une représentation correcte ; le début d'une représentation commence en effet par un choix plus ou moins aléatoire de quelques points : le théorème de Pohlke donne par exemple la liberté de prendre aléatoirement quatre points non alignés pour représenter un coin de cube, c'est-à-dire un repère orthonormal. Ce serait une erreur d'imaginer que les propriétés d'invariance ont seulement des incidences affines et cette étude en apporte particulièrement la preuve.

Il est donc indispensable, lorsqu'on se propose de compléter une représentation de savoir si l'on peut placer au hasard un nouvel élément (point, segment, droite...) ou si les propriétés énoncées ci-dessus n'obligent pas à *construire* ce nouvel élément pour qu'il satisfasse aux propriétés de la perspective. Ce type d'activités nous semble formateur au Lycée : certes, il est relativement concret, puisque les maquettes en permettent la matérialisation, mais il nécessite une réelle réflexion : il n'est plus possible de mesurer sur la figure, car les propriétés métriques sont en général perdues.

Notons dès à présent la nécessité de préciser si nous parlons de l'objet ou de l'une de ses représentations. Cette distinction est fondamentale, et bon nombre d'erreurs seraient évitées, tant au Collège qu'au Lycée, si l'on précisait chaque fois sur quoi porte la réflexion. Il n'est pas inutile de rappeler à ce sujet que la lettre servant à désigner un point, une droite... sert aussi à désigner sa représentation ; cela ne contribue pas pour l'apprenti à la clarté de ses réflexions.

Il vaudrait donc mieux préciser les conventions de codage.

En dehors des représentations habituelles (figures du cours, solides...), les exercices les plus fréquents de nos manuels de Lycée proposent des problèmes d'incidence : section d'un polyèdre par un plan défini par trois points ou passant par un point et de direction donnée, intersection d'une droite avec les faces... ; ces thèmes sont loin d'épuiser le sujet des représentations ; par exemple, on peut introduire pour l'élément nouveau à construire, une hypothèse d'orthogonalité pour le plan sécant ou la droite sécante (voir [2]), ou encore dessiner sur la représentation de nouveaux points caractérisés avec soin sur l'objet de l'espace.

Dans cet esprit, nous proposons ici des constructions sur les faces de représentations de parallélépipèdes rectangles ; notamment un rectangle représenté en perspective permet des réflexions abordables dès la classe de Seconde ; ce type d'activités nous paraît fondamental, car pour d'autres types de polygones plans, notamment les triangles, il est souvent possible de ramener l'étude à un rectangle ou un carré, dans la mesure où l'on peut mettre en place la représentation d'un angle droit sur la représentation de ce polygone.

Une représentation d'un rectangle ABCD en perspective est nécessairement un parallélogramme (*cf.* cons.par.) et nous posons en hypothèse que les angles de la représentation sont droits sur l'objet ; bien entendu, en projection, l'information sur les longueurs des côtés est perdue.

1. RAPPORT DES CÔTÉS DU RECTANGLE ET ORTHOGONALITÉ DE DEUX DIRECTIONS QUELCONQUES DU PLAN

Une similitude conservant parallélisme, orthogonalité et rapports de longueurs, ce ne sont pas les dimensions des côtés qui sont nécessaires mais leur rapport ; cependant pour simplifier les calculs, nous donnerons les longueurs : par exemple pour $\frac{AB}{AD} = 0{,}4$ nous prendrons AB = 4 et AD = 10.

Cette hypothèse suffit-elle pour dessiner correctement deux directions orthogonales sur la représentation de ABCD, et inversement, la connaissance d'une othogonalité permet-elle de calculer le rapport des côtés du rectangle ?

a. Tracer une perpendiculaire à une direction donnée

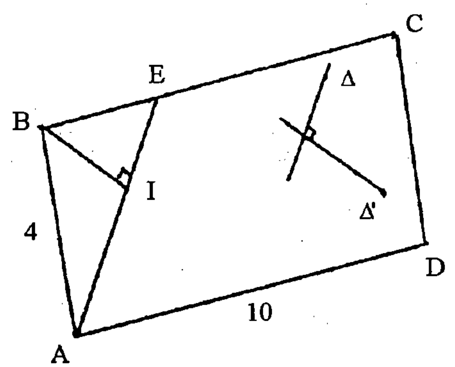

Fig. 1

Soit E un point de [BC] et (AE) la direction ; notons que le choix de E détermine $\frac{BE}{BC}$ que l'on peut mesurer sur la représentation et utiliser pour l'objet (*cf.* cons.rap.) ; ainsi, si BC est connu, alors BE est connu.

Appelons I la projection orthogonale de B sur (AE) ; dans le triangle ABE rectangle en B, $EI \times EA = EB^2$; par suite, $\frac{EI}{EA} = \left(\frac{EB}{EA}\right)^2 = \frac{EB^2}{EB^2 + AB^2}$ (avec Pythagore), donc I est parfaitement déterminé ainsi que la direction orthogonale à (AE).

Notre réflexion ne dépend évidemment pas du fait que (AE) est une droite particulière ; en effet, pour une droite quelconque Δ, il suffit de tracer la parallèle passant par A (*cf.* cons.par) ; on peut aussi tracer Δ' parallèle à (BI).

Exemple : si AB = 4, AD = 10 et EB = 3, alors $\frac{EI}{EA} = \frac{9}{25}$ = 0,36, rapport que nous avons respecté sur la figure (on peut construire I géométriquement, avec Thalès). Ainsi, avec les différentes hypothèses sur l'objet, nous avons réalisé un dessin en perspective dans lequel $\Delta' \perp \Delta$.

b. Problème inverse

Supposons que le rapport des côtés du rectangle ne soit pas précisé ; traçons deux droites sécantes Δ et Δ', qui ne sont parallèles ni à (AB) ni à (AD). Pour des précisions sur la position de ces deux droites, voir les remarques en fin de paragraphe.

Démontrons que l'hypothèse d'orthogonalité de Δ et Δ' sur l'objet détermine le rapport des côtés du rectangle : avec E sur (BC) tel que (AE) soit parallèle à Δ, et I sur (A E) tel que (BI) soit parallèle à Δ', on retrouve la figure 1 à partir de laquelle, avec les nouvelles hypothèses, on peut, après mesures sur la représentation, calculer les rapports $\frac{BC}{BE}$ et $\frac{EI}{EA}$; ensuite, d'une part $\frac{BA}{BC} = \frac{BA}{BE} \times \frac{BE}{BC}$ et d'autre part, $\frac{BA}{BE} = \frac{BI}{EI}$ (= tan $B\hat{E}A$) et $\frac{IA}{IB} = \frac{IB}{IE}$ (= tan $I\hat{B}A$), donc $\left(\frac{BA}{BE}\right)^2 = \left(\frac{BI}{EI}\right)^2 = \frac{IA \times IE}{IE^2} = \frac{IA}{IE}$;

par suite, $\frac{BA}{BC} = \sqrt{\frac{IA}{IE}} \times \frac{BE}{BC}$; le rapport $\frac{BA}{BC}$ est bien déterminé.

***En conclusion :** il est équivalent de proposer soit le rapport des côtés du rectangle, soit deux droites orthogonales Δ et Δ' dans le plan du rectangle.*

Une fois choisie une et une seule des deux contraintes, la métrique du rectangle est fixée : les constructions qui suivent ne sont donc plus aléatoires.

Remarques à propos des positions des représentations de Δ *et* Δ' **:**

– tel que le problème est posé, il a été normal de supposer que ces deux droites soient représentées à l'intérieur de la représentation du rectangle.

– les représentations de Δ et Δ' peuvent, elles aussi, être deux droites perpendiculaires, lorsque l'une des deux droites est parallèle au plan de projection (théorème sur la projection de l'angle droit) ;

– l'orthogonalité des droites étant une relation symétrique, il n'y a aucun inconvénient, si c'est nécessaire, à échanger les rôles des deux droites pour que I et E restent à l'intérieur de la représentation du rectangle (fig. 2) ;

– étant donné un angle droit $\widehat{xBy}$ de sommet B (fig. 3), si la droite (Bx) traverse le rectangle ABCD, alors nécessairement, la droite (By) est à l'extérieur, et inversement ; donc quelle que soit la paire de droites perpendiculaires Δ et Δ' du plan (ABCD), non parallèles aux côtés du rectangle, on peut réaliser soit la figure 1, soit la figure 2.

2. A PROPOS DES PAIRES DE DROITES PERPENDICULAIRES

D'après l'étude du 1°, nous avons le choix pour compléter la métrique, et la connaissance du rapport des longueurs des côtés du rectangle permet de tracer d'autres paires de droites perpendiculaires. Cette seconde partie propose de montrer de plusieurs façons que dans le plan du rectangle, lorsque ce rapport n'est pas précisé, la connaissance d'une première paire de droites perpendiculaires, en plus de l'orthogonalité implicite des côtés du rectangle, permet d'abaisser d'un point la perpendiculaire sur une droite quelconque.

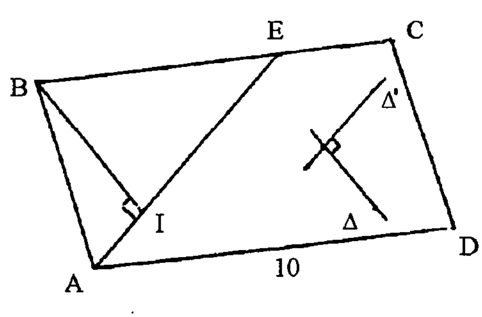

Fig. 2

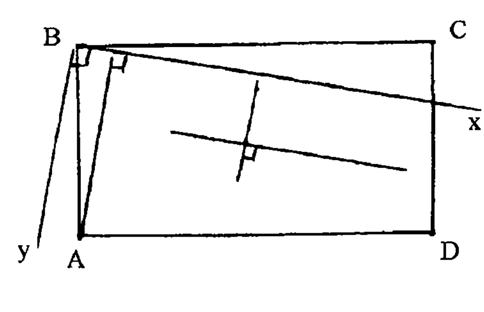

Fig. 3

a) Une construction géométrique

Dans un rectangle ABCD (en perspective), soient deux droites perpendiculaires d et δ quelconques, un point I et une droite Δ qui n'est parallèle à aucune des droites (AB), (AD), d ou δ.

Avec les deux orthogonalités (AB) ⊥ (AD) et d ⊥ δ, on peut envisager que I est l'orthocentre d'un triangle dont la droite cherchée est la troisième hauteur. Les étapes ci-dessous détaillent une construction de la figure en perspective.

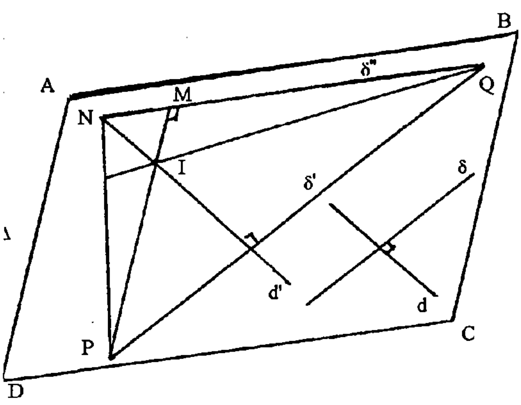

Fig. 4

Etapes de la construction :

- tracer par I, (IM) // (AD) ; soit P l'intersection de Δ et (IM) ;
- tracer par P, δ' // δ ;
- tracer par I, d' // d ; soit N l'intersection de d' et Δ ;
- tracer par N, δ" // (AB) ; soit Q l'intersection de δ' et δ".

(IM) et (IN) sont deux hauteurs du triangle NPQ, donc I est orthocentre de NPQ ; ainsi la troisième hauteur (IQ) est la droite perpendiculaire à Δ passant par I.

b. Une caractérisation algèbrique

Nous reprenons la démarche du 1° qui consiste à tracer deux droites perpendiculaires passant respectivement par A et B ; soient E et F les intersections respectives avec [AD] et [BC], et m la projection de M sur [AB].

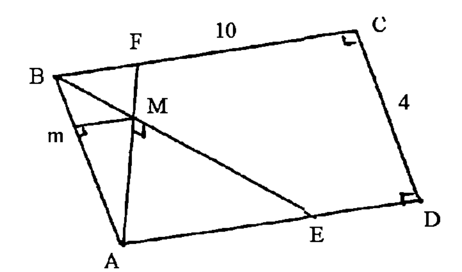

Fig. 5

Avec des triangles homothétiques, $\frac{mM}{BF} = \frac{Am}{AB}$ et $\frac{mM}{AE} = \frac{Bm}{BA}$, et en multipliant membre à membre, $\frac{mM^2}{AE \times BF} = \frac{mA \times mB}{AB^2}$;

or $mA \times mB = mM^2$, donc $\underline{AE \times BF = AB^2}$;

alors $\frac{BF}{BC} = \frac{AB^2}{AE \times BC}$, or BC = AD, donc $\frac{BF}{BC} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \times \frac{AD}{AE}$.

Ainsi la mesure de $\frac{AD}{AE}$ sur la représentation du rectangle permet de calculer $\frac{BF}{BC}$;

par exemple, sur la figure 5, avec AB = 4 et AD = 10, si $\frac{AD}{AE} = \frac{5}{3}$ alors $\frac{BF}{BC} = \frac{4}{15}$; on peut construire F géométriquement.

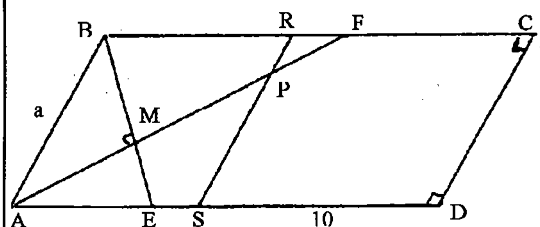

Fig. 6

En fait, tous les calculs précédents peuvent être généralisés algèbriquement, à condition de prendre un même vecteur unitaire sur deux axes parallèles ; ainsi, la formule $AE \times BF = AB^2$ devient $\overline{AE} \times \overline{BF} = AB^2$ (I) ; enfin, si l'on pose AB = a et AD = b dans le rectangle objet ABCD, alors (I) devient $\overline{AE} \times \overline{BF} = a^2$; cette relation ne fait intervenir que la longueur a, mais le calcul de la position de F nécessite la connaissance de $\frac{a}{b}$; en effet, d'après les travaux précédents, $\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \times \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$.

Ces réflexions sont bien en accord avec le travail du 1° :

La connaissance de $\frac{AB}{AD}$ et d'une direction de droite permet d'obtenir la direction de droite orthogonale.

* *Une autre construction de M :* pour construire le point M, il peut être impossible d'obtenir E ou F, dans la mesure où un de ces points est trop éloigné ; alors (fig. 6) il est possible d'utiliser un point P auxiliaire : soient R et S respectivement sur (BC) et (AD) (*cf.* cons.al) tels que sur le rectangle objet, ABRS soit un carré.

Pour la représentation, R et S vérifient $\frac{BR}{BC} = \frac{AS}{AD} = \frac{a}{b}$ (*cf.* cons.rap) ; ce qui permet de construire ces points en perspective ;

alors la droite (AF) coupe la droite (RS) en un point P tel que $\frac{\overline{SP}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AS}}$; ce résultat peut être obtenu soit en déterminant une équation de la droite (AF) dans le repère $(A, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB})$, soit en utilisant (sur la figure objet) une rotation centrée au centre du carré ABRS et d'angle $\frac{\pi}{2}$; la connaissance de E et P permet donc aussi de construire M.

L'algorithme de construction de M est le suivant (voir fig. 7) :

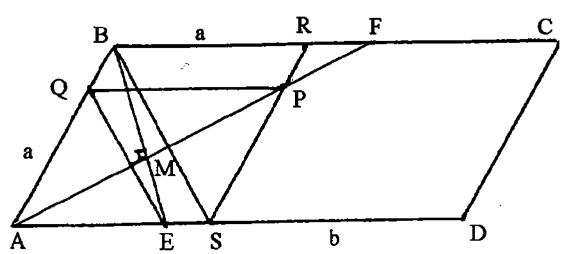

Fig. 7

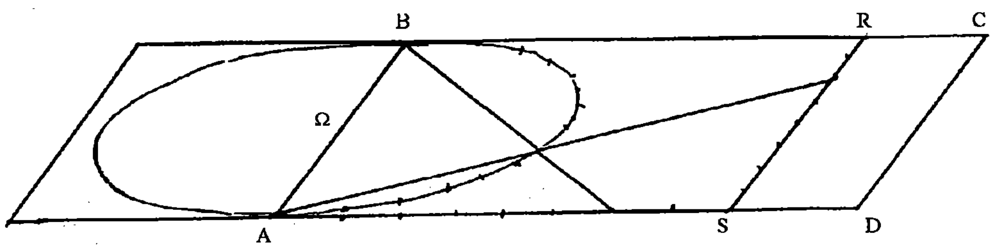

Fig. 8

– placer E (sur [AS]) ;
– construire Q sur (AB) tel que (EQ) // (BS) (*cf.* Thalès) ;
– construire sur (RS) tel que (QP) // (BC) (*cf.* Thalès) ;
– construire M intersection de (BE) et (AP).

Lorsque F appartient à [BR], en utilisant (I), on peut démontrer que E est extérieur à [AS] ; il suffit d'échanger les rôles de E et F.

Le lieu de M lorsque E décrit la droite (AD) est un ellipse : en effet, sur l'objet, M décrit le cercle de diamètre [AB], donc en perspective, sur la représentation, M décrit l'ellipse projection de ce cercle.

Ainsi la construction géométrique de M permet une génération de l'ellipse que l'on peut réaliser par exemple sur CABRI.

La figure 8 a été obtenue "à la main" en construisant d'abord les points résultant du partage des côtés de ABCD en huit segments égaux.

L'ellipse a été complétée par la symétrie de centre Ω, milieu de [AB].

Exemple d'utilisation dans une représentation d'un cube (fig. 9)

Dans le cube IJKLMNPQ de côté a et de centre O, soient A,B,T et T' les milieux de [IL],[JK],[IJ] et [KL], et Ω celui de [AB]. D'une part le triangle TOT' est rectangle isocèle en O ;d'autre part, la sphère de diamètre [AB] coupe le plan (IJK) suivant le cercle de diamètre [AB] (voir fig 8).

L'intersection de cette sphère avec le plan diagonal (IJPQ) est le cercle centré en ω projection de Ω sur (IJPQ) ; ω est milieu de [OT], et le rayon du cercle (ω) est $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ (calcul à faire) ; et $\frac{\sqrt{2}}{4}$, rapport des rayons des deux cercles se conserve en projection pour des rayons parallèles.

Avec [αβ] diamètre perpendiculaire à [OT], donc parallèle à [IJ] (*cf.* cons.par), il est possible de placer α et β, ainsi que le carré αβrs (*cf.* cons.rap.) qui permet de tracer des points de l'ellipse, représentation de (ω), avec la même méthode.

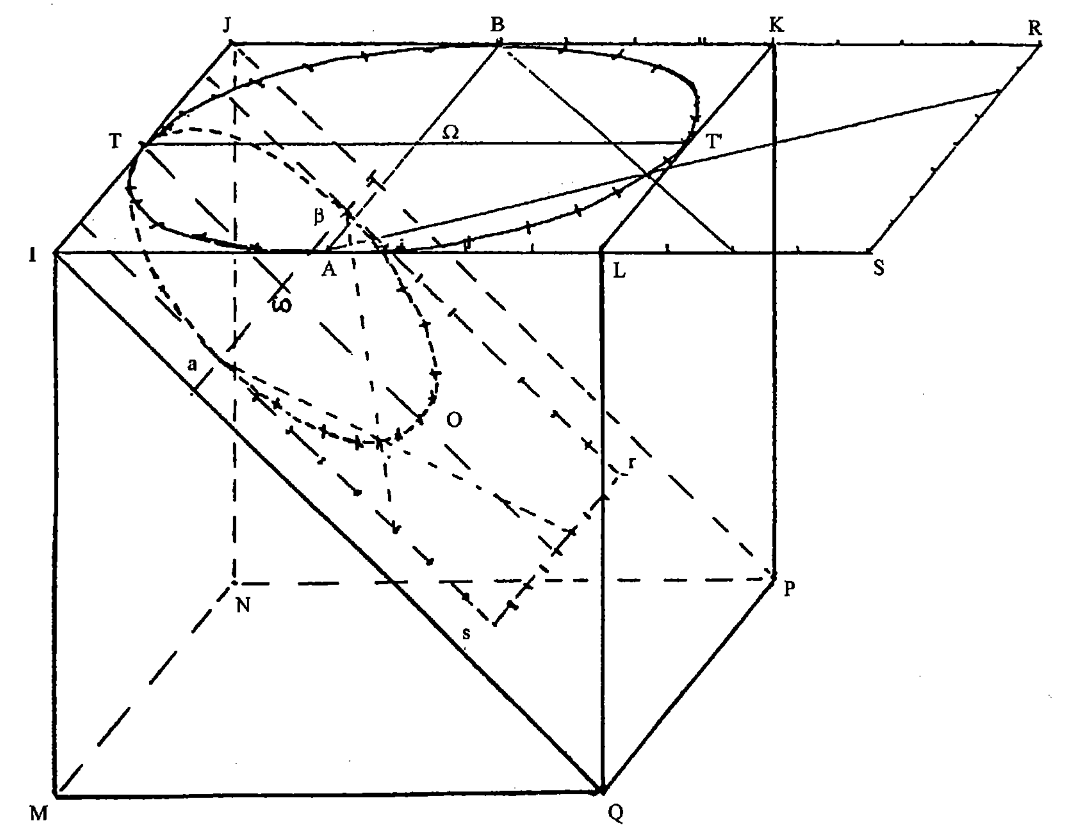

Fig. 9

c. Une caractérisation trigonométrique

Soit $\hat{\theta} = \widehat{MBA}$; $\frac{Bm}{BM} = \frac{BM}{BA}$ (= cos θ) donc $Bm \times BA = BM^2$;

ainsi, $\frac{Bm}{BA} = \frac{Bm \times BA}{BA^2} = \left(\frac{BM}{BA}\right)^2 = \cos^2 \theta$;

après avoir déterminé θ, la relation $\frac{Bm}{BA} = \cos^2 \theta$ (II) permet, en perspective, d'obtenir m (*cf.* cons.rap.) et par suite M (*cf.* cons.par).

Premier exemple : (sur la figure 10). Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, AB = 4 et AD = 10, nous pouvons représenter l'angle $\hat{\theta}$ en perspective : en effet,

$\dfrac{AE}{AB} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, donc

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AB} \times \frac{AB}{AD} = \sqrt{3} \times \frac{4}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}7\ ;$$

d'où le point E, soit approximativement, soit géométriquement, en construisant le rapport $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ sur une droite auxiliaire et en appliquant Thalès.

De plus $\dfrac{Bm}{BA} = \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$; on peut donc construire m, puis M, puis F.

Second exemple : nous reprenons l'exemple du 2°b (voir fig. 5).

Avec $AB = 4$, $AD = 10$ et $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{3}{5}$, alors $AE = 6$ et

$$\cos^2\theta = \frac{BA^2}{BE^2} = \frac{BA^2}{AE^2 + AB^2} = \frac{16}{16+36} = \frac{4}{3}\ ;$$

donc $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{4}{13}$, ce qui permet de placer m, puis M, puis F, alors que précédemment, nous avions d'abord obtenu F.

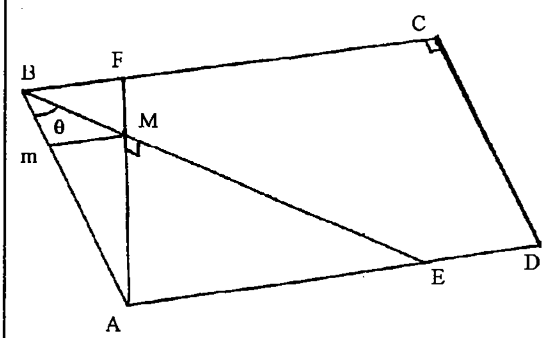

Fig. 10

3. REPRÉSENTER UN SEGMENT DE LONGUEUR DONNÉE

a. Construction fondamentale

Ici encore, pour réaliser la métrique, nous utilisons un carré ABCD en perspective (la figure 11 représente l'objet avant projection), et nous nous proposons de tracer sur une sécante quelconque (AP) les points M et M' tels que, sur l'objet, AM = AM' = AB.

Dans le triangle ABP rectangle en B, soit H le pied de la hauteur issue de B. Alors $AB^2 = \overline{AH} \times \overline{AP}$, donc M et M' doivent vérifier $\overline{AM}^2 = \overline{AM'}^2 = \overline{AH} \times \overline{AP}$ (III). Pour M, par exemple, il est équivalent d'écrire $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AM}}$, égalité de rapports qui se conserve en projection (*cf.* cons.rap), donc sur la figure en perspective comme sur la figure objet, la relation (III) se conserve ; ce qui permet de construire géométriquement M et M' en perspective.

Pour cela, nous utilisons une des constructions classiques de la moyenne

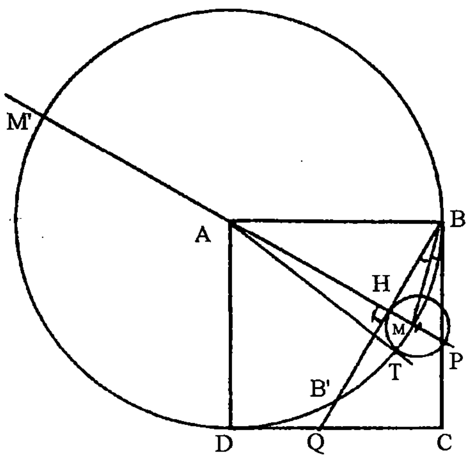

Fig. 11 (objet)

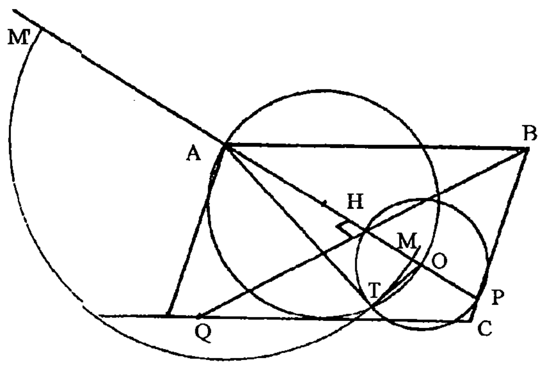

Fig. 12 (représentation)

proportionnelle des deux nombres AH et AP :

Après construction de H comme au 2°b, figure 6, les points M et M' appartiennent au cercle de centre A et passant par T, point de contact de la tangente (AT) au cercle de diamètre [HP] (*).

Cette étude nous permet d'écrire l'algorithme de la construction de M et M' réalisée figure 12.

Algorithme de construction :

Nous partons du parallélogramme ABCD, représentation du carré, et de P, point quelconque de (BC).

(*) $\overline{AH}.\overline{AP} = (\overline{AO} + \overline{OH})(\overline{AO} - \overline{OH}) = AO^2 - OH^2 = AO^2 - OT^2 = AT^2$, avec O milieu de [HP].

Construction de H, représentation de la projection de B sur (AP) (*cf.* 2°b) :

* tracer Q sur (DC) tel que $\frac{DQ}{DC} = \frac{CP}{CB}$
* H est intersection de (BQ) et (AP).

Construction de M et M' tels que $AM^2 = AM'^2 = AH.\ AP$ (III) :

* tracer le cercle (Γ) de diamètre [HP] et de centre O ;
* tracer T intersection de (Γ) et du cercle de diamètre [AO]
* M et M' sont les intersections de (AP) et du cercle (A,AT).

Notes :

* Il ne nous semble pas inutile de redire que cette construction est correcte parce que la relation (III) se conserve en perspective.

* Une autre justification peut consister à prouver que la division (H,P,M,M') est harmonique (*cf.* figure 11), c'est-à-dire que par exemple $\frac{\overline{M'H}}{\overline{M'P}} = -\frac{\overline{MH}}{\overline{MP}}$ (IV), égalité qui elle aussi, se conserve en projection.

Ce résultat est à présent hors programme du Second Cycle du Lycée, alors que l'étude proposée ci-dessus est accessible même à un élève de Première scientifique.

Une justification peut consister à prouver que les droites perpendiculaires (BM) et (BM') sont bissectrices de l'angle $\hat{B}$ du triangle HBP : en effet, si nous appelons B' la seconde intersection de (BH) avec le cercle (A,AB), comme (BH) est perpendiculaire à (AP), alors (AH) est médiatrice de [BB'] et les deux angles de sommet B qui interceptent des arcs égaux sont eux-mêmes égaux. Le théorème de la bissectrice permet d'obtenir l'égalité (IV) ci-dessus dont (III) est une conséquence.

* Si le support n'est pas un carré, il faut essayer d'inclure la représentation d'un carré, compatible avec ce support ;

par exemple, dans la figure 13, ABC est représentation d'un triangle équilatéral, et sur une sécante quelconque passant par A, le point M est tel que AM = AB = AC = BC ; nous avons utilisé le carré auxiliaire ABIJ avec la méthode ci-dessus.

Soit K le milieu de [AB] et L celui de [JI]. Pour construire correctement ABIJ, nous avons respecté (IJ) // (AB) et (AJ) // (KC) // (BI) (*cf.* cons.par.) et $\frac{KC}{AJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*cf.* cons.rap) ; la construction de L peut se faire approximativement ou bien géométriquement : nous effectuons cette construction au 3°b.

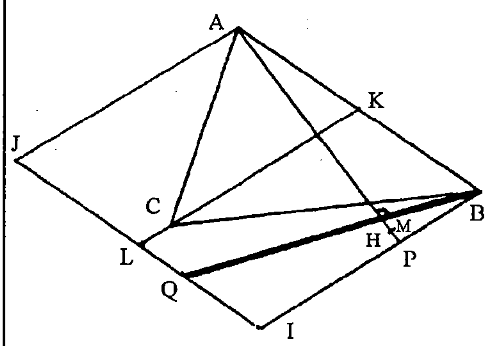

Fig. 13

Il peut surprendre que nous parlions d'approximation : il faut bien distinguer la rigueur de la démarche qui est essentielle, et même indispensable sur CABRI, et les simplifications de construction "à la main", finalement aussi précises parce que le trait de crayon ou l'utilisation du compas sont elles-mêmes sources d'approximations ; dans le même esprit, nous avons placé M presque au milieu de [HP] : c'est dû au fait que H et P étant très proches, le point O de la tangente en T est presque sur le cercle (A).

* Enfin, il existe de nombreux cas particuliers où cette construction auxiliaire du carré est inutile : le paragraphe suivant développe des exemples de telles situations particulières.

b. Des situations particulières

Exemple 1 : *ABC est représentation d'un triangle équilatéral de hauteur (AH) ;*

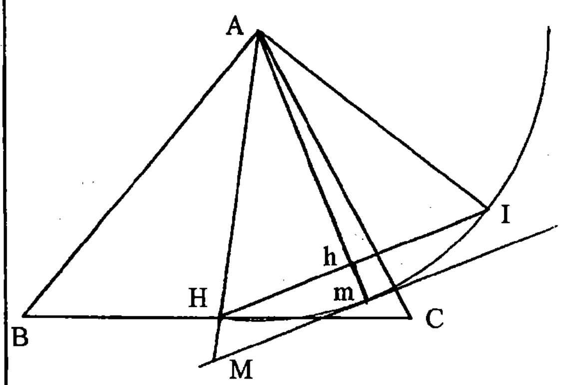

Fig. 14

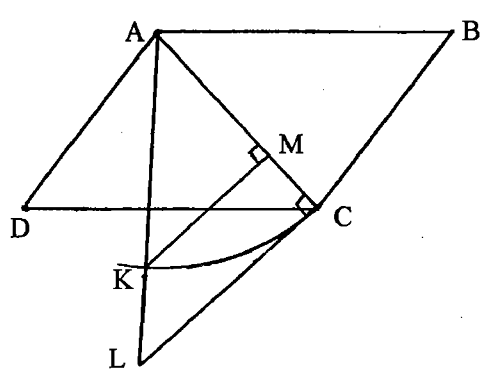

Fig. 15

construire M sur (AH) tel que AM = AB = AC = BC.

Sur la figure objet, AH = AB $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = AM $\frac{\sqrt{3}}{2}$, rapport que l'on peut construire en perspective (figure 14), à l'aide d'un triangle équilatéral auxiliaire AHI de hauteur (Ah) (en vraies dimensions), alors que la représentation ABC n'est pas équilatérale.

Avec le point m intersection de (Ah) et du cercle (A,AH), $\frac{AH}{AM} = \frac{Ah}{Am} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc M est l'intersection de (AH) et de la parallèle à (Hh) passant par *m*.

Exemple 2 : *Dans un carré ABCD en perspective, construire M sur [AC] tel que sur l'objet, AM = AB.*

$\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; pour réaliser ce rapport sur la figure 15, nous avons construit le triangle auxiliaire ALC, rectangle isocèle en C ; avec AK = AC (en vraies dimensions), nous avons $\frac{AK}{AL} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; le point M cherché est donc le projeté de K sur (AC) parallèlement à (CL) (*cf.* cons.rap).

4. QUELQUES PROBLÈMES

Dans tous ces exercices, ABCD est représentation d'un carré, de côté 1, en perspective.

a) P et Q sont deux points quelconques du plan (ABC). Mesurer PQ.

indications : la mesure est nécessairement approchée ; construire un segment de longueur 1 et parallèle à (PQ).

b) [Ix) et [Iy) sont deux demi-droites du plan (ABC) ; tracer en perspective [Iz) bissectrice de l'angle $\widehat{xIy}$.

indications : construire en perspective un triangle ILK, isocèle en I et tel que $K \in$ [Ix) et $L \in$ [Iy).

c) I et J sont deux points du plan (ABC) ; construire en perspective un carré IJKL.
indications : on peut utiliser successivement 2°b et 3°a.

d) I et J sont deux points du plan (ABC) ; construire en perspective un triangle équilatéral IJK.

indications : on peut se ramener au problème c.

e) Dans le plan (ABC), soient un point O et une droite (Δ) ; construire, en perspective, I et J sur (Δ) tels que OIJ soit un triangle équilatéral.

indications : H étant en perspective, projection de O sur (Δ), on peut construire sur (Δ), I' et J' symétriques par rapport à H, puis O' troisième sommet du triangle équilatéral O'I'J' (*cf. cons.par.).*

Dans ces exercices, nous nous sommes limités en général à un carré en perspective, mais il était très possible de partir d'un rectangle, comme dans plusieurs exercices de cette étude, ou même d'un triangle, dans la mesure où les dimensions sont précisées sur l'objet.

EN CONCLUSION...

La mise en valeur de règles précises pour une projection cylindrique nous a permis de préciser les exigences des représentations en perspective.

Dès que les exercices se compliquent, la distinction entre l'objet et sa représentation nécessite une indispensable rigueur ; cette correspondance entre les deux figures a été une bonne motivation pour une série de modules dès la classe de Première Scientifique et même avec certains élèves intéressés de Seconde : dans une activité de représentation l'élève peut être motivé sur un réel projet de réalisation graphique où se combinent les réflexions sur l'espace ainsi que les théorèmes et les méthodes de construction de la géométrie plane, et même des démarches algèbriques.

Ces travaux sont complémentaires à l'emploi de logiciels : l'ordinateur est plus efficace pour réaliser rapidement un beau dessin à l'aide d'outils dont l'utilisateur n'a pas nécessairement à connaître les propriétés ni les origines ; un exercice de construction à réaliser concrètement à la main, à l'aide des outils du géomètre, requiert des qualités différentes d'analyse et de synthèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] "Enseigner la géométrie dans l'espace au Collège et au Lycée", B. Destainville, Brochure APMEP n°99.

[2] "Présentation de [1] et compléments", B. Destainville, Bulletin APMEP n°405 pp. 501-504.

[3] "La perspective cavalière", G. Audibert, Brochure APMEP n°75.

[4] *Enseigner la géométrie de l'espace*, IREM de Montpellier, 1992.

[5] *Petite encyclopédie des mathématiques*, Ed. Didier.