REPERES - IREM . N° 30 - janvier 1998

TANGENTE À UNE COURBE : RÉSOUDRE DES PROBLÈMES PAR LE MOUVEMENT...

André STOLL,
IREM de Strasbourg

La notion de tangente dans une classe de STS

On pourrait croire qu'en arrivant en classe de STS [(1)], un étudiant connaît la définition de la tangente à une courbe. Or, bien qu'ayant étudié le concept de dérivée et de ses applications les deux années précédentes, la grande majorité des étudiants en est restée à la définition euclidienne de la tangente. Rares sont ceux qui pensent la tangente comme “position limite d'une sécante à une courbe”. Il faut d'ailleurs remarquer que cette dernière définition n'a que peu d'applications dans une classe de mathématiques et, depuis l'arrivée des calculatrices graphiques, l'utilisation des tangentes pour donner l'allure d'une courbe a disparu. Rarement le problème de la tangente à une courbe est présenté comme le problème inverse de celui de la quadrature.

Le document ci-dessous a été rédigé en vue d'une utilisation avec des étudiants qui entrent en STS et qui ont déjà manipulé les concepts de dérivée et de tangente. Il propose une construction de la tangente à des courbes non définies par une équation du type y = f(x) en partant de la méthode de G.P. Roberval et une exploitation des relations entre les notions de tangente, de vitesse et éventuellement de dérivée pour résoudre des problèmes de rectification d'une courbe. Il peut également servir à introduire la notion de “dérivée de vecteurs” [(2)].

(1) STS = section de techniciens supérieurs.

(2) Remarquons à ce propos que cette notion indispensable en mécanique n'est pas au programme de mathématiques...

Petit historique du problème des tangentes

"Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle" (Euclide, livre III des *Eléments*). Cette notion de tangente chez les Anciens – une droite qui touche une courbe (3) en un seul point – ne permet pas l'élaboration d'une méthode générale de construction de la tangente. Jusqu'au XVII^e siècle, la recherche de la tangente est un problème qui n'aura été traité que dans le cas du cercle, des coniques par Apollonius ou de la spirale par Archimède.

Au milieu du XVII^e siècle, des préoccupations nouvelles (par exemple en optique ou en cinématique) font évoluer la notion de tangente. Pour de nombreux savants de cette époque dont Roberval, une courbe est la trajectoire d'un point mobile et la tangente à cette courbe n'est autre que la direction du mouvement de ce point. Cette nouvelle approche permet non seulement de retrouver les résultats d'Apollonius et d'Archimède, mais aussi de construire la tangente à d'autres courbes comme la cycloïde, la quadratrice d'Hippias, etc. Cette conception de la tangente où figure implicitement l'idée de vitesse instantanée, est à la base du calcul infinitésimal de Newton, de la notion de dérivée et du calcul différentiel. Elle est d'une remarquable efficacité mais n'est pas applicable à toutes les courbes.

Deux autres savants du XVII^e siècle, Pierre de Fermat et Isaac Barrow proposent une autre approche de la tangente. Sans la définir explicitement, pour Fermat et Barrow, la tangente est la droite qui coïncide avec la courbe sur une partie indéfiniment petite. A la même époque, en considérant la tangente comme la position limite d'une sécante, Torricelli rectifie un arc de spirale logarithmique. Ces méthodes plus générales de construction de la tangente à une courbe sont celles qu'on utilise encore de nos jours.

Parallèlement au développement de la recherche des tangentes, de nouvelles méthodes de quadrature voient le jour au XVII^e siècle. Celles-ci donnent naissance au calcul intégral. A la fin du siècle, Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz reconnaissent le lien entre deux problèmes apparemment indépendants. Pour Leibniz le problème des quadratures est un cas particulier de l'inverse du problème des tangentes et pour Newton, la recherche de distances parcourues par un mobile est inverse de la recherche de la vitesse. Actuellement, nous résumons cette relation fondamentale entre le calcul différentiel et le calcul intégral par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

Dans son ouvrage intitulé *Introduction à l'analyse des infinis* paru en 1748, Leonhard Euler inverse l'ordre épistémologique et construit l'analyse en partant de la notion de fonction pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral : la mécanique et la géométrie qui sont à la base des principales notions d'analyse ne sont plus que des applications de celle-ci !

(3) En fait, jusqu'au XVII^e siècle le concept de courbe n'existe pas. Il y a chez les Anciens une notion de courbe, et une étude de quelques courbes particulières (moins d'une douzaine). C'est précisément la recherche de méthodes d'invention des tangentes qui vont conduire les savants à des conceptions générales *du* courbe.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de propriétez ſpécifiques, qui nous faſſent connoitre les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle generale.

PAR les propriétez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt très générale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répéter.

Depuis Euler, les mathématiciens ont conservé cette nouvelle architecture, qui est également celle des programmes d'enseignement.

La méthode de G.P. Roberval

La tangente (Roberval dit *la touchante*) à une courbe en un point M est la direction du mouvement de ce point. (Voir encadré extrait du *Traité des indivisibles* de G.P. Roberval (1693)).

Remarque 1 : Pour faciliter le travail de recherche de la direction lorsque le mouvement du point M est la conséquence de plusieurs mouvements, nous utiliserons l'outil vectoriel et nous représenterons chaque mouvement par un vecteur – appelé "vecteur vitesse" – qui a pour direction et sens, la direction et le sens du mouvement et pour norme la vitesse linéaire du point [4].

(4) Il est clair que l'outil vectoriel n'est pas du siècle de Roberval. Mais rappelons que ce texte est destiné à des étudiants entrant en STS et que l'un des objectifs est de faire manipuler des notions vues les années précédentes. Il nous fallait donc trouver un compromis entre les objectifs à atteindre et le texte de Roberval. Comme tout compromis, celui-ci est discutable !
D'autre part, il peut être nécessaire de préciser les différentes notions de vitesse intervenant dans ce document.

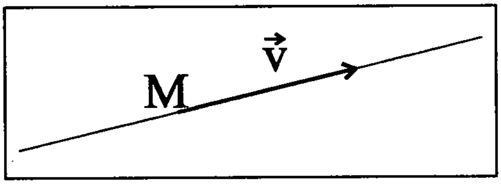


Figure 1

Par exemple lorsque le point M se déplace sur une droite (d), le déplacement de ce point est représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la droite (d), pour sens le sens du déplacement et pour norme la vitesse linéaire de M (*cf.* figure 1).

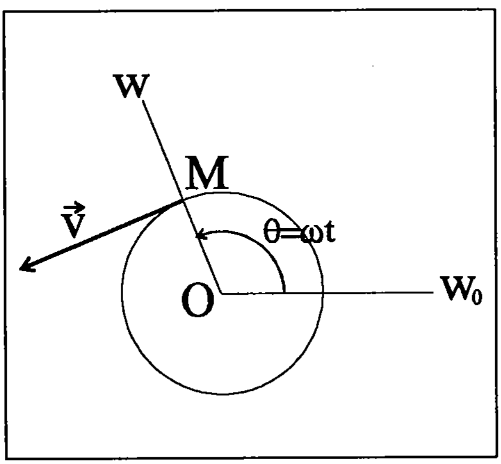


Figure 2

Lorsque le point M est fixe sur une demi-droite [Ow qui pivote autour du point O avec une vitesse angulaire ω (exprimée en rad/s), le point M décrit un cercle de centre O et de rayon OM. Le déplacement de M est représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la perpendiculaire à (OM), pour sens, le sens de rotation et pour norme la vitesse linéaire de M (*cf.* figure 2).

EXERCICE 1

1. Montrer que dans ce dernier cas, la vitesse linéaire de M est OM.ω.

2. Connaissant le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M, construire le vecteur vitesse d'un point quelconque de la demi-droite [Ow].

Remarque 2 : Lorsque le déplacement de M résulte de la composition de plusieurs mouvements, celui-ci est représenté par la somme des vecteurs représentant chaque mouvement.

Application aux coniques

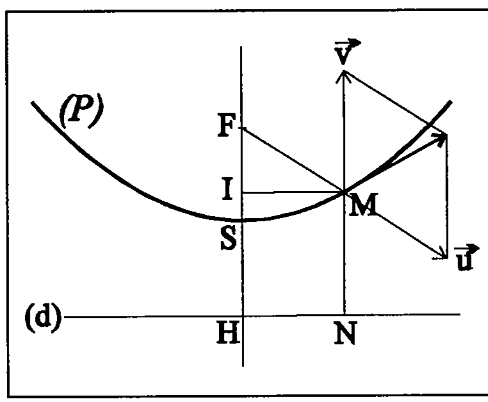


Figure 3

Pour montrer l'efficacité de sa méthode, G.P. Roberval traite quelques exemples dont le premier est la tangente à la parabole.

La parabole (*P*) de foyer F et de sommet S est définie comme étant l'ensemble des points M qui vérifient MF = HI (H est le point de la droite (SF) qui vérifie l'égalité

SH = SF, *cf.* figure 3). Pour Roberval, il est clair que le mouvement du point M décrivant la parabole est composé de *"deux mouvements droits égaux"*. Ceux-ci sont représentés sur la figure par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de direction $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{NM}$ et de même norme (puisque "FM est toujours égal à NM"). La direction de la tangente à la parabole (*P*) en M est alors la direction de la bissectrice de l'angle $\widehat{FMN}$ (5).

EXERCICE 2

1. Soit l'ellipse (*E*) de foyers F et F' (*E* est l'ensemble des points M qui vérifient MF + MF' = 2a) ; montrer que la tangente à l'ellipse est la bissectrice (extérieure) de l'angle $\widehat{FMF'}$. (*cf.* figure 4)

2. De la même manière, chercher la tangente à une hyperbole dont on connaît les deux foyers.

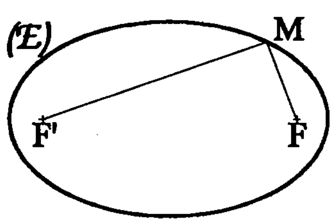


Figure 4

(5) En fait, contrairement à l'affirmation de Roberval, il n'est pas du tout évident que le mouvement du point M se décompose en *"deux mouvements droits et égaux"*. Le lecteur interessé trouvera en annexe une démonstration rigoureuse de ce résultat. Mais nous pouvons toutefois admirer l'efficacité de la méthode.

Application à la cycloïde

Dans l'*Histoire de la Roulette* datée du 10 octobre 1658, Blaise Pascal écrit :

> *La roulette* (aussi appelée trochoïde ou cycloïde) *est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ;* [...] *ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire* [...] *supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*

Soit (C) un cercle de centre I et de rayon r. La cycloïde est la trajectoire d'un point M du cercle (C) lorsque celui-ci *roule sans glisser* sur une droite. Cette droite est appelée la base de la cycloïde (*cf.* figure 5 page suivante).

Le mouvement du point M, le point générique de la cycloïde, peut être décomposé en deux mouvements : un mouvement de translation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MV}$ et un mouvement de rotation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MU}$. (*cf.* figure 5).

EXERCICE 3

1. Préciser la direction et le sens de ces deux vecteurs et montrer que "le roulement sans glissement" se traduit par l'égalité $\|\overrightarrow{MU}\| = \|\overrightarrow{MV}\|$.

2. En déduire un vecteur directeur $\overrightarrow{MT}$ de la tangente à la cycloïde lorsque le point M n'est pas en C.

3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{MT}$ lorsque le point M est en C ?

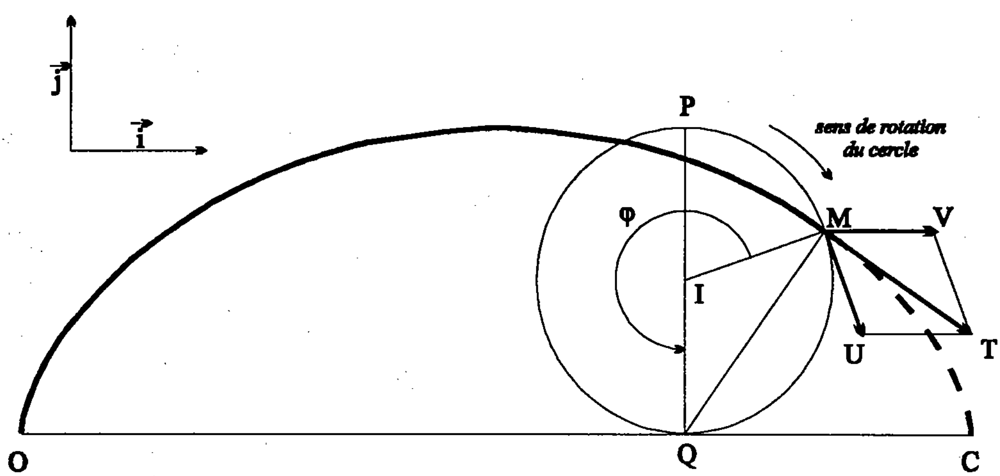


Figure 5
Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité : $OQ = \widehat{QPM}$

4. Montrer que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QP}\right)$ est la moitié de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IP}\right)$.

En déduire que les droites (MQ) et (MT) sont orthogonales et que la normale à la cycloïde en M est la droite (MQ).

Application à la spirale d'Archimède

Dans le *Traité des spirales*, Archimède définit la spirale de la manière suivante : *"Lorsque une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira une spirale."*

Soit O un point fixe du plan et [Ow] une demi-droite qui pivote autour de O à la vitesse angulaire constante de un tour par seconde ; sur cette demi-droite, un point M se déplace à la vitesse de 2 cm/s. A l'instant t = 0, [Ow] est confondue avec [Ox] et le point M est en O (*cf.* fig 6).

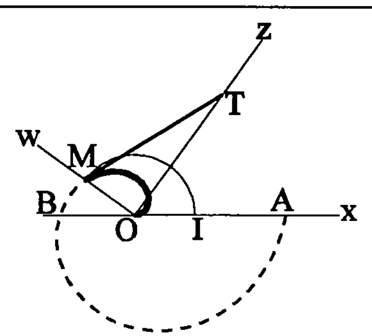


Figure 6

EXERCICE 4.

1. Construire en un point quelconque de la spirale les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ représentant respectivement le déplacement de M sur la demi-droite [Ow] et le mouvement de rotation de la demi-droite.

2. En déduire le vecteur vitesse $\vec{S}$ de M et la tangente à la spirale en M.

Soit le cercle de centre O de rayon OM et T l'intersection de la tangente à la spirale en M avec la demi-droite [Oz] qui est orthogonale à [Ow] en O ; montrer que la longueur OT est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.

Rectification d'une courbe

La connaissance du vecteur vitesse peut servir à rectifier c'est-à-dire à "calculer" la longueur de cette courbe.

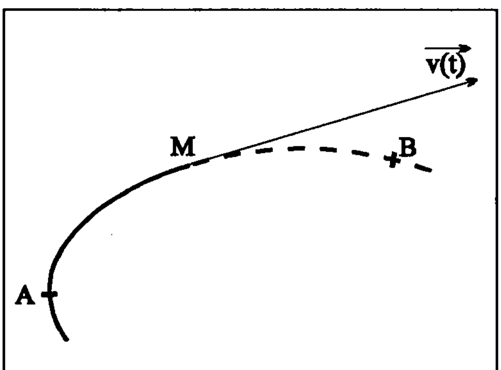


Figure 7

Par exemple, pour calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ de la figure 7, supposons connue la vitesse $v(t) = \| \vec{v(t)} \|$ du point mobile M à chaque instant t. Posons $s(t) = \widehat{AM}$.

Alors, par définition, on a [(6)] :

$$\dot{s}(t) = v(t)$$

et, lorsqu'il est possible de trouver une primitive de v(t), il est possible de calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$:

$$\widehat{AB} = s(t_B) - s(t_A)$$

où t_A et t_B désignent les instants où le mobile est respectivement en A et en B.

Application à la longueur d'un arc de cycloïde

EXERCICE 5

Supposons que la vitesse angulaire ω du cercle (C) (en d'autres termes $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) est constante. Exprimer la norme du vecteur $\vec{MT}$ et la vitesse du point M en fonction de la variable t et montrer que :

$$\widehat{OM} = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right) = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)^2$$

Et en particulier : $\widehat{OC} = 8r$.

(6) La notation $\dot{S}$ désigne la dérivée de s par rapport à la variable t : $\dot{S} = \frac{ds}{dt}$.

Application à la rectification approchée d'un arc de spirale

Dans le cas de la spirale d'Archimède, il n'est pas facile de trouver une primitive de v(t). On peut dans ce cas chercher une valeur approchée de la manière suivante.

Avec les données du § ci-dessus :

$U = \| \vec{U} \| = 2$ cm/s

$\omega = 1$ tour par seconde $= 2\pi$ rd / s

d'où $V = \| \vec{V} \| = OM.\omega = 4\pi t$ cm/s

Les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ étant orthogonaux, on peut écrire :

$$v(t) = \| \vec{S} \| = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{4 + 16\pi^2 t^2}$$

La fonction $t \longrightarrow v(t)$ est croissante, donc la distance parcourue entre deux instants t_1 et t_2, $t_1 \leq t_2$, est comprise entre $v(t_1).(t_2 - t_1)$ et $v(t_2).(t_2 - t_1)$.

EXERCICE 6

A l'aide d'une calculatrice, trouver un encadrement des distances parcourues par le point M entre les instants 0 et 0,1 s ; 0,1 et 0,2 s ; ... ; 0,8 et 0,9 s ; 0,9 et 1,0 s.
En déduire une valeur approchée de la longueur de l'arc de spirale $\overset{\frown}{OA}$.

Application à l'épicycloïde

Définition : soit (C) et (C') deux cercles de centres O (fixe) et Ω, de rayons R et r ; le cercle (C') *roule sans glisser* sur le cercle (C), M un point quelconque sur (C') ; La trajectoire de M est appelée "épicycloïde" (*cf.* figure 8).

EXERCICE 7

1. Construire la tangente à l'épicycloïde en un point M quelconque et montrer que la normale en M est la droite (MP).
2. Montrer que la longueur d'une arche d'épicycloïde est : $\left(1 + \frac{r}{R}\right)$
(Une arche de l'épicycloïde correspond à un tour complet du cercle (C'))

Application à la quadratrice d'Hippias

Définition

Soit $\overset{\frown}{AB}$ un quart de cercle de centre O et de rayon 1 ; Deux points mobiles, P et Q, partent à l'instant t = 0 du point A pour se diriger respectivement vers B, en restant sur le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$, et vers O, en suivant le segment [AO]. Les vitesses des deux points sont constantes et telles que P arrive en B et Q en O à l'instant t = 1.

La quadratrice d'Hippias est la trajectoire du point M, le point d'intersection de [OP] et de la parallèle à [OB] passant par Q (*cf.* figure 9).

Construction de la quadratrice d'Hippias

Il est facile de construire autant de points de cette courbe que l'on souhaite en construisant des bissectrices d'angles et des médiatrices. (*cf.* figure 10). Mais la construction à la règle et au compas d'un point quelconque est impossible.

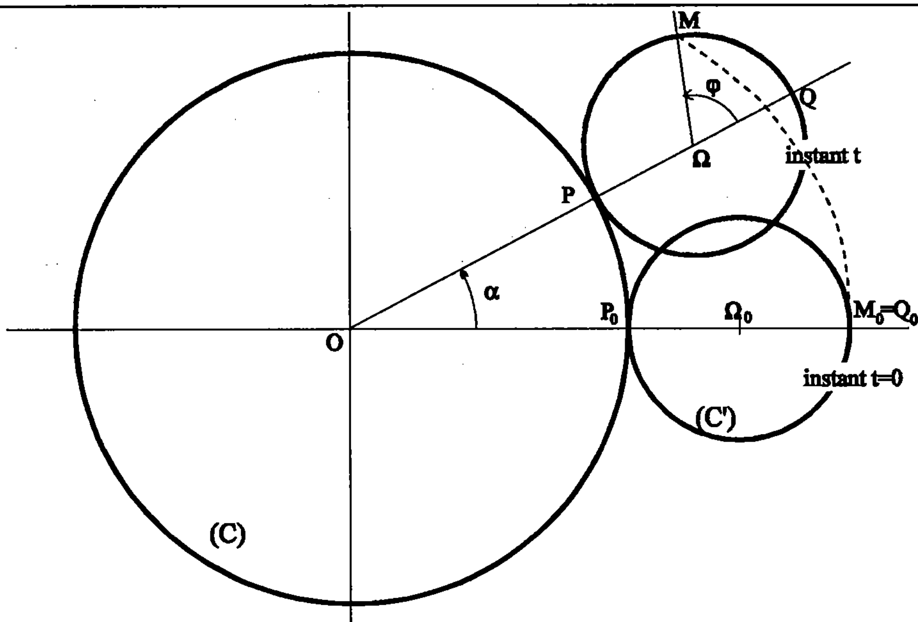
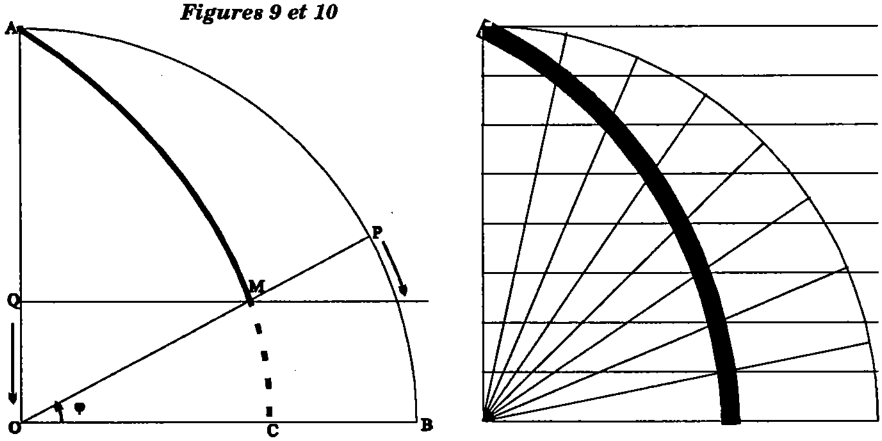


Figure 8

La condition de roulement sans glissement s'exprime par : $\widehat{P_0P} = \widehat{QM}$ soit, à l'aide des angles : $R\alpha = r\varphi$

Figures 9 et 10



Tangente à la quadratrice d'Hippias (*cf.* figure 11)

(On appelle $\overrightarrow{MU}$ un vecteur tangent à la quadratrice en un point quelconque M.)

Supposons le problème résolu...

On considère le vecteur $\overrightarrow{MU}$ comme le vecteur vitesse du point mobile M. Celui-ci se décompose de deux manières différentes :

1. $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MV}$ où $\overrightarrow{MH}$ représente la vitesse horizontale du point M et $\overrightarrow{MV}$ la vitesse verticale.

2. $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MT}$ où $\overrightarrow{MN}$ représente la vitesse normale au segment [OP] du point M et $\overrightarrow{MT}$ la vitesse suivant [OP].

EXERCICE 8

1. Montrer que $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{AO}$

2. En supposant connue la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, construire le vecteur vitesse $\overrightarrow{PR}$ du point P et en déduire le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

3. Par projection sur (MV), montrer que $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{NV}$.

4. En déduire la construction de $\overrightarrow{MT}$ puis de $\overrightarrow{MU}$.

EXERCICE 9

Le but de cet exercice est de trouver le point d'intersection C de la quadratrice avec [OB].

1. Montrer que lorsque le point M est en C, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MV}$

2. En déduire que :

$$OC = \frac{1}{\overset{\frown}{AB}}$$

Si on savait construire le point C de la quadratrice, on saurait construire un segment de longueur égale à un quart de cercle, et, par suite, on saurait rectifier le cercle. Malheureusement nous ne savons pas construire le point C.

Toutefois le résultat ci-dessus est intéressant car il nous permet de trouver « la limite quand y tend vers 0 de $\frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)}$ »

EXERCICE 10

1. Exprimer, en fonction de t, l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}\right)$ et l'ordonnée du point Q.

2. Soit $\binom{x}{y}$ les coordonnées du point M ; exprimer $\frac{y}{x}$ en fonction de φ et montrer que $x = \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)}$.

3. En déduire : $\lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)} = \frac{2}{\pi}$

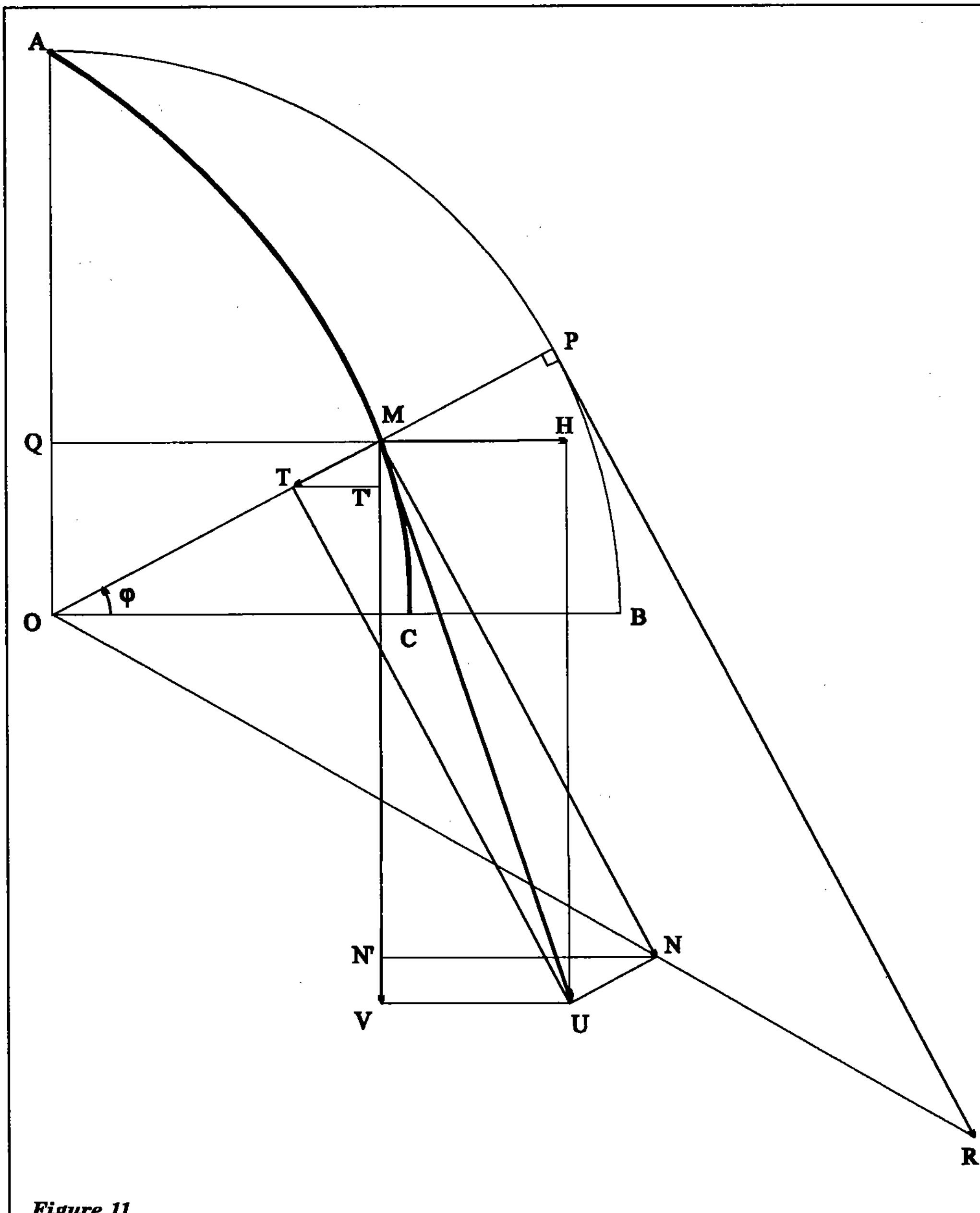


Figure 11

Remarque : trisection d'un angle et quadrature du cercle

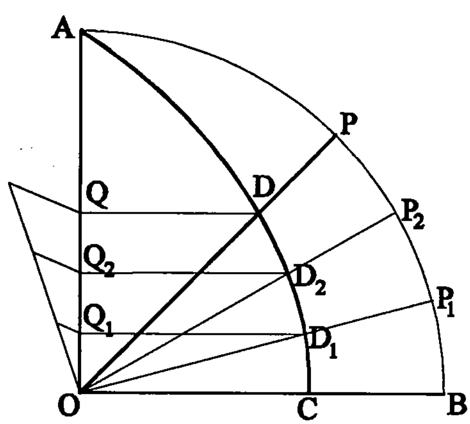


Figure 12

C'est probablement en cherchant la solution du problème de la trisection d'un angle (7) que Hippias d'Elis eu l'idée de cette courbe.

En effet, pour réaliser la trisection de l'angle $\widehat{BOP}$, on prend le point d'intersection D de la quadratrice avec [OP] et le point Q correspondant sur [OA] (*cf.* figure 12). Puis on partage le segment [OQ] en trois segments de même longueur : $QQ_1 = QQ_2 = Q_2Q$. Les parallèles à (OB) menées par Q_1 et Q_2 coupent la quadratrice en D_1 et D_2 .

(7) Rappelons que le problème de la trisection d'un angle consiste à partager, à la règle et au compas, un angle donné en trois angles égaux.

EXERCICE 11

1. Montrer que les trois angles

$$\widehat{BOD_1}\ ,\ \widehat{D_1OD_2}\ ,\ \widehat{D_2OD}$$

sont égaux.

2. En déduire que :

$$\widehat{BOP_1} = \widehat{P_1OP_2} = \widehat{P_2OP}$$

Montrer que la quadratrice permet, en fait, de partager un angle en "n" angles égaux où n est un entier naturel quelconque.

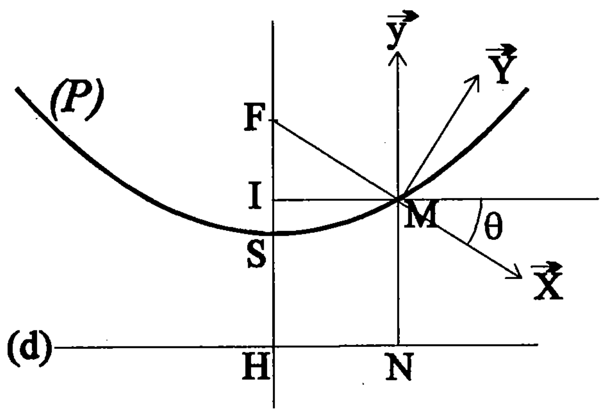
D'autre part, l'égalité $OC = \dfrac{1}{\widehat{AB}}$ montre que si on savait construire le point C (à la règle et au compas !), on saurait rectifier (donc carrer) le cercle. D'où le nom de cette courbe.

CONCLUSION (brève) :

La méthode de G.P. Roberval a très probablement permis aux mathématiques du XVII^e siècle de faire des progrès. De la même manière, cette méthode peut aider des étudiants à (mieux) saisir la notion de tangente et ses applications. Méthode "intuitive" par excellence, elle est parfaitement adaptée à nos élèves tout en leur montrant son insuffisance et la nécessité d'élaborer de nouveaux outils.

ANNEXE 1

La tangente à la parabole est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMN}$.



Pour démontrer ce résultat, on peut bien sûr chercher une équation cartésienne de la parabole et utiliser le calcul différentiel. Cette méthode n'est pas celle que nous adopterons dans la suite car elle n'est pas dans l'esprit de la méthode de Roberval. Nous essaierons par contre de décomposer le mouvement du point M en "*deux mouvements droits et égaux*".

Soit $\vec{X}$ le vecteur unitaire porté par (FM), $\vec{Y}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire et θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{IM}$ et $\vec{X}$: $\theta = \left(\vec{IM},\vec{X}\right)$. Supposons que le point I se déplace sur la droite (SF) à la vitesse constante v et, qu'à l'instant t = 0 il se trouve en S. On a par conséquent : $\overline{SI} = vt$ et $\overline{FM} = \overline{HI} = vt + p$ en posant : $p = \overline{HS} = \overline{SF}$.

Par dérivation de l'égalité : $\vec{FM} = \overline{FM}.\vec{X}$, on a, en appelant $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point M :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{FM}}{dt} = \frac{d(\overline{FM})}{dt}\vec{X} + \overline{FM}\frac{d\vec{X}}{dt} = v\vec{X} + \overline{FM}\frac{d\vec{X}}{dt} \quad (*) .$$

Or :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{X}}{dq}\frac{dq}{dt} = \dot{q}\vec{Y} \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} = \frac{1}{\cos\theta}\vec{y} - \tan\theta\,\vec{X}$$

En reportant dans (*), on a :

$$\vec{V} = \frac{\overline{FM}.\dot{\theta}}{\cos\theta}\vec{y} + \left(v - \overline{FM}.\dot{\theta}.\tan\theta\right)\vec{X}$$

D'autre part : $\sin\theta = \dfrac{\overline{FI}}{\overline{FM}} = \dfrac{\overline{FI}}{\overline{HI}}$. D'où en dérivant : $\cos\theta.\dot{\theta} = \dfrac{2vp}{HI^2}$ et par suite :

$$\frac{FM.\dot{\theta}}{\cos\theta} = \frac{FM.\cos\theta.\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{2vp}{\overline{HI}.\cos^2\theta}$$

$$v - FM.\dot{\theta}.\tan\theta = v - \frac{(\overline{HI}.\cos\theta.\dot{\theta})\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{v.\overline{HI}.\cos^2\theta - 2vp\sin\theta}{\overline{HI}.\cos^2\theta} = \frac{2vp}{\overline{HI}.\cos^2\theta}$$

En effet :

$$\overline{HI}.\cos^2\theta = \overline{HI}(1-\sin^2\theta) = \overline{HI}\left(\frac{HI^2 - FI^2}{HI^2}\right) = \frac{(\overline{HI}-\overline{FI})(\overline{HI}+\overline{FI})}{\overline{HI}} = \frac{2.\overline{HF}.\overline{SI}}{\overline{HI}}$$

et :

$$v.\overline{HI}.\cos^2\theta - 2vp\sin\theta = v.\left(\frac{2.\overline{HF}.\overline{SI}}{\overline{HI}} - 2p\frac{\overline{FI}}{\overline{HI}}\right) = \frac{v}{\overline{HI}}.\left(4p.\overline{SI} - 2p.\overline{FI}\right) = \frac{2pv}{\overline{HI}}\left(2.\overline{SI} - \overline{FI}\right) = 2pv$$

Finalement :

$$\vec{V} = \frac{2vp}{\overline{HI}.\cos^2\theta}\left(\vec{y} + \vec{X}\right)$$

Ce qui prouve que la tangente à la parabole en M est effectivement la bissectrice de l'angle $\widehat{FMN}$.

Autre méthode :

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, l'égalité $\overline{FM} = \overline{HI}$ peut s'écrire :

$$\vec{FM}.\vec{X} = \vec{HI}.\vec{y} = \vec{HM}.\vec{y}$$

En dérivant (nous sommes très loin de Roberval...) :

$$\vec{V}.\vec{X} + \vec{FM}.\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}.\vec{y} + \vec{HM}.\frac{d\vec{y}}{dt}$$

Or :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{FM}.\frac{d\vec{X}}{dt} = 0 \quad \text{car } \vec{X}.\vec{X} = 1 \quad \text{donc} \quad \vec{X}.\frac{d\vec{X}}{dt} = 0$$

D'où :

$$\vec{V}.\vec{X} = \vec{V}.\vec{y}$$

Appelant $\overline{v_1}\,\vec{X}$ et $\overline{v_2}\,\vec{y}$ les composantes de $\vec{V}$ suivant $\vec{X}$ et $\vec{y}$, cette dernière égalité peut s'écrire :

$$0 = \left(\overline{v_1}\vec{X} + \overline{v_2}\vec{y}\right)\left(\vec{X} - \vec{y}\right) = \left(\overline{v_1} - \overline{v_2}\right)\left(1 - \vec{X}.\vec{y}\right)$$

Et, comme les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, on a :

$$\overline{v_1} = \overline{v_2}$$

D'où le résultat de Roberval : le mouvement de M se décompose en *“ deux mouvements droits et égaux ”*.

ANNEXE 2

La tangente à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

La méthode est la même que ci-dessus.

En prenant $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs unitaires de $\vec{FM}$ et $\vec{F'M}$: $\overline{FM} = \vec{FM}.\vec{u}$ et $\overline{F'M} = \vec{F'M}.\vec{u}'$

En dérivant l'égalité

$$\vec{FM}.\vec{u} + \vec{F'M}.\vec{u}' = 2a$$

on a :

$$\vec{V}.\left(\vec{u} + \vec{u}'\right) = 0$$

Par suite, le vecteur vitesse $\vec{V}$ peut se décomposer suivant $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ et ses composantes sont opposées, d'où le résultat sur la bissectrice extérieure.