REPERES - IREM. N° 30 - janvier 1998

UNE TRANSFORMATION OUBLIÉE QUI SORT DE L'ORDINAIRE : L'INVERSION

Gérard KUNTZ
IREM de Strasbourg (*)

INTRODUCTION

Les différentes transformations ponctuelles qui sont proposées aux élèves tout au long du collège et du lycée possèdent des vertus rares (et précieuses) dans la grande famille des transformations ponctuelles : elles CONSERVENT les formes, les angles géométriques ou orientés, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, le contact. L'élève qui subit l'énumération, puis la démonstration répétitive de ces propriétés, finit par se dire qu'elles sont la règle. Cette erreur de perspective explique l'ennui, perceptible en Première et Terminale, face à des démonstrations de théorèmes considérés comme "évidents" par accumulation. Rien de tel, pour réveiller l'intérêt, que de proposer aux élèves une transformation ponctuelle qui ne soit pas systématiquement conservatrice, par exemple l'inversion. Elle fut longtemps enseignée en Terminale, avant l'émergence de l'outil informatique, puis injustement oubliée. Elle peut être étudiée, grâce à l'informatique, dès la Seconde. On se contente, à ce niveau, d'observer, de décrire et d'établir quelques propriétés liées à sa définition. En Première, la démarche théorique peut partiellement expliquer et justifier certaines images informatiques étonnantes. En Terminale, l'inversion est un excellent sujet de travaux dirigés, en relation avec les nombres complexes par exemple [1].

(*) Cet article a été publié une première fois dans *L'Ouvert*.

(1) Les élèves de Seconde (et même de Première Scientifique...) ont de la peine à entrer dans une démarche mathématique demandant plusieurs étapes et la construction de savoirs intermédiaires. L'informatique permet de MONTRER d'emblée les images d'une courbe et de sa transformée. Elle crée un choc visuel qui peut éveiller l'intérêt, puis l'attention pour l'indispensable et difficile étape d'interprétation et de d'explication des images. C'est son mérite principal. Il est parfaitement possible de faire sur le sujet un

Le texte qui suit a été proposé à une classe de Première S du lycée Couffignal à Strasbourg qui bénéficie d'un enseignement d'informatique appliquée aux mathématiques [(2)]. L'article relate les temps forts de l'activité, les commente, évalue sa pertinence et en propose des prolongements.

UNE TRANSFORMATION ORIGINALE : L'INVERSION [(3)].

O est un point fixe *donné* du plan, k est un réel *donné* non nul, (O,i,j) est un repère orthonormé. I(O,k) est la fonction du plan dans lui-même, définie ainsi : Au point M du plan, I(O,k) associe le point M' tel que :

a) O, M, M' soient alignés.

b) $\overline{OM} * \overline{OM'} = k$ [(4)].

1°) Montrez que la condition b) est équivalente à $\overrightarrow{OM} * \overrightarrow{OM'} = k$.

2°) Quel est l'ensemble de définition de I(O,k) ? Y a-t-il des points invariants ? Précisez-les.

---

travail intéressant sans aucun moyen informatique, on le verra à la fin de l'article. Mais il faut alors construire des outils adaptés au problème (la puissance d'un point par rapport à un cercle et la cocyclicité sont des détours obligés) et disposer de bien plus de temps que pour l'activité en environnement informatique. Certains aspects du travail présentés dans l'article disparaissent alors (transformation et mouvement, inverses de courbes autres que des droites ou des cercles), mais l'essentiel demeure : il existe des transformations qui transforment vraiment les figures.

(2) Deux heures par quinzaine en demi-classe. L'activité décrite a pris deux séances de deux heures (la rédaction du compte-rendu est comprise dans cette durée).

(3) L'activité décrite s'est déroulée à l'extrême fin de l'année 95/96. L'ensemble du travail devait se faire impérativement en deux séances de deux heures. Il fallait donc mettre en œuvre un logiciel que les élèves connaissent bien et qui ne supposait pas de nouvel apprentissage. Graph'x répondait à ces conditions. Le Géomètre aurait demandé un travail sur les propriétés du triangle rectangle (ou de Thalès) qui, des expériences antérieures l'ont montré, rallonge singulièrement l'activité.
Le choix du point de vue analytique résulte donc de contraintes informatiques circonstancielles.
Mais la première partie du texte (avant l'établissement des formules analytiques de l'inversion) fait appel à la seule DÉFINITION : les points invariants, la bijectivité, l'image d'un point s'approchant du pôle ou s'éloignant à l'infini, tout cela se fait AVANT toute étude analytique (le passage par la définition est d'ailleurs le plus simple pour conclure) et sans aucun moyen informatique (chaque chose en son temps). La réflexion préalable (en environnement papier-crayon) est une condition indispensable pour expliquer les images à venir.

(4) Commentaire d'Henri Lombardi : "Je pense qu'il faudrait remplacer k par R^2 pour des raisons d'homogénéité et pour mettre en valeur le rôle du cercle des points fixes, de rayon R. Il faudrait, dans la partie théorique, guider les élèves en leur demandant de démontrer que les conditions a) et b) (avec M distinct de O) équivalent à : $OM' = (R^2/OM^2)\ OM$. Cette forme est plus géométrique, donc plus parlante que celle obtenue en résolvant des systèmes d'équations (raisonnement très délicat si on le veut rigoureux, dans le cas où une des coordonnée est nulle). Toutes les méthodes sont bonnes, mais certaines sont plus faciles parce que plus significatives. Le fait que l'inversion est involutive (donc bijective) est facile à prouver. Vu l'importance de cette propriété, elle devrait faire l'objet d'une question".

3°) Pour toute la suite, on prendra k = 2.

a) A partir de la définition de I(O,2), comment évolue M' quand M s'approche de O ? Quand M tend vers O ? Quand M s'éloigne de O ? Où se trouve M' quand M est très loin de O ?

b) Soient (x,y) les coordonnées de M, (x',y') celles de M'. Calculez x' et y' en fonction de x et y.

4°) Sous Graph'x, tracez une droite D ne passant pas par O. Tracez l'image de D par I(O,2). Conjecture ?

Que se passerait-il si D contenait O ?

5°) Tracez un cercle ne contenant pas O. Quelle est son image par I(O,2) ?

6°) Tracez un cercle passant par O. Quelle est son image par I(O,2) ?

7°) Quelle est l'image de la parabole d'équation $y = x^2 - 0.5$

8°) Appliquez I(O,2) à des courbes qui vous paraissent intéressantes dans ce contexte (expliquez pourquoi).

Quelques précisions techniques en début de séance

Le logiciel Graph'x possède une qualité rare : il permet de transformer une courbe C1 définie pas son équation, en une courbe C2 par simple introduction des formules mathématiques de la transformation. Si T transforme M(x,y) en M'(x',y') tel que x' = f(x,y) ; y' = g(x,y), il suffit d'écrire l'équation paramétrique de C2 sous Graph'x : x(t) = f(x1,y1) ; y(t) = g(x1,y1). Le logiciel interprète x1 et y1 comme coordonnées du point courant de la courbe 1 (C1) : il trace donc point par point la courbe 2, image de C1 par T (*le tracé point à point* doit être demandé au logiciel : il est pédagogiquement très important, comme nous le verrons plus loin) (5).

Quelques exemples présentés à la classe entière grâce à la tablette de rétroprojection suffisent pour que le principe de l'activité soit compris.

Il faut encore préciser que la courbe initiale peut être introduite en machine indifféremment sous forme cartésienne ou paramétrique. Un rappel sur l'équation paramétrique du cercle n'est pas inutile... Le tout prend environ dix minutes en début de séance.

Une analyse *a priori* de l'activité

Elle est prévue pour deux séances de deux heures. Elle donnera lieu à un compte-rendu écrit. Elle débutera par une partie théorique, sans laquelle l'activité informatique est

(5) Remarque d'Henri Lombardi : "Graph'x (comme la plupart des grapheurs) transforme correctement les courbes paramétrées (ou facilement paramétrisables). Il n'en est plus de même avec les courbes algébriques planes réelles en coordonnées cartésiennes. La version actuelle de Maple est très mauvaise pour les courbes non paramétrées présentant des singularités, même avec des degrés faibles.
L'inversion augmente *a priori* le degré et fournit donc un moyen amusant de trouver des courbes paramétrisables de haut degré (on peut par exemple transformer une parabole ou une hyperbole successivement par plusieurs inversions de centres distincts convenablement choisis)".

impossible (établissement des formules de l'inversion). Elle nécessite une approche géométrique subtile ou la résolution d'un système d'équation avec deux paramètres, ce qui rendra sans doute une aide orale nécessaire.

L'observation préalable du déplacement relatif de M et de son image M', est un moment capital pour comprendre la transformation. Les points proches de O ont une image lointaine et les points lointains une image voisine de O. Cette observation permet d'interpréter les images informatiques obtenues.

La partie informatique ne présente pas de difficultés importantes. Mais une observation attentive des images calculées peut conduire à d'intéressants prolongements théoriques (non conservation des longueurs, caractère bijectif de la transformation, involutivité, bijection entre tout segment]OA] et une demi-droite etc.). Il n'est pas question d'imposer ces notions aux élèves, mais de prolonger les remarques intéressantes qui ne manquent jamais en environnement informatique.

La dernière question met en valeur la fertile imagination ludique des élèves pour les amener à créer des images en totale rupture avec les courbes sages, accessibles à leurs moyens théoriques. La notion de transformation prend alors tout son sens (on modifie vraiment les formes !).

LES TEMPS FORTS DE L'ACTIVITÉ (OBSERVATION ET THÉORIE)

a) Les préliminaires théoriques

Le domaine de définition de la transformation est déterminé sans difficulté. Si k est positif, les points invariants sont définis par $OM^2 = k$ donc par $OM = \sqrt{k}$. Mais une difficulté demeure pour interpréter cette relation. Plusieurs élèves parlent d'un ou deux points invariants : ils imaginent en effet M sur une droite (O, M et M' sont alignés sur ... (OM)) dont ils ne voient pas le caractère essentiellement variable... Certains vérifient le résultat qui les surprend en transformant le cercle finalement mis en évidence dans l'exemple proposé, $C(O,\sqrt{2})$.

Aucun des élèves ne songe à écrire $\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$, puis $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$. (On en déduit la valeur de α, $k/(x^2 + y^2)$ et les formules de l'inversion).

La résolution du système est faite par substitution, sans précaution aucune à propos des dénominateurs (en fonction de la démarche choisie, x ou y figure au dénominateur). Il faut un bon moment d'échanges avec la classe pour mettre en évidence le fait que x et y ne peuvent être simultanément nuls (traduire ainsi l'impossibilité pour M d'être en O ne va pas de soi). Si donc une des substitutions n'est pas possible, l'autre l'est nécessairement, et le dénominateur $x^2 + y^2$ n'est pas nul.

La partie informatique de l'activité peut commencer.

b) Analyse et interprétation d'images informatiques

Les élèves ne cachent pas leur surprise en découvrant à l'écran qu'une droite ne contenant pas O se transforme en cercle. Un élève surpris est disponible pour observer, réfléchir et comprendre.

Le temps et l'image

Une nette dissymétrie entre le tracé de la droite initiale et du cercle est immédiatement perceptible. La vitesse du tracé de la droite est constante, celle du cercle varie très fortement en fonction de la distance du point par rapport à O. Plus précisément le tracé qui commence en O (ou au voisinage) est quasi-stationnaire. On s'éloigne très lentement de O, puis de plus en plus vite, pour y revenir au ralenti et s'y arrêter à nouveau longuement (M se déplace toujours dans le même sens sur le cercle). Cela se traduit, quand le cercle est achevé, par un tracé dont la surbrillance décroit en s'éloignant de O et qui se prolonge par des points isolés (Figure 1). Sur certains écrans, le point image stagne de longues secondes en O, à tel point que les élèves pensent que "rien ne se passe, ça ne marche pas" ! Dans d'autres cas, la stagnation est plus brève, mais ces élèves observent alors que le cercle "ne se ferme pas tout à fait".

On retrouve ainsi un aspect cinématique des transformations que la réduction ensembliste avait fait oublier : elles transforment non seulement des courbes, mais aussi des MOUVEMENTS. L'informatique prolonge ici le rôle des systèmes articulés qui furent historiquement des "machines à transformer".

Etre ou ne pas être sur le cercle

Un zoom sur le cercle autour de O fait apparaître dans tous les cas l'absence, dans l'image, d'un arc contenant O (figure 2). Ce zoom prend un temps considérable (de très longues secondes) dans le cas où le cercle image de l'écran paraissait fermé en O. Sans grande difficulté, les élèves conviennent que O ne peut appartenir à l'image. L'explication immédiate : "O n'a pas d'image" est améliorée : "Pour que l'image soit en O, il faudrait que M soit à l'infini". De manière plus convaincante : "Si OM' est nul, $\overline{OM} * \overline{OM'}$ ne peut valoir 2".

Il reste à comprendre l'absence (à géométrie variable) d'un arc tout entier, de milieu O. Pour cela, il faut se rappeler comment le logiciel traite et transforme les objets géométriques qui lui sont confiés (une activité antérieure a été consacrée à ce sujet essentiel).

Les points qui manquent, proches de O, sont les images de points qui en sont très éloignés. D'où vient leur défection ? Il faut revenir à la notion de droite dans Graph'x : c'est une équation et un intervalle [a,b] de décimaux, c'est-à-dire... un segment ! On comprend alors l'absence de points "très éloignés" ainsi que leurs images : le "trou" constaté chez certains n'est pas une fiction. Mais pourquoi le cercle paraissait-il fermé chez d'autres ? Tout dépend de l'équation de la droite et de l'intervalle introduits en machine par les différents binômes.

Comment fermer le cercle à l'écran ?

L'écran graphique utilisé, de 26 centimètres sur 18, comporte 640 pixels horizontalement et 480 pixels verticalement. Chaque pixel correspond donc, dans la configuration adoptée, à environ 0.04 centimètres. Si donc OM' est inférieur à 0.4 millimètres, M' et O sont confondus sur l'écran. Tous les points M, tels que OM soit supérieur à 50 centimètres, ont une image confondue avec O (les images calculées ne se limitent pas aux images des points de l'écran). Il est donc aisé de fermer le cercle : il suffit de choisir un intervalle assez grand. On comprend aussi l'extrême lenteur du tracé au voisinage de O, où

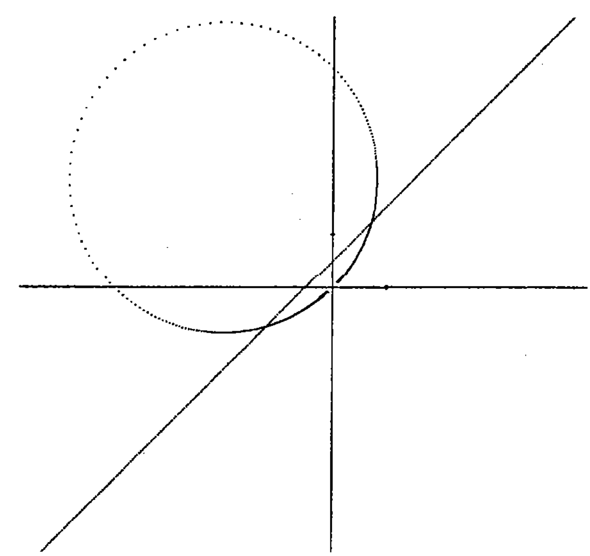

Fig. 1 : Inverse d'une droite ne passant pas par 0

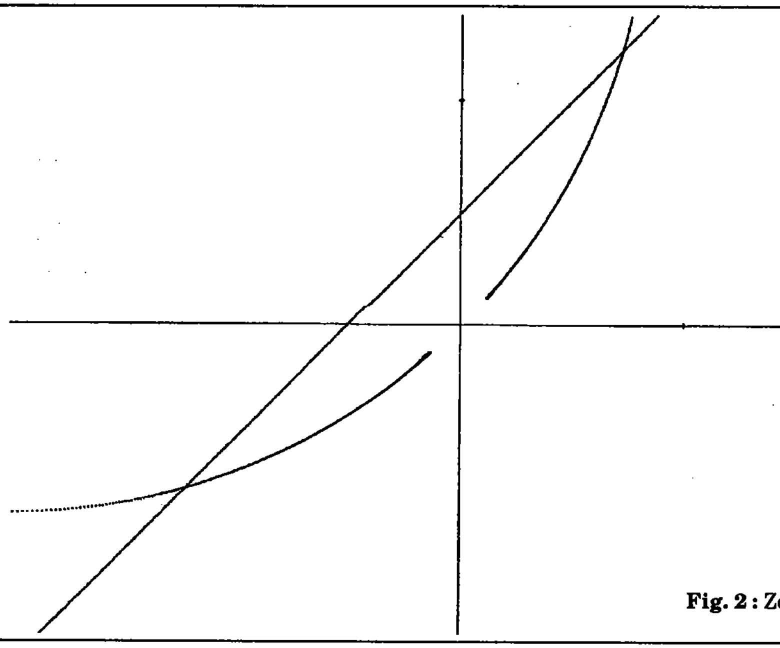

Fig. 2 : Zoom sur figure 1

peuvent se superposer un très grand nombre de points. Le temps de calcul devient alors perceptible, malgré la célérité du micro-processeur. La brèche réapparaît en zoomant sur O, c'est-à-dire en changeant les unités.

Des bavures hautement pédagogiques

Le passage sur table traçante éclaire encore plus l'intéressant processus de réalisation de l'image. Il est pratiquement impossible de tracer point à point sur cet instrument les cercles qui apparaissent fermés à l'écran : le stylet frappe interminablement le point O et génère de grosses bavures d'encre (le nombre de points calculés est égal au nombre d'allers-retours du stylet : il faut bien plus de temps pour baisser et lever le stylet que pour allumer un pixel. *Le temps de la mécanique est fortement dilaté par rapport à celui de l'électronique*. En réduisant l'intervalle, le phénomène s'atténue, mais l'accumulation de points dans le voisinage de O demeure sensible : les bavures, bien qu'inesthétiques en sont un témoignage précieux (figures 1 et 2). L'inégale densité des tracés, qui tire son origine des imperfections techniques, témoigne d'une inégale répartition de points sur le cercle, qu'il convient d'expliquer.

Du segment géométrique au segment informatique

Affinons un peu plus la conception de segment sous Graph'x. A l'équation et à l'intervalle de décimaux, il faut ajouter une notion essentielle : le pas du partage (accessible à l'utilisateur sous Graph'x). Le segment initial est divisé en n segments égaux, dont la longueur commune est le pas. Finalement, du point de vue informatique, le segment est réduit à la suite des coordonnées (décimales) des n + 1 points obtenus en partageant le segment initial. (Sur la figure 1, on distingue parfaitement l'égale répartition des points sur le segment, qui se prolonge d'ailleurs en dehors de la feuille).

On peut maintenant faire comprendre aux élèves l'allure étrange donnée au cercle par la table traçante. Partant de la relation $\overline{OM'} = 2/\overline{OM}$, on remarque que si un point M du segment est éloigné de O, le passage au suivant modifie peu la longueur de [OM], donc celle de [OM'] (M' est alors voisin de O) : d'où l'accumulation de points autour de O. De plus, si M et P sont deux points consécutifs du segment, éloignés de O, l'angle MOP est voisin de 0. Cet angle croît à mesure que M s'approche de O et devient maximal au voisinage de la projection de O sur le segment. Alors, même si [OM'] et [OP'] sont des longueurs voisines, M et P seront nettement séparés, comme le prouve la figure 1 (on peut tracer OM et OP et mettre en évidence M' et P'). *La perte de densité observée quand on s'éloigne de O est autant liée à des phénoménes angulaires qu'à des considérations métriques.*

Des distances élastiques

Le raisonnement qui précède repose sur une observation capitale : le segment et le cercle sont tracés (à l'écran et sur table traçante) en suivant un des deux sens possibles sur chacune des deux figures (pas de retour en arrière). Deux points consécutifs du segment sont donc transformés en deux points consécutifs du cercle. Il est alors clair que l'inversion ne conserve pas les distances. En effet, les distances de deux points consécutifs du cercle varient comme le montre à l'évidence la figure 1.

De plus, *le segment [MP]* formé par deux points consécutifs de la droite initiale a pour image l'arc $\widehat{M'P'}$. Dans ce qui précède, on compare MP et M'P' et non pas la longueur de [MP] et de son image ! De quoi déconcerter des élèves habitués à des transformations moins inventives.

Technique et pédagogie ont partie liée

Certains choix techniques dans l'usage d'un logiciel peuvent avoir des conséquences pédagogiques désastreuses. Pour preuve, la figure 3, réalisée en modifiant dans Graph'x un seul paramètre, la nature du tracé : plus de bavures, une variation de la densité du tracé à peine perceptible. *Le tracé en continu* gagne en esthétique (on pourrait même refermer la brèche autour de O) Mais on a perdu les informations capitales traitées précédemment. Il est illusoire d'opposer les expertises technique et pédagogique : elles sont indissociables.

Si on bougeait la droite ?

Spontanément, certains élèves déplacent la droite à l'écran : le cercle grandit si on la rapproche de O (et devient tout petit si on s'en éloigne). L'idée de limite ayant fait son chemin, la formulation suivante apparaît "le rayon du cercle tend vers l'infini quand la distance de O à la droite tend vers 0". Anticipant la question suivante, certains élèves constatent que si la droite passe par O, "l'image est la droite elle-même". Ils supputent : "c'est un cercle de rayon infini". La manière dont l'image s'élabore à l'écran conforte leur audace. Comme précédemment sur le cercle, le point image stagne près de O, s'éloigne lentement, puis de plus en plus vite sur une des demi-droites d'origine O, réapparaît sur l'autre demi-droite et se dirige vers O d'un pas de sénateur.

Le lien intuitif que ces élèves établissent entre droite et cercle est rendu possible par la transformation progressive de l'une en l'autre que permet l'informatique. La théorie donnera plus tard un contenu à cette perception intuitive. En attendant, il faut affiner certaines des formulations précédentes et traiter de façon théorique (sur le papier) l'image d'une droite passant par O (et privée de O). On comprend alors la façon dont l'image est construite à l'écran.

Réflexions complémentaires à propos des autres images

Toutes les questions délicates et intéressantes ont été abordées dans ce premier exemple, qu'elles soit théoriques ou liées à l'interprétation des images. Nous nous contenterons donc de résumer les remarques essentielles des élèves, dans la suite de ce travail.

Quand on transforme un cercle passant par O (et privé de O) en une droite, les points sont régulièrement répartis sur le cercle et irrégulièrement sur la droite : la régularité a changé de camp !

La question de l'image d'un cercle ne passant pas par O (figure 4) donne lieu à une initiative et à une conjecture intéressantes. Un binôme trace le cercle (I) des points invariants et explique pourquoi il passe par les points communs aux deux cercles. Il permet aussi de distinguer les points et leurs images (un point intérieur à (I) a une image à l'extérieur et réciproquement). Voici la conjecture : un cercle ne passant pas par O et son inverse sont homothétiques dans une homothétie de

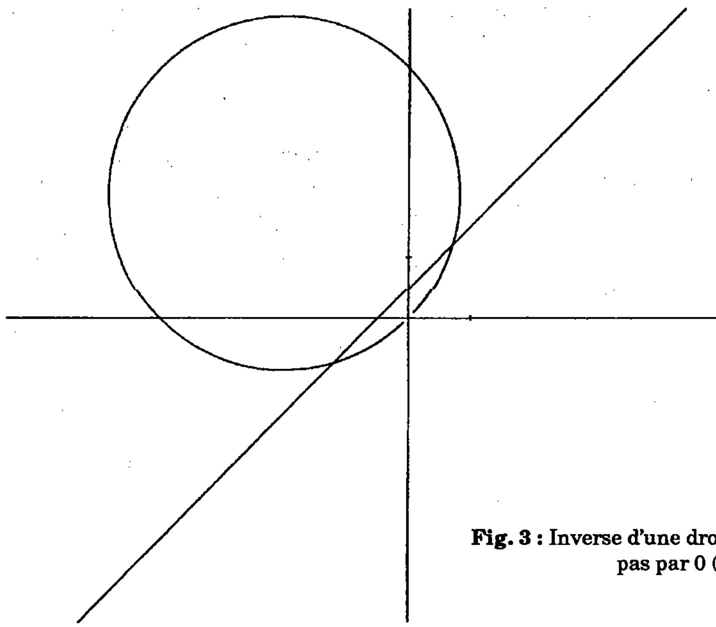

Fig. 3 : Inverse d'une droite ne passant pas par 0 (tracé continu)

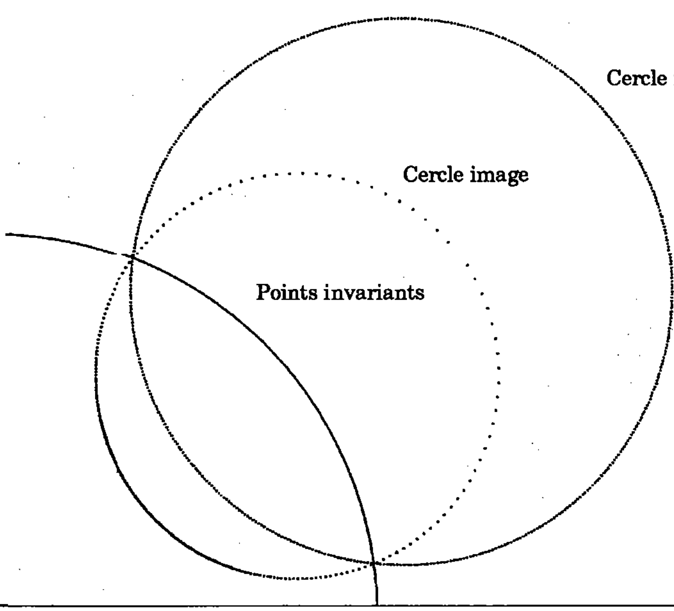

Fig. 4 : Inverse d'un cercle ne passant pas par 0

centre O (la démonstration utilise une inversion de centre O, de rapport la puissance de O par rapport au cercle). La formulation d'une telle conjecture suppose une grande familiarité avec les images informatiques et une bonne connaissance théorique. Enfin, il est intéressant de chercher où se trouvent les régularités de la figure 4 (sur cette figure, l'absence de bavures confirme l'absence d'accumulation de points sur le cercle image, que confirme le raisonnement).

En transformant la parabole, les élèves rencontrent des courbes nouvelles qui les ravissent. L'image ressemble étrangement à une cardioïde (le terme plaît beaucoup)... L'explication de la bavure en O est aisée, ainsi que celle des symétries observées.

Un zoom autour de O montre que (Oy) est tangente à la courbe en ce point (si toutefois on la complète en y ajoutant O). Les élèves s'amusent à translater la parabole pour engendrer des formes étranges.

La dernière question donne libre cours à l'imagination. Deux stratégies se dessinent. Certains introduisent en machine des équations qu'ils compliquent à loisir et ils sont généralement déçus par le résultat (la complication d'une équation n'a que peu de rapports avec l'intérêt de sa courbe représentative du point de vue de l'inversion !). D'autres se disent qu'il serait intéressant de transformer des courbes ayant de nombreuses asymptotes (les "points à l'infini" sont ramenés en O). La trigonométrie en fournit à foison (tan(x), cotan(x), 1/cos(x) par exemple). Leurs résultats sont spectaculaires et s'interprètent aisément. Les différentes branches sont transformées en boucles ayant toutes O en commun et tangentes en O... (en tous cas sur les tracés !) (6)

La figure 6 est obtenue à partir de la courbe d'équation $y = 0.3 + 1/2\cos(x)$. Sept branches (en pointillé) ont été transformées en sept boucles (en trait plein). Il est facile d'établir les correspondances entre branches et boucles. La courbe transformée a été agrandie par homothétie (de rapport 4.5) pour la rendre plus lisible.

c) Et si on se passait d'informatique ?

Une fois l'activité achevée, il est possible d'en imaginer une autre approche. Telle qu'elle est conçue, elle appelle deux questions : qu'apporte l'informatique à ce travail ? Est-il possible de l'envisager sans y faire appel ?

L'article répond à la première question : la machine ne remplace pas les outils traditionnels (la main, la règle ou le compas), elle ouvre de nouveaux espaces.

Il laisse entrevoir la possibilité de mener le même travail en module (déjà en Seconde, mais surtout en Première et en Terminale S) sans aucun recours informatique, par des moyens purement géométriques.

L'étude de l'image d'un point qui s'approche du pôle O, ou qui s'en éloigne indéfiniment, utilise uniquement la défini-

(6) Commentaire d'Henri Lombardi : "Ne serait-il pas bon de faire remarquer que deux directions asymptotiques distinctes donnent deux éléments de contact distincts tandis que deux directions égales donnent le même élément de contact (*cf.* figure 6) ? (l'image d'une hyperbole et d'une translatée seraient très parlantes). Cela donne un résultat assez différent de ce qui se passe avec les transformations perspectives".

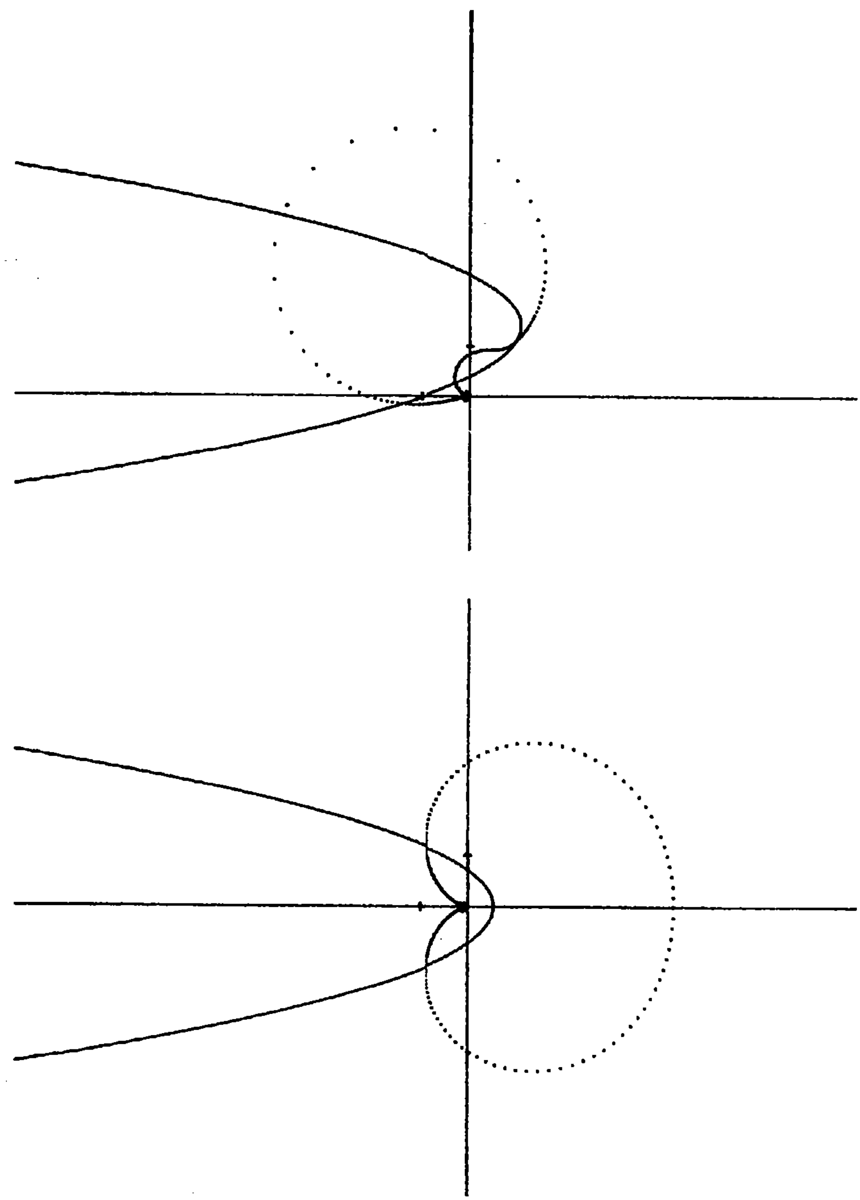

Fig. 5 : Images d'une parabole

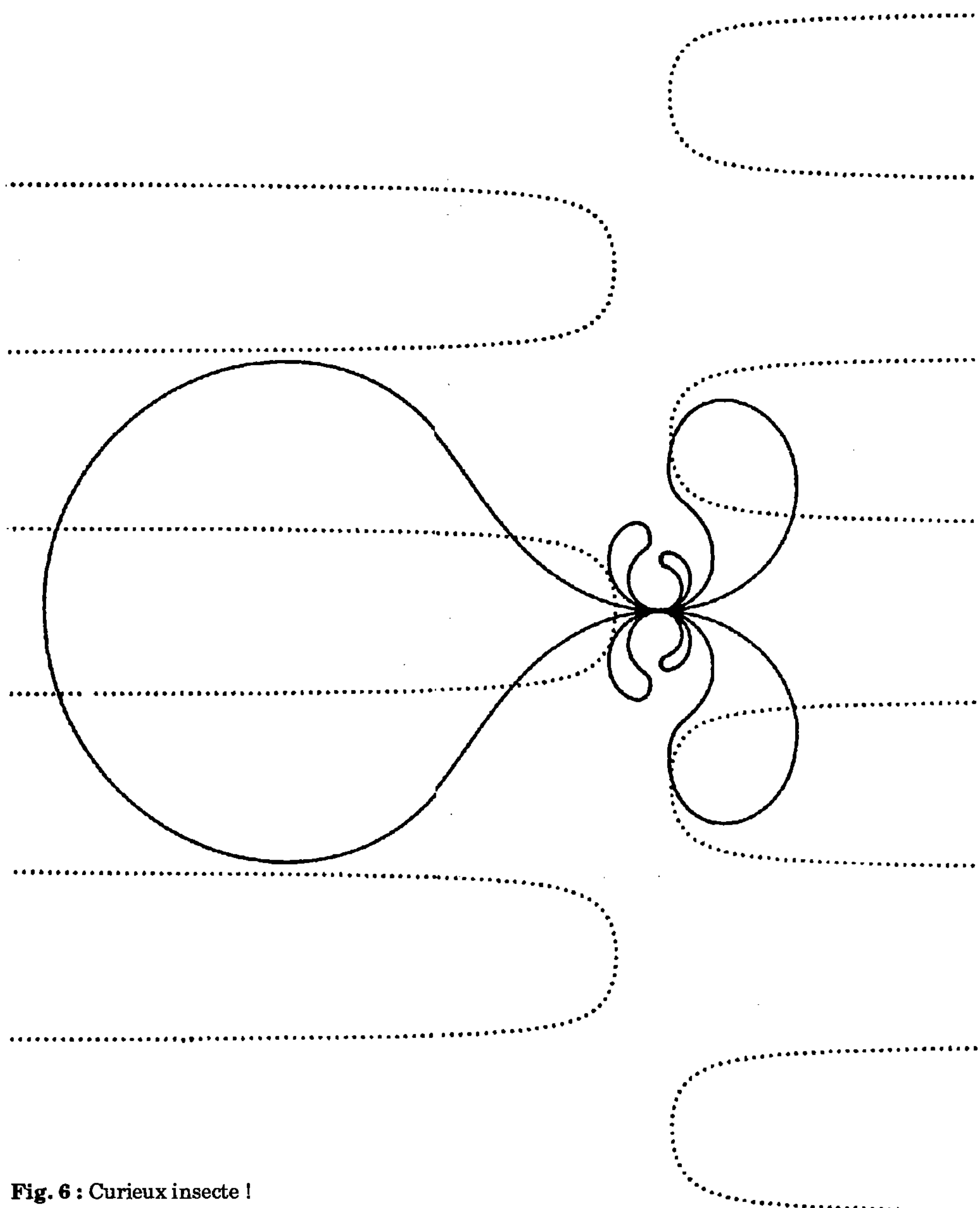

Fig. 6 : Curieux insecte !
Y = 0 . 3 + 1 / (2 cos (x))

tion. Pour montrer la non-conservation des distances, on prend deux points alignés avec le pôle, proches de O. On calcule la position des images : la conclusion s'impose.

Que l'image d'une droite ne passant pas par O ne puisse être une droite se montre aisément : le point le plus éloigné de O de la figure image est l'image du point de la droite le plus proche de O. La figure image est donc toute entière dans un cercle de centre O ! Un raisonnement analogue prouve que si un cercle passe par O, son image ne peut être un cercle (il y a des points aussi éloignés que l'on veut de O sur la figure image).

Le seul outil vraiment indispensable pour une étude plus explicite de l'inversion est la puissance d'un point par rapport à un cercle et la condition de cocyclicité de quatre points qui y est liée : si OM * OM' = ON * ON' et si M,M',N,N' ne sont pas alignés, alors M,M',N,N' sont cocycliques. Ces notions sont souvent traitées en Première comme application du produit scalaire. Grâce à elles, on trouve sans grandes difficultés les images d'une droite et d'un cercle (on passe ainsi des conjectures aux preuves).

Si on ajoute à cela la condition de cocyclicité de type angulaire (elle est au programme de Terminale S), on peut montrer une propriété supplémentaire du plus haut intérêt, qui échappe à l'activité informatique élémentaire : *cette transformation qui ne respecte pas grand'chose conserve cependant les angles géométriques des tangentes aux points communs à deux courbes* (elle conserve en particulier le contact et l'orthogonalité : on connaît l'importance de ces propriétés dans la mise en œuvre de l'inversion). Les développements sur ce sujet se trouvent par exemple dans l'ouvrage de géométrie de Terminale C et E. de Condamine et Vissio (Delagrave 1968), disponible dans les bibliothèques des Irems.

Cette seconde approche de l'inversion est complémentaire de la première. L'idée de la mettre en œuvre naît de l'activité décrite dans l'article : l'informatique (digitale par nature) peut donner envie de faire de la géométrie (analogique par essence) à mains nues.

CONCLUSION : UNE ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE INTENSE

Revenons à l'activité proposée aux élèves. On l'aura constaté, la réalisation et l'interprétation des images précédentes nécessite, de leur part, une activité mathématique intense. Leur familiarité avec l'outil informatique a developpé une observation pertinente des images calculées. Aussi curieux que cela paraisse, la durée devient ici un paramètre intéressant en géométrie (des courbes, on est passé au mouvement). Les allers et retours fréquents entre observation et théorie, entre environnement informatique et papier crayon (ou tableau), et la nécessité de rédiger les observations, les conjectures et les démonstrations, tout cela fait de ces séances un temps fécond de formation scientifique.

Certaines remarques ont été diffusées dans la classe et démontrées (par exemple, l'existence d'un axe de symétrie pour la figure 1). Les questions posées en cours d'activité ont conduit à de courts développements théoriques au tableau. Ainsi, à l'issue de ce travail, les élèves ont à leur disposition les éléments théoriques pour répondre aux questions qui ont émergé des débats : l'inversion est-elle bijective ?

Quelle est sa transformation inverse ? Quelle est l'image d'un segment]OA] ? (l'idée que ce serait une demi-droite a beaucoup intrigué, surtout si la distance OA est très petite). Comment trouver l'équation de la courbe inverse d'une courbe donnée (on pourra alors DÉMONTRER certaines propriétés observées) ?

On le voit, beaucoup d'idées importantes en mathématiques ont été abordées. Elles seront approfondies ultérieurement. Elles pourront être reprises sous l'angle géométrique avec Cabri-Géomètre (ou en se passant d'informatique). A chacun de donner dès maintenant à ce travail les prolongements qu'il souhaite, jusqu'au niveau universitaire (voir l'annexe ci-dessous). Enfin, dans cette classe, le mot TRANSFORMATION a pris un sens nouveau.

BIBLIOGRAPHIE

1. SLOWICK Claude : "Pour une transformation de la didactique des transformations", *Repères-Irem* n°4.
2. BKOUCHE Rudolf : "De la géométrie et des transformations", *Repères-Irem* n°4.
3. BOURGUET Michel : "Cartographie et mathématiques", *Repères-Irem* n°6.
4. LE GOFF Jean-Pierre : *La perspective en Première Scientifique : une certaine suite dans les idées*.
5. DANIEL Jean-Claude : "Géométrie en mouvement", *Repères-Irem* n°18.

Annexe

Des prolongements possibles (très) au-delà du lycée

Dans une critique (très constructive) de cet article, Henri Lombardi suggère d'adopter un point de vue résolument "géométrique" dont voici les grandes lignes.

L'inversion (de puissance positive) est une "symétrie" par rapport au cercle (C) des points fixes. On peut le mettre en évidence de la façon suivante : on prend l'image (C2) d'un petit cercle (C1), voisin de (C) et ne coupant pas (C). On zoome de manière à garder (C1) et (C2) à l'écran. On voit alors (C) presque comme une droite, (C1) et (C2) comme deux cercles presque symétriques par rapport à cette droite.

On peut aussi transformer (C), (C1) et (C2) par une inversion I dont le centre est sur (C) : I(C1) et I(C2) sont alors symétriques par rapport à la droite I(C).

Si (C1) et (C2) coupent (C), un zoom sur une des intersections donnera trois droites dont celle qui correspond à (C) est bissectrice des deux autres. L'inversion I (centrée sur (C)) transforme (C1) et (C2) en deux cercles symétriques par rapport à I(C).

Autre point de vue géométrique : l'inversion est une transformation qui opère sur l'ensemble des cercles et des droites (les cercles généralisés), plutôt que sur l'ensemble des points. Une équation d'un objet de ce type est de la forme :

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$$

((a,b,c,d) est un quadruplet homogène). Une inversion transforme (a,b,c,d) de manière linéaire en conservant l'ensemble des cercles de rayon nul : $b^2 + c^2 - da = 0$. Par trois points distincts, il passe toujours un unique cercle généralisé. On obtient ainsi une autre justification de l'unicité du point à l'infini pour la géométrie de l'inversion. On est conduit à s'intéresser aux faisceaux de cercles généralisés (ce sont justement les droites dans l'espace projectif des (a,b,c,d)) et à leurs transformés, ainsi qu'à l'orthogonalité de deux cercles généralisés (un cercle et un de ses diamètres par exemple).

On peut aussi se débarrasser de l'infini (et de son satané point) en transformant le plan (π) par une inversion de l'espace centrée en dehors de (π). (π) devient une sphère (S) et les inversions de (π) des "symétries-cercles" de (S). Un miracle se produit alors : une symétrie-cercle de la sphère (S) peut être obtenue comme autoperspective de la sphère depuis un centre de perspective P extérieur à la sphère (éventuellement rejeté à l'infini si le cercle est un grand cercle). Quand on a un point P extérieur à la sphère, le cône tangent de sommet P est tangent à (S) selon un cercle (C), ensemble des points fixes pour l'autoperspective de (S) de sommet P. Quant aux points intérieurs à la sphère, ils définissent des autoperspectives involutives de (S), sans points fixes (elles correspondent aux inversion de puissance négative du plan).

Le groupe de Möbius de (S) est le groupe de transformations de (S) engendré par les symétries-cercles. Il opère de manière naturelle sur ses propres involutions sans point fixe, donc sur l'ensemble des points intérieurs à la sphère. On obtient ainsi les isométries du modèle de Beltrami pour l'espace hyperbolique ! En revanche, si on prend le sous-groupe du groupe de Möbius de (S) qui conserve une calotte sphérique (S'), on obtient les isométries du modèle de Poincaré du plan hyperbolique.

Ces remarques pourraient conduire à d'époustouflantes expériences sur ordinateur, à une version spatiale de Cabri-Géomètre et à un article sur la géométrie hyperbolique amusant et relativement facile à écrire (Henri Lombardi est invité à passer aux actes pour *Repères-Irem*).

Et dire que pour certains l'inversion était une transformation élémentaire !