REPERES - IREM . N° 29 - octobre 1997

QUE NOUS APPRENNENT LES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ EN MATHÉMATIQUES ?

Peut-on tirer de l'analyse de ces difficultés des enseignements pour la formation des maîtres ?

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
IUFM Nord-Pas-de-Calais, centre d'Arras
Equipe DIDIREM, Université Paris 7 (1)

Le travail que j'ai réalisé pour ma thèse (Perrin-Glorian 1992) m'a conduite à identifier un certain nombre de phénomènes didactiques particulièrement visibles dans les classes faibles mais qui ne sont pas spécifiques de ces classes parce qu'ils sont inhérents au processus d'enseignement et résultent de la recherche d'un équilibre entre des contraintes contradictoires du système didactique. J'ai essayé, dans le présent article, de repenser le problème des élèves en difficulté autour de quelques grandes questions, de montrer l'utilité de quelques concepts de didactique pour analyser ces difficultés et les diverses contraintes liées à la fonction de l'enseignant avant de caractériser quelques équilibres qui me paraissent fondamentaux et d'en tirer quelques conséquences pour la formation des maîtres.

(1) Cet article reprend en grande partie une conférence faite au stage de formation de formateurs organisé par la COPIRELEM à Rennes en mars 1996.

1. Quand dit-on qu'un élève est en difficulté en mathématiques ? De quelles difficultés parle-t-on ?

La première question est de savoir quand on va dire qu'un élève est en difficulté. Disons tout de suite que je ne vais pas m'intéresser ici aux élèves qui relèvent de l'éducation spécialisée mais aux élèves qui sont censés pouvoir suivre une scolarité normale mais qui ne manifestent pas les compétences attendues. Le critère que j'avais pris pour ma thèse (1992) est celui du retard scolaire qui correspond à un critère institutionnel : l'élève n'a pas accompli le parcours précédent dans le temps prévu par la norme. C'est donc l'indice qu'il a rencontré des difficultés dans les apprentissages précédents, souvent l'indice qu'il continuera à en rencontrer, et de plus un élément qui interviendra dans la suite de l'orientation dans le secondaire : on hésitera à faire redoubler un élève qui a déjà accumulé un certain retard.

J'ai pris ici un indice global et général, c'est un indicateur assez fiable pour donner une idée du niveau d'une classe au collège, sans doute aussi pour repérer rapidement à ce niveau des élèves qui risquent de rencontrer des difficultés. Encore faut-il cerner ces difficultés de façon plus précise et remonter à des causes possibles pour essayer d'agir. Et surtout, il faudrait pouvoir les repérer et agir avant qu'elles ne conduisent au redoublement et au retard scolaire. Les évaluations nationales en CE2, 6^{e} et seconde nous fournissent maintenant un instrument permettant de détecter des difficultés que rencontrent certains élèves et d'essayer d'agir de façon différenciée auprès d'eux. Bien sûr la notion de difficulté est relative : on peut être en difficulté en mathématiques dans une Math Sup du lycée Louis le Grand sans pour autant être objectivement en difficulté pour ce niveau d'études (2). Je ne vais pas m'intéresser ici à cet aspect, non pas que je ne le trouve pas intéressant, au contraire. Un sociologue avec qui je collabore actuellement, S. Broccolichi, a montré dans sa thèse (1994) que la position dans la classe, notamment comme interlocuteur privilégié du professeur, a un effet très important sur la réussite et sans doute sur l'apprentissage si on le juge à travers des résultats à des examens. En gros, à niveau égal, il vaut mieux être en tête de classe dans une classe moyenne que moyen dans une bonne classe. Nous laisserons de côté cette notion de difficulté relative à la position dans la classe et nous prendrons un critère cognitif, mesuré par exemple par les tests nationaux d'évaluation.

Mais qu'est-ce qui, dans la pratique ordinaire de la classe, conduit à ce que certains enfants apprennent et d'autres n'apprennent pas ? Que font-ils en classe ? Qu'est-ce qui différencie, dans la vie de la classe, les élèves qui apprennent de ceux qui n'apprennent pas ? Il me semble que, pour répondre à cette question, il faut rentrer au cœur de la relation didactique qui fait intervenir à la fois le contenu que l'on veut enseigner, les choix de transposition didactique de ce contenu, des facteurs institutionnels et un certain nombre de paramètres concernant l'élève et l'enseignant. Très souvent, quand on veut s'attaquer à la question de l'échec scolaire, on met en avant un des facteurs et on essaie d'agir sur celui-là sans tenir compte d'autres facteurs en fait très imbriqués.

Il me faut préciser tout de suite que je me place ici sur un plan didactique, c'est-à-dire que je ne vais pas mettre en avant les difficultés d'ordre social qui peuvent aller jusqu'à la violence à l'école dont on parle beaucoup en ce moment. Bien sûr ces difficultés ont un effet important sur les apprentissages et les élèves concernés sont souvent aussi des élèves en difficulté sur le plan scolaire. Les facteurs externes sont bien souvent conjugués avec des facteurs internes à l'école. Mais je voudrais essayer de me placer en amont de ces manifestations extrêmes, et la question qui m'intéresse est justement de permettre le meilleur apprentissage possible dès le début de l'école parce que je garde confiance en l'école comme facteur d'intégration sociale. Mais, même en se restreignant au plan didactique, on va souvent trouver l'imbrication de plusieurs facteurs. Quels sont donc les facteurs internes à l'école qui font que certains élèves n'apprennent pas ? Nous allons examiner quelques-uns de ces facteurs et la manière dont ils peuvent interférer pour amener à des sortes de cercles vicieux dont on a du mal à sortir, notamment dans des classes dites faibles.

(2) Première année d'études scientifique à l'Université.

Il me semble en effet que le problème des élèves en difficulté se pose de façon un peu différente dans une bonne classe ou une classe très hétérogène et dans une classe faible. Dans une classe où on a quelques élèves en difficulté, l'enseignant n'a aucune raison de baisser ses exigences et de modifier l'ensemble de son enseignement, il va se régler sur un élève générique, disons ordinaire. On peut penser que l'enseignant proposera des situations suffisamment riches, qui donneront l'occasion d'apprendre. Du moins, on retrouve à ce sujet un problème didactique ordinaire. Concernant les élèves en difficulté, le problème va être la prise en compte différenciée de ces élèves à certains moments pour qu'ils soient en mesure d'engager leurs connaissances, d'autant qu'ils vont se retrouver en position basse dans la classe et risquent de se démobiliser. En revanche, si l'ensemble de la classe est faible, l'enseignant ne peut pas ignorer les élèves en difficulté, mais il va alors être très tenté de négocier les apprentissages à la baisse et de limiter ainsi les occasions d'apprendre pour toute la classe. De plus, les classes faibles ne sont pas pour autant homogènes et les élèves peuvent être particulièrement en difficulté sur des domaines différents, géométrique ou numérique par exemple.

2. Comment se manifestent ces difficultés ?

a) Y-a-t-il, pour ces élèves, des difficultés spécifiques sur les contenus ?

Les recherches que j'ai menées sur les décimaux et les aires m'ont fait penser que non, encore qu'il faille quelque peu préciser ce propos.

Quand je dis non, je veux dire par là que je n'ai pas trouvé d'erreur spécifique, de difficulté qui ne soit connue comme telle. Arrêtons-nous un instant sur les difficultés les plus marquantes concernant ces contenus, révélées à travers un test (3) que j'ai fait passer à 10 classes du CM2 à la 4^e. Outre celles, bien connues, sur l'ordre des décimaux dont je viens de parler, le placement de nombres décimaux ou fractionnaires sur un axe gradué où l'unité n'est pas 1 cm est difficile dans toutes les classes et l'erreur la plus fréquente consiste à considérer la partie décimale comme un nombre de millimètres, voire à produire des adaptations plus ou moins rusées de cette règle. Il faut remarquer que, dans les classes faibles de CM observées où il y a eu dans l'enseignement une forte interaction entre placement sur un axe gradué et écriture fractionnaire ou à virgule, les exercices sur l'ordre des décimaux ont été plutôt mieux réussis que dans les classes de 6^e de ZEP mais que le placement sur l'axe gradué reste aussi mal réussi. Le fait que les élèves l'aient pratiqué a peut-être eu un effet sur leurs conceptions concernant l'ordre sans qu'il soit retenu par eux en tant qu'objet. Notons d'ailleurs que la représentation des nombres non entiers sous forme de longueur n'apparaît que dans les classes où elle a été utilisée dans l'apprentissage. Dans les autres classes, on a des parts de tarte ou des rectangles pour les fractions et aucune représentation pertinente pour des décimaux comme 2,3 sauf la règle graduée dans une classe où elle a été suggérée par l'enseignant. Dans la classe de 6^e observée où des révisions sur les décimaux avaient eu lieu en début d'année, le recours à la règle de comparaison des décimaux comme couples d'entiers augmente entre décem-

(3) Voir article dans *Petit x* n°10 (1986) ou *Cahier de didactique* n°24 de l'IREM de Paris 7.

bre et mai. Il semble ainsi qu'on retrouve les difficultés connues mais que ces difficultés sont plus résistantes et réapparaissent indéfiniment.

Quand je dis qu'il n'y a pas de difficulté spécifique, je veux dire aussi que si l'on veut introduire une notion nouvelle et qu'on s'appuie sur une situation d'action, pourvu que celle-ci ne mette en jeu que des connaissances de base, disponibles chez les élèves, on ne voit guère de différences dans les procédures mises en jeu par les élèves au niveau de l'action. C'est le cas dans la situation (4) de mesure d'un segment, que nous avons utilisée dans de nombreuses classes avec R. Douady. Il faut remarquer que ce n'est plus vrai à un autre niveau, comme la seconde, où les situations d'action demandent la maîtrise d'outils plus complexes comme le calcul algébrique. Je mettrai d'ailleurs dans un instant quelques nuances supplémentaires à ce propos. Disons que dans une situation où les outils en jeu sont maîtrisés, on ne voit pas de différence au niveau de l'action mais c'est le réinvestissement dans d'autres contextes qui pose problème : on a le sentiment de toujours repartir de zéro. Les extensions de sens semblent particulièrement difficiles. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Disons donc pour le moment que l'analyse du contenu nous semble valable pour tout le monde. Cependant, les élèves faibles vont nous fournir une espèce de loupe sur l'analyse du contenu en nous permettant de repérer des difficultés qui passeraient inaperçues avec d'autres élèves mais qui sont de réelles difficultés dans l'acquisition de ce contenu parce que correspondant par exemple à des sens différents. On est ainsi conduit à une analyse plus fine du contenu. Inversement, pour l'apprentissage des élèves faibles, on sera peut-être amené à distinguer des étapes, des paliers qu'on passerait peut-être rapidement avec d'autres élèves, en particulier au niveau du transfert d'une situation dans une autre et ainsi à faire apparaître des enjeux intermédiaires au niveau de chaque type de situations et à ménager la possibilité de reprises d'enjeux anciens.

Pas de difficultés spécifiques sur les contenus donc, mais des difficultés plus résistantes et des enjeux intermédiaires à marquer. Il me faut cependant un peu nuancer mon propos. Un des exercices proposés dans le test a eu un score particulièrement bas dans les classes faibles : c'est celui qui concerne les problèmes de groupements multiplicatifs, qui me paraissait *a priori* un prérequis pour la compréhension des décimaux. Il s'agissait de l'exercice suivant.

> Dans une entreprise, on range les œufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.
> On met 6 œufs dans chaque boîte.
> On met 6 boîtes dans chaque carton.
> On met 6 cartons dans chaque caisse.
> Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.
> Combien d'œufs ont été emballés ?

Les erreurs dominantes consistent à oublier éventuellement des facteurs 6 (par

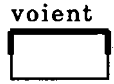
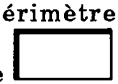
(4) Elle consiste à demander aux élèves de dessiner un segment arbitraire sur une feuille de papier puis d'envoyer un message à un récepteur qui doit dessiner un segment de même longueur. Les élèves ne peuvent utiliser la règle graduée mais émetteur et récepteur disposent de bandes de papier de même longueur.

exemple $2 \times 6 + 3 \times 36 + 50 \times 36$) ou à faire des multiplications successives comme $50 \times 3 \times 2 \times 6$. Mais la difficulté repérée sur ce problème particulier est peut-être à chercher à un niveau plus général. J'ai repris ce problème dans des classes faibles de CM2 et j'ai pu constater que les difficultés pour représenter les données étaient très importantes : beaucoup d'élèves de ces classes n'arrivent pas à représenter le contenu d'une caisse sans une aide importante, et cette représentation, une fois réalisée, leur permet de résoudre le problème. Les élèves en difficulté en mathématiques ont donc peut-être des difficultés spécifiques au niveau de la représentation et dans l'articulation de plusieurs registres de représentations (Duval, 1995).

b) Y-a-t-il d'autres difficultés spécifiques ?

Les difficultés liées à la représentation et les difficultés langagières sont en effet souvent importantes chez les élèves en difficulté en mathématiques. Elle s'ajoutent aux difficultés en mathématiques et elles contribuent sans doute aussi à les créer et à les amplifier. Ce sont des difficultés de nature cognitive qui risquent de se manifester dans toutes les disciplines mais particulièrement en mathématiques où il est souvent nécessaire d'articuler le langage en français (avec de plus des conditions d'emploi spécifiques) et de nombreux registres de représentation (Duval, 1995). D'autres difficultés, d'ordre cognitif ou non, sont peut-être elles aussi, si ce n'est spécifiques, du moins plus fréquentes chez les élèves en difficulté. Nous en examinons quelques-unes maintenant.

* Une autre difficulté, qui fait intervenir à la fois les connaissances mathématiques, les compétences cognitives et aussi d'autres éléments que nous évoquerons ensuite, est la difficulté à changer de cadre ou de point de vue.

Prenons un exemple : on peut chercher des rectangles dont le périmètre est 22 cm en cherchant des nombres dont la somme est 11. Si le problème a été posé dans le cadre géométrique, certains élèves peuvent ne pas traduire tout de suite le problème de cette façon, même si on leur parle de demi-périmètre, parce qu'ils se réfèrent à une vision géométrique, et qu'ils voient le demi périmètre comme  et non comme  : le demi-périmètre est associé à un demi rectangle et non à la somme de 2 longueurs.

D'autres élèves, plus nombreux, s'accrochent au contraire au cadre numérique et résistent à utiliser un autre cadre ou des représentations, quitte à laisser tomber une partie de l'information. Par exemple, s'ils cherchent un carré dont la mesure de l'aire est 30, qu'ils ont essayé 5 ou 6, ils se focalisent sur le 30 plutôt que sur le carré et la réponse 5×6 les satisfait : on a presque un carré. Il sera difficile dans ces conditions de faire dévolution (5) du problème de l'approximation du côté du carré ou de son existence. On trouve aussi dans ce problème la difficulté à prendre en compte deux informations en même temps, ce que demande le changement de cadres.

(5) La dévolution est le processus par lequel l'enseignant fait en sorte que l'élève engage sa responsabilité dans la résolution d'un problème qui devient alors le problème de l'élève et accepte les conséquences de ce transfert momentané de responsabilité, notamment au niveau de l'incertitude que cela engendre pour lui. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

Une autre des raisons qui vont rendre difficile le changement de cadres, nous y reviendrons, est que les élèves peuvent ne pas avoir suffisamment de connaissances disponibles dans un des cadres en jeu, numérique ou géométrique suivant les élèves : les classes faibles sont en fait souvent aussi hétérogènes, les connaissances des élèves sont éparses et ils n'ont pas tous les mêmes difficultés sur le contenu. Remarquons d'ailleurs que les passages d'un cadre à un autre ne se font pas indifféremment dans les deux sens : il est plus facile en général de faire un transfert dans le numérique d'un problème géométrique que le contraire. Si l'on cherche un rectangle d'aire et périmètre donnés, on aura en général traduction du problème dans le cadre numérique alors que la recherche de deux nombres connaissant la somme et le produit sera plus rarement traduite dans le cadre géométrique.

La difficulté à changer de point de vue se manifeste aussi par le fait de continuer à utiliser les procédures adaptées à l'exercice précédent lors d'un changement d'activité et, inversement à difficilement réutiliser dans un nouveau contexte une notion introduite dans un contexte particulier.

* Nous touchons là peut-être aussi la conception que les élèves peuvent avoir de leur métier d'élève et de ce qu'est leur activité au cours de mathématiques. S'ils pensent qu'il faut faire un problème pour connaître la réponse, voire pour avoir une bonne note, qu'un problème fait n'est plus à faire, qu'il n'a plus rien à nous apprendre, les élèves risquent de ne pas retenir ce qu'il faut pour utiliser cette résolution dans la recherche d'un autre problème. Apprendre dans une situation quelque chose de réutilisable dans une autre situation nécessite une certaine projection sur l'avenir, sur un champ de possibles, et suppose une certaine confiance en ce que l'on peut produire soi-même pour traiter une situation nouvelle. Il s'agit non seulement de faire pour réussir une tâche mais de faire pour pouvoir refaire une autre fois, dans des conditions voisines.

* A cela va s'ajouter la question des rapports avec le réel : les problèmes proposés à l'école élémentaire sont très souvent issus de la vie quotidienne, ce qui contribue à attirer l'attention sur la réponse au problème et non sur la méthode de résolution, surtout si on est dans la disposition de chercher à avoir des solutions plutôt que de chercher à comprendre. De plus, la logique du quotidien ne coïncide pas toujours avec la logique du cours de mathématiques, notamment par tous les implicites qu'elle véhicule et les élèves sont plus ou moins préparés par leur milieu à utiliser une autre logique.

* En outre, je ne parle pas ici de la représentation de soi que peut avoir l'élève et d'autres éléments affectifs qui vont interférer avec le cognitif.

Ces difficultés, d'ordre cognitif ou autre, que rencontrent souvent les élèves en échec à l'école ont été repérées depuis un certain temps et on a même essayé d'agir directement à ce niveau en parlant par exemple d'apprendre à apprendre ou en développant des enseignements méthodologiques. Sans nier l'intérêt qu'il peut y avoir à mettre parfois l'accent sur des méthodes de travail, nous pensons que le développement des capacités cognitives se fait à travers l'apprentissage de contenus de connaissance. Nous allons donc maintenant essayer d'analyser ce qui se passe, comment elles peuvent intervenir ou se renforcer au cours de l'apprentissage d'une notion mathématique.

3. Pourquoi ces élèves n'apprennent-ils pas ? Quelle analyse didactique peut-on faire de ces difficultés ?

On peut certes trouver un certain nombre de raisons extérieures à l'école qui font que certains enfants vont rencontrer plus de difficultés dans l'apprentissage des savoirs scolaires. Pourtant, la plupart de ces enfants apprennent facilement beaucoup d'autres choses hors de l'école, parfois très complexes, comme le montrent les travaux de T. Nunes [(6)] et d'autres chercheurs brésiliens. Il faut donc, pour comprendre ce qui se passe, interroger le cœur de la relation didactique qui vise à l'acquisition des savoirs scolaires. Nous allons examiner ce qui se passe dans la relation didactique du côté de l'élève et du côté de l'enseignant en référence à l'apprentissage de l'élève avant de regarder les contraintes plus globales de l'enseignant.

3.1. Que se passe-t-il en classe du côté de l'élève et du côté de l'enseignant ?

J'ai dit tout à l'heure que les différences de comportements semblaient faibles dans une situation d'action pourvu que l'entrée dans cette situation ne nécessite que des connaissances élémentaires maîtrisées des élèves. Les problèmes apparaissent dès que l'on commence à décontextualiser après une situation d'action (dès que l'on s'écarte de la situation d'action pour produire un énoncé plus général, on assiste aussitôt pour certains élèves à un dérapage formel du type "un tiers, c'est la moitié de un sixième"), et au moment du réinvestissement dans de nouveaux problèmes. Il semble y avoir *un divorce net entre les situations d'action* qui permettent de donner du sens aux concepts mathématiques enseignés *et l'institutionnalisation* qui est faite par l'enseignant.

Par exemple, pour l'introduction des fractions, nous avons utilisé à de nombreuses reprises la situation "segment" mentionnée ci-dessus (voir note 4). Cette situation amène toujours les élèves à subdiviser l'unité par pliages en deux successifs pour évaluer la partie qui dépasse un nombre entier de reports, mais dès qu'on passe à l'écriture formelle des fractions, il y a pour certains élèves un dérapage, ils passent à des modèles numériques erronés pour simplifier ou ajouter les fractions (par exemple $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$). Il semble que l'objet mathématique n'a plus pour eux aucun rapport avec la situation (ou les situations) d'action qui lui a (ont) donné sens et que ces élèves ne paraissent pas pouvoir utiliser comme référence. Ainsi, tout se passe comme si *le savoir institutionnalisé par le maître et décontextualisé était situé dans un registre étanche par rapport aux connaissances utilisées dans la situation d'action.* Ceci fait que, même dans le cas où il est mémorisé, le savoir ne peut fonctionner que dans le registre formel, par exemple numérique pour les fractions, sans que la situation d'introduction puisse servir de contrôle, et il ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Il est probable que, même en cas d'apparente homogénéité, il se passe en fait des choses assez différentes pour les élèves, même avec le même enseignant, aux différents moments du processus d'ensei-

(6) Voir Carraher-Nunes, opus cité

gnement. Précisons nos hypothèses en ce qui concerne l'action et l'institutionnalisation.

*** au moment même de l'action : lors d'une résolution de problème par les élèves**

– Tous les élèves cherchent-ils le même problème ? Cherchent-ils le problème que pense avoir donné le professeur ? Au cours d'une expérimentation dans une classe faible de 6^e, nous avions institué un cahier de la classe où chacun, à tour de rôle devait écrire en une phrase ou deux ce qu'on avait fait dans la séance et soumettre sa version au reste de la classe au début de la séance suivante. Un jour où on avait travaillé sur les fractions à partir de partages de rectangles, l'élève avait écrit "aujourd'hui on a appris à partager des rectangles". Dans ces conditions, il n'est pas étonnant que les fractions utilisées pour les segments ne soient pas les mêmes que celles utilisées pour les rectangles. Or, la consigne que donne le professeur dans ce cas induit presque nécessairement cette idée. S'il demande de dessiner $\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{12}$ du rectangle ou de comparer des parties coloriées, le problème principal pour les élèves est effectivement de partager le rectangle ou de trouver le partage qui permet de comparer, ensuite il n'y a plus qu'à compter avec de petits entiers. On retrouve là un paradoxe général lié à l'utilisation de problèmes concrets ou de représentations : la consigne se donne à ce niveau et c'est aussi à ce niveau que se déroule le travail visible. Le véritable objet d'enseignement reste momentanément caché pour la plupart des élèves. De même, si on considère la situation "segment", quel est le problème pour les élèves : réussir à reproduire le segment donné ou construire un langage pour réussir à reproduire n'importe quel segment ? Il est probable que, si on avait posé la question aux élèves, on aurait aussi eu des réponses variées : pour les uns on aurait tracé des segments, pour d'autres on aurait écrit des messages, et peut-être aurait-on rencontré de nouvelles écritures, des demis et des quarts pour d'autres.

– Les mêmes gestes ont-ils la même signification ?

Que se passe-t-il pour les élèves qui réussissent très bien ? Nous faisons l'hypothèse que les élèves qui ne rencontrent pas ces difficultés de réinvestissement ont en quelque sorte *un projet, le plus souvent implicite, de décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action.* Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser l'expérience acquise et ils cherchent à comprendre ce que la démarche qu'ils mettent au point sur un problème particulier a de généralisable. Ils se créent des *représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions,* ce qui leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée. Pour d'autres enfants, cela ne se fait pas parce qu'ils ne font que résoudre le problème posé, dans les termes où il est posé, sans avoir de projet d'accéder à un savoir réutilisable, ou parce que leurs connaissances disponibles ne leur permettent pas de se placer à un autre niveau. Il n'y a pas création de *représentations mentales qui ont déjà valeur symbolique et sur lesquelles on pourra travailler ensuite, à l'occasion d'autres situations.* Ceci contribue à expliquer l'absence, chez ces élèves, de possibilité de réutiliser en les adaptant des outils forgés pour résoudre un problème. D'ailleurs, sur l'exemple de la situation "segment", le dérapage formel se produit pour certains élèves dès le bilan qui suit la phase d'action quand l'enseignant demande si on peut imaginer d'autres pliages et d'autres écritures : des enfants affirment dès ce moment là que $\frac{1}{6}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

De plus, ces représentations mentales intermédiaires entre l'action et la formulation, permettent sans doute de plus aux élèves de *libérer de la place en mémoire de travail* puisqu'ils ne sont pas obligés de se remémorer tous les détails d'une situation ni de la traiter à nouveau pour retrouver le sens contextualisé d'une connaissance.

Pour analyser plus précisément ce qui se passe pour l'élève et le mettre en relation avec le rôle du maître, il nous faut faire un petit détour théorique et introduire quelques outils de didactique qui nous permettront de mieux situer les difficultés avant de les mettre en regard avec les contraintes institutionnelles de l'enseignant.

Il nous semble en effet que ce qui se passe pour les élèves au moment de l'action montre qu'il y a des différences importantes au niveau de ce que G. Brousseau a nommé en 1982 la **dévolution** du problème. Il définit la dévolution comme *l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique* (7)*) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert*". C'est un processus nécessaire à l'intérieur de la situation didactique parce que l'élève n'a pas immédiatement accès à la situation a-didactique : *"La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective"* (*R.D.M.* 7.2. 1987 p. 50). La dévolution est une condition pour que l'élève fonctionne de façon scientifique et non en réponse à des indices extérieurs à la situation, d'ordre didactique notamment, condition nécessaire si on se place dans l'hypothèse où l'élève construit des connaissances nouvelles en réponse à des problèmes, comme semblent le faire les programmes actuels qui demandent que l'enseignement s'appuie sur l'activité des élèves.

A propos de la dévolution, je soulèverai trois questions :

1) En quoi consiste la dévolution ?

Au départ, pour Brousseau, il s'agit essentiellement de faire entrer les élèves dans un fonctionnement mathématique face au problème qu'on veut leur voir résoudre. Ainsi écrit-il *"L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire*

(7) Une situation a-didactique est, dans le modèle de la théorie des situations didactiques, la situation privée de ses intentions didactiques : une situation didactique comprend une situation a-didactiqu et un contrat didactique. Il s'agit d'un modèle théorique : un milieu organisé pour l'apprentissage fournit aux élèves un feed-back de leurs actions sans intervention du maître. Brousseau a distingué dès 1970 différents types de situations a-didactiques correspondant à des contraintes différentes du milieu : les situations d'action, de formulation et de validation.

sans faire appel à des raisons didactiques". Mais cela suppose déjà que l'élève soit dans une logique d'apprentissage, ce qu'on considère souvent comme acquis. Or mes observations sur les élèves en difficulté me laissent penser qu'il n'est pas sûr que les préalables sous-entendus ici soient remplis pour tous les élèves. Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet qu'il y a toujours un objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée (8). Ce n'est peut-être pas toujours le cas et, même dans le cas où l'élève s'attend à apprendre quelque chose, il peut y avoir méprise sur la nature de la connaissance visée (s'agit-il de savoir résoudre le problème posé ou d'acquérir une connaissance plus générale réutilisable dans d'autres problèmes, même très différents de celui-là ?).

La question est la suivante : qu'est-ce qui fait que l'élève met en jeu un savoir mathématique en tentant de résoudre le problème posé par le maître ? quelle dévolution du problème est nécessaire, avant la résolution, pour que l'élève apprenne ? comment faire dévolution de la prise en charge par l'élève de son propre apprentissage (à un niveau général aussi bien qu'au niveau de chaque situation) ?

Il faudrait peut-être distinguer plusieurs niveaux dans la dévolution : un niveau local qui correspond à la dévolution du problème au sens usuel : une appropriation par l'élève du problème et de ce qui va être une réponse au problème, et la dévolution d'un enjeu d'apprentissage à plus long terme, d'une réutilisation des connaissances produites, de leur intégration dans les connaissances anciennes.

2) Quand se fait la dévolution ?

Une autre question est de savoir si, pour qu'il y ait apprentissage à partir d'une résolution de problème, il est nécessaire que la dévolution soit faite avant la résolution. Je pense pour ma part qu'il y a, pour certains élèves qui, au cours de l'action, ont fonctionné de façon non scientifique, par exemple en utilisant des indices didactiques ou en s'en remettant à des camarades, une possibilité de "dévolution après coup" par un retour réflexif sur l'action, lors de l'institutionnalisation. Si cette possibilité n'existait pas, la situation serait effectivement désespérée pour certains élèves. La question est alors de savoir comment on peut donner à ces élèves une nouvelle occasion de donner du sens aux notions déjà institutionnalisées ou en cours d'institutionnalisation.

3) Comment se fait la dévolution ?

A travers les questions précédentes, il est clair que je considère la dévolution non comme une phase en début de résolution de problème mais comme un processus sous la responsabilité du maître, processus par lequel celui-ci va faire en sorte que l'élève donne du sens aux savoirs enseignés. Bien sûr, l'essentiel des efforts de dévolution du maître se situent au moment où il pose le problème et pendant la recherche des élèves : ses interventions tendent à ce que ceux-ci respectent la consigne, prennent en compte les données, il provoquera un doute si les élèves s'appuient sur une certitude non fondée, il encouragera, donnera éventuellement une indication si nécessaire : c'est la tâche, si difficile pour les

(8) Le problème posé par la non vérification de cette hypothèse est souvent regardé comme relevant d'autres disciplines.

débutants, d'intervenir pour que le travail des élèves porte bien sur l'enjeu d'enseignement mais sans leur donner les éléments clé qu'ils doivent mettre en jeu eux-mêmes pour que le savoir prenne sens. Mais, dans une classe, la dévolution d'un problème n'est jamais réussie pour tous les élèves avant ni même au cours de la résolution ; l'enseignant sera donc amené à continuer ce travail de dévolution après-coup.

La dévolution sera à la fois particulièrement importante et difficile à réaliser dans le cas d'un problème nécessitant un investissement important de l'élève. Essayons de préciser les difficultés qui risquent d'être des entraves à la dévolution dans ce cas. J'en retiendrai trois principales, en me limitant à celles qui interviennent directement, tout en sachant qu'elles sont reliées bien sûr à des attitudes plus générales face aux mathématiques ou au travail scolaire en général :

– le manque de stabilité des connaissances anciennes, que ce soit pour les utiliser, les compléter ou les remettre en question,
– le manque de fiabilité des techniques opératoires, ce qui va détourner l'attention de l'objectif principal et donner un coût insupportable aux procédures complexes,
– la lecture sélective de la consigne, la prise en compte partielle des données, avec le désir de pouvoir répondre vite.

Je pense que chaque enseignant a en tête des exemples pour illustrer ce point. J'en ai fourni dans ma thèse et dans mes articles précédents (9) notamment extraits d'une étude de cas : l'observation d'un élève de CM1 pendant 6 mois. On voit pour cet élève comment le peu de stabilité des connaissances antérieures et le manque de fiabilité des techniques opératoires, mentales notamment, contribuent à lui faire perdre le fil au cours de sa recherche et vont donc rendre difficile la dévolution d'un problème qui demande une recherche longue. Didier, comme beaucoup d'élèves en difficulté, recherche des algorithmes plus sécurisants et est ainsi à l'affût des mots inducteurs dans les problèmes. La représentation l'aide mais il n'y recourt pas de lui-même. Des algorithmes comme l'addition de 10 ou la multiplication par 10 sont disponibles à certains moments et pas à d'autres. Il faut les remettre en place à des moments cruciaux de l'activité. Il y a donc un coût énorme des procédures longues qu'il cherche donc à éviter. De plus, la lecture même de l'énoncé de problème est conditionnée par ce qu'il sait faire.

D'autres éléments interviennent aussi au moment de l'action et peuvent gêner la dévolution, je n'en citerai que deux qui me paraissent importants et liés à l'activité en classe :

– les problèmes concrets, utilisés souvent d'ailleurs pour faciliter la dévolution à des élèves en difficulté, supposent une modélisation : on raisonne dans un modèle mathématique du problème concret qui, d'une part, ne prend en compte que certains aspects de la réalité et, d'autre part, nécessite d'utiliser un raisonnement mathématique qui ne coïncide pas nécessairement avec la logique de la vie quotidienne.

– le temps effectivement consacré en classe à l'activité mathématique des élèves et la nature de cette activité. Dans son DEA, N. Amra a observé plusieurs groupes

(9) Voir la bibliographie.

d'élèves dans deux classes de seconde d'un même professeur de mathématiques, la même année, sur le même problème de recherche mettant en jeu des distances, sur lequel devait s'appuyer ensuite le cours sur la fonction valeur absolue. Il s'avère que les éléments clé concernant ce qu'il y avait de nouveau dans l'activité (quelle variable choisir pour modéliser, distinguer plusieurs cas) ont été fournis ou sollicités par le professeur dans les groupes forts comme dans les groupes faibles, mais à des moments différents : très peu de temps après le début de l'activité dans les groupes forts, après plus d'une heure dans les groupes faibles. Les groupes forts ont ainsi développé une activité algébrique sur les fonctions, ce qui était l'enjeu d'enseignement. Pour les groupes faibles, le travail a surtout tourné autour des problèmes liés à la modélisation et à la représentation. L'objet même du travail a été reporté en travail à la maison. Le travail sur la représentation et la dévolution du problème était un vrai travail pour les élèves faibles mais, sur l'enjeu même de l'enseignement, dans le domaine algébrique, il y a eu des différences importantes dans le travail des élèves au moment de l'action. L'institutionnalisation qui suit ne s'appuie certainement pas sur la même expérience des élèves.

*** au moment de l'institutionnalisation des connaissances**

Nous allons organiser notre propos concernant l'institutionnalisation des connaissances autour de quelques questions en continuant le détour théorique avant de revenir aux difficultés des élèves.

1) Qu'est-ce que l'institutionnalisation des connaissances, quelle est sa fonction ?

Tout au long d'un enseignement de mathématiques, différents moments se succèdent : le professeur fait un cours, les élèves résolvent des problèmes que le professeur leur a préparés, qu'il les aide plus ou moins à résoudre. Pour résoudre ces problèmes, les élèves mettent en jeu des connaissances : certaines sont déjà reconnues comme des savoirs, qu'elles figurent dans le cours de l'année ou dans celui d'années précédentes, d'autres au contraire n'ont pas de statut officiel dans la classe : ce sont des connaissances locales, contextualisées. Parmi celles-là, certaines vont garder ce statut et d'autres méritent d'être retenues : le professeur va les préciser, les généraliser, leur donner un statut officiel dans la classe et les relier à des savoirs inscrits au programme. L'élève sera tenu de les apprendre et de les utiliser. L'institutionnalisation est ce processus par lequel va s'opérer ce changement de statut de certaines connaissances pour en faire des savoirs qu'on pourra ensuite exiger dans les évaluations. Une de ses fonctions est d'articuler les connaissances que les élèves mettent en jeu dans les résolutions de problèmes, connaissances qui résultent de savoirs anciens qu'il a éventuellement fallu adapter pour traiter une situation nouvelle et qui ont trouvé une nouvelle occasion d'emploi. Il est sous la responsabilité du professeur qui indique ce qu'il y a à retenir, situe les savoirs nouveaux par rapport aux anciens.

2) A quel moment se fait l'institutionnalisation ?

Le cours est le moment le plus visible de l'institutionnalisation mais ce n'est pas la seule forme qu'elle prend. Au cours de corrections de problèmes, du bilan après une activité des élèves, le professeur insiste sur certains points, met en valeur des résultats, des méthodes... et contribue ainsi à institutionnaliser des connaissances. Les choix qu'il fait pour l'évaluation vont y contribuer fortement aussi.

Mais l'institutionnalisation vient-elle toujours après l'activité des élèves ? Sûrement pas : dans l'enseignement traditionnel, le cours vient en premier comme un exposé des savoirs et les exercices comme des applications, ce qui ne veut pas dire que l'élève ne pourra pas donner du sens, par un phénomène de dévolution après coup, notamment dans les problèmes de synthèse donnés hors contexte. Nous avons vu aussi que l'évaluation est une forme d'institutionnalisation. Mais n'y a-t-il pas une forme d'institutionnalisation dans le choix d'une activité préparatoire à l'introduction d'une notion nouvelle ? Nous avons vu que les élèves ne savent peut-être pas qu'il y a autre chose à apprendre de la résolution d'un problème particulier. N'est-ce pas déjà une première institutionnalisation que faire savoir aux élèves qu'il y aura quelque chose de général et réutilisable à apprendre de la résolution du problème particulier qu'il leur propose ?

Ces réflexions m'amènent à considérer que l'institutionnalisation des connaissances commence dès le tout début de l'enseignement puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances, d'où *l'imbrication des processus de dévolution et d'institutionnalisation qui sont ainsi, dans une certaine mesure, contemporains.* Evidemment, nous trouvons là un des paradoxes que Brousseau a mis en évidence : le maître ne peut pas parler de la connaissance nouvelle (10) puisque c'est justement l'enjeu de l'apprentissage, cependant il peut dire qu'on va apprendre quelque chose de nouveau et éclairer les élèves sur les connaissances anciennes à mobiliser pour "accrocher" cette connaissance nouvelle. En fait le maître tend à l'institutionnalisation tout au long du processus mais il ne peut dévoiler entièrement son projet sous peine de le faire échouer : s'il veut que l'institutionnalisation puisse se faire pour les élèves dans de bonnes conditions avec du sens, il ne peut aller droit au but mais l'a toujours présent à l'esprit pour ménager dès le départ et tout au long du processus d'enseignement les conditions qui vont lui permettre de négocier le contrat didactique dans ce sens.

Dévolution et institutionnalisation sont ainsi pour nous les deux processus complémentaires par lesquels le maître va essayer de contrôler l'acquisition par les élèves des notions mathématiques avec leur sens. Par la dévolution, il contrôle le sens que les élèves donnent aux notions enseignées, il fait en sorte que les élèves utilisent des savoirs mathématiques dans la résolution de problèmes. Par l'institutionnalisation, il fait en sorte que les élèves puissent décontextualiser ces connaissances, que leur rapport personnel aux objets de savoir en jeu soit conforme à ce qui est attendu au niveau scolaire considéré et il gère les changements de statut de la connaissance (11).

(10) Par "connaissance nouvelle", nous entendons aussi un approfondissement ou un nouvel emploi d'une connaissance ancienne.

(11) On peut se reporter à l'article de G. Brousseau et J. Centeno (1991) sur la mémoire du système didactique, pages 190-191, pour la distinction de plusieurs statuts que le maître donne à la connaissance qu'il manipule pour et avec les élèves, en rapport avec la gestion qu'il fait de la mémoire de la classe. Ces statuts sont aussi à mettre en relation avec les distinctions que fait R. Douady (1987) dans la dialectique outil-objet et avec celles que fait Chevallard (1985) dans l'analyse des contenus d'enseignement.

Si nous considérons la dévolution et l'institutionnalisation comme les deux processus par lesquels le maître va gérer les différents statuts des connaissances pour les élèves tout au long de l'apprentissage, il n'en reste pas moins que certains moments seront plutôt des moments de dévolution et d'autres d'institutionnalisation et que ces moments vont se traduire à la fois par des discours et par des choix du maître (action sur des variables didactiques par exemple). Comment faire en particulier pour que les élèves repèrent le véritable enjeu d'apprentissage ? Est-ce qu'un discours sur l'enjeu de ce qu'on leur demande peut les aider ? A quel moment le tenir ? Faut-il pointer quelque chose à ce niveau avant la résolution ? après ? quelles interventions ? Ce sont toutes ces questions qu'examinent les recherches sur le "méta", c'est-à-dire le discours non strictement mathématique mais sur les mathématiques que tient l'enseignant en classe (Robert et Robinet 1993). La réponse de la théorie des situations (et de la dialectique outil-objet aussi) est plutôt de construire une situation telle que les variables permettent une évolution des connaissances mises en jeu par les élèves : un premier choix doit permettre la dévolution, d'autres permettront de construire le sens des concepts visés. Mais quelle est la visibilité des choix du maître pour les élèves ? L'opacité est nécessaire si l'on veut que la situation puisse fonctionner comme situation a-didactique mais le voile devra se lever au moment de l'institutionnalisation finale. L'équilibre se gère par le contrat didactique.

3) Comment l'nstitutionnalisation fait-elle évoluer le contrat didactique ?

Nous avons dit que la situation didactique est constituée d'une situation a-didactique (le problème mathématique et les moyens de contrôle prévus par la situation elle-même sans intervention du maître) et d'un contrat didactique. Le contrat didactique (Brousseau, 1987) est ce qui règle les attentes réciproques du maître et de l'élève concernant les connaissances en jeu. Il est dès lors clair que l'institutionnalisation d'un savoir nouveau amène une rupture du contrat didactique : par exemple, avant la classe de 4^{e}, pour reproduire ou construire des figures, il est légitime de mesurer, il est légitime de calculer à partir d'un plan à l'échelle ; après l'introduction des théorèmes de Thalès et de Pythagore, des procédures qui étaient acceptées et permettaient d'obtenir une bonne note ne seront plus légitimes, les attentes de l'enseignant auront changé. Pourtant, dans le même temps, certains théorèmes du cours sont admis et pour montrer qu'il est raisonnable de le faire, l'enseignant invite les élèves à mesurer, à calculer des rapports (exemple rapport de projection orthogonale pour introduire le cosinus) mais dès que le théorème nouveau a été introduit, ces procédés n'ont plus cours, parfois dans la même séance. L'institutionnalisation est ainsi*un moteur de l'avancement du contrat didactique.* Cependant ces évolutions ne se font pas toujours sans problème.

4) Quelles difficultés des élèves peut-on relier à l'institutionnalisation ?

Nous avons dit qu'on constate chez certains élèves une rupture entre la situation d'action et l'institutionnalisation qui est faite par le professeur. Cela laisse penser d'une part que la dévolution ne s'est peut-être pas passée comme on l'espérait, d'autre part que l'institutionnalisation n'est peut-être pas suffisamment reliée au problème réellement traité par les élèves.

– Compte tenu des différences qu'on vient de souligner au moment de l'action, la décontextualisation opérée par l'enseignant sera adaptée pour certains élèves mais trop brutale pour d'autres. Par exemple (12), il se peut que le fait que l'aire d'une partie de rectangle vaille un quart soit lié pour certains élèves à la possibilité de paver parce que la signification des fractions est pour eux attachée au report de pièces identiques alors que l'enseignant, dans le bilan de l'activité, se place au niveau des nombres.

– Les connaissances nouvelles pourront s'accrocher plus ou moins facilement aux connaissances anciennes, suivant la fiabilité de celles-ci.

– Ce qui est le plus souvent retenu et utilisé par les élèves, et exclusivement par certains, c'est ce qui ressort directement de l'institutionnalisation, les phrases même qui ont été fortement institutionnalisées, ritualisées, par exemple (13) «$\frac{1}{3}$ on le reporte 3 fois pour faire 1", on garde le rituel, cette idée de 3 reports, mais sans tenir compte de l'unité.

– De plus, l'institutionnalisation suppose l'abandon de procédures au profit d'autres, plus performantes mais moins sûres, l'abandon de certains des moyens qu'on avait de comprendre. Illustrons ce point par un exemple tiré d'observations d'élèves de 6e.

(12) Voir *Petit x*, n° 35.
(13) Voir *Petit x*, n° 35.

Guillaume, qui déclare manquer toujours de temps pour résoudre les problèmes, traite le problème suivant :

"Dans une école, on organise un goûter. On a décidé d'acheter des croissants, des tablettes de chocolat, des oranges.
Les croissants sont vendus par sachets de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 20.
Les oranges sont vendues par filets de 6.
Dans cette école, il y a 5 classes :
un CP avec 18 élèves,
un CE1 avec 23 élèves,
un CE2 avec 16 élèves,
un CM1 avec 21 élèves,
un CM2 avec 27 élèves.
Sais-tu combien il faut acheter de filets d'oranges pour être sûr de pouvoir donner au moins une orange à chaque enfant ?"

Il répond directement 11 sachets de croissants et 6 boîtes de chocolat, ce qui est juste. Sur demande, il explique qu'il a additionné de tête les nombres d'élèves puis qu'il a compté par dizaines, qu'il peut faire le problème des oranges mais que ça sera beaucoup plus long. Il explique qu'il cherche par $10 - 4$ parce que $6 + 4 = 10$ et déclare "si je fais $10 \times 10 = 100$, j'aurai besoin encore d'un paquet mais il faut que j'enlève 11×4".

Je lui dis alors que je comprends sa méthode mais qu'elle est compliquée et qu'il risque de se tromper. Je lui propose de chercher combien il y a d'oranges dans 6 filets. Il trouve 60 et ajoute qu'il en manque 35. Je corrige : 45. Il considère que c'est près de 60 et dit $20 \times 6 = 120$ puis procède en reculant :

120 – 6 = 114 ; 114 – 6 = 108 ; il faut 18 filets.

On voit que Guillaume, qui a des grandes capacités de concentration et de mémoire, reste attaché à des procédures de dénombrement d'unités et de dizaines sans faire confiance aux techniques opératoires. On peut se demander s'il n'y a pas dans son cas sur-apprentissage de la numération.

Un autre exemple que j'ai donné ailleurs (14) porte sur la multiplication par un décimal : pourquoi est-il légitime de multiplier 46 par 1,35 pour trouver le prix de 1,35 kg de rôti de porc à 46 F le kilo ? Le modèle de l'addition répétée, investi dans le cas des entiers, ne permet plus de comprendre ici. Pour comprendre, à partir des connaissances sur les entiers, pourquoi la multiplication est légitime dans ce cas, il y a beaucoup à faire.

5) A quelles conditions peut-on institutionnaliser les connaissances sans en perdre le sens ?

De plus, la marge de manœuvre est très étroite, particulièrement dans le cas d'élèves en difficulté où l'équilibre à adopter lors de l'institutionnalisation n'est pas facile à trouver : si, à l'issue d'une phase de recherche, il n'y a pas d'institutionnalisation (15), les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci, mais dès qu'il y a institutionnalisation, il y a risque de mise en place d'une règle qui va être utilisée sans référence au sens. On est alors devant la nécessité de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui peut alors détruire toute possibilité de référence à la situation dans la construction de la notion qu'on visait dans cette situation. Je pense donc que, *pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation – décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :*

– institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1987) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet.
– réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes,
– cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique.

(14) Voir bibliographie : 1992, 1993, 1994.
(15) Ici, nous employons "institutionnalisation" dans son sens plus restreint et plus habituel de discours d'institutionnalisation après une phase d'action, de formulation ou de validation. Pour ne pas alourdir le texte, nous désignons par le même mot le processus et les actions du maître au cours de ce processus.

J'ai proposé dans ma thèse un modèle de situation didactique et non plus a-didactique pour rendre compte de l'institutionnalisation, que j'ai appelé “situation de rappel” où les élèves doivent se rappeler une ou plusieurs situations traitées sur le même thème, faire un retour par la pensée et la parole sur ces séances. Ce modèle décrit les relations que le maître établit entre le savoir visé, une ou plusieurs situations a-didactiques et les connaissances des élèves. J'ai distingué deux types de rappel : le rappel de type 1 a pour fonction

– la dévolution après coup,
– l'homogénéisation de la classe et la dépersonnalisation des solutions,
– l'institutionnalisation locale,
– une pré-décontextualisation.

Il est toujours difficile de parler d'un modèle sans en décrire des réalisations et j'espère, en le faisant, éviter le risque que la réalisation décrite soit lue comme prescriptive. Un tel moment peut se trouver dans une classe peu après une situation d'action (ou de formulation) mais un autre jour : les élèves sont conduits à repenser le problème et les procédures de traitement envisagées dans la classe. Ils trouvent ainsi une nouvelle occasion de se construire des représentations mentales puisqu'il faut parler de ce qui s'est passé sans pouvoir agir à nouveau. Même si l'action est à nouveau nécessaire pour certains élèves, c'est dans une nouvelle perspective : non seulement pour trouver la solution mais pour pouvoir en parler ou l'expliquer. On peut penser qu'alors la dévolution du fait que ces connaissances vont resservir peut se faire. Les solutions sont exposées par des élèves différents de ceux qui les ont trouvées, ce qui contribue à l'homogénéisation de la classe et à la dépersonnalisation des connaissances. On a une première décontextualisation en élaguant les détails et les fausses routes pour identifier ce qui est important.

Le rappel de type 2 a pour fonction la décontextualisation et l'ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens ainsi que l'institution d'un certain nombre de relations. Il correspond à un retour sur une suite de problèmes sur un même thème : chacun des problèmes est alors intégré dans un processus, intériorisé avec un sens nouveau. Les formulations évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation ou en rencontrer de nouveaux.

3.2. Que font les enseignants ? Quelles sont leurs contraintes ?

Après ce détour théorique que certains auront peut-être trouvé un peu long mais qui me paraît indispensable si je ne veux pas me contenter de livrer des opinions ou des convictions, je voudrais revenir sur l'explication des difficultés des élèves à partir de l'analyse des contraintes des enseignants, contraintes venant de l'institution scolaire, des élèves, de la société ou de leur propre personnalité. Nous retiendrons notamment :

– la nécessité de maintenir la relation didactique coûte que coûte, qui peut devenir une priorité absolue dans le cas d'un enseignement à une classe difficile,
– la nécessité d'avancer, parce qu'il faut avancer le programme et qu'il faut faire du nouveau parce que les élèves se lassent alors que le contenu visé est loin d'être acquis,
– la nécessité d'homogénéiser la classe, pour pouvoir continuer la relation didactique avec le groupe,

– la nécessité d'évaluer, à la fois pour orienter la suite de la progression, pour permettre aux élèves de se situer par rapport aux attentes institutionnelles, pour les parents d'élèves et bien sûr pour l'institution scolaire, l'orientation des élèves...
– la nécessité que l'élève soit "actif" de façon visible (pression de la noosphère)
– la nécessité de s'appuyer sur ce qu'ont fait les élèves, sur cette activité, réputée créatrice de sens, et en même temps de donner clairement ce qui est à retenir de la résolution d'un problème, ce qui pourra être réutilisé ailleurs, avec le risque d'un dérapage formel, que cette décontextualisation se fasse au détriment du sens,
– la nécessité d'assurer un minimum de réussite aux élèves dans l'immédiat, ce qui peut parfois entrer en contradiction avec l'apprentissage qui risque de n'amener la réussite que dans le long terme. La pression en faveur d'un minimum de réussite à court terme vient aussi bien des élèves et des parents que de la comparaison avec les collègues, de la nécessité de maintenir la relation didactique qu'un trop grand découragement ou une révolte des élèves empêcherait, et du désir du professeur lui-même dont c'est un des meilleurs moyens de valorisation.

Ces différentes contraintes amènent des pressions ressenties le plus souvent comme contradictoires. Les difficultés des élèves proviennent de plusieurs sources imbriquées et se combinent avec les contraintes des enseignants (16). La conséquence en est l'apparition de cercles vicieux et de paradoxes. Les élèves ne se représentent pas les actions et ne perçoivent pas les enjeux donc ils ne mémorisent pas, ce qui amène le professeur à se concentrer sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés, à se concentrer sur le cadre numérique, à simplifier les situations, à éviter les problèmes qui nécessitent des changements de point de vue et font intervenir plusieurs concepts et à proposer aux élèves des exercices très proches de ceux qu'il donnera au contrôle, ou à atomiser la tâche, ce qui fait que les élèves ont moins d'occasions de construire du sens, d'engager leur responsabilité, de se créer des représentations mentales et d'accéder aux véritables enjeux de l'activité mathématique.

Dans le cas où on propose des situations complexes, on assiste souvent à une négociation à la baisse par une suite d'effets Topaze ou Jourdain (17), ou à une activité sans conclusion parce qu'on a laissé tout le temps à la recherche. Comme on leur fait moins confiance, on peut être amené à demander aux élèves faibles des explications qu'on ne demande pas dans des classes plus fortes qui bénéficient d'un meilleur crédit.

Les choix des enseignants sont différents parce qu'ils se réfèrent à leurs représentations de l'apprentissage et de ce qui est important dans le contenu mathématique visé, mais ils semblent toujours répondre à des contraintes ressenties comme contradictoires. Les contraintes sont plus fortes quand l'ensemble de la

(16) Voir schéma dans Perrin-Glorian, 1993 ou 1994.

(17) Voir Brousseau 1987. L'effet Topaze est celui par lequel l'enseignant négocie à la baisse : il obtient de l'élève la réponse attendue sans que ce soit par l'utilisation d'une connaissance. L'effet Jourdain est celui par lequel l'enseignant reconnaît chez l'élève une connaissance qu'il attend alors même que celui-ci n'a produit que des choses banales qui ne nécessitent pas cette connaissance.

classe est faible et dans ce cas, les différences entre les choix des enseignants ont tendance à s'amplifier dans la mesure où ils vont se concentrer sur ce qui leur paraît le plus important : pour les uns on aura un renforcement du cours, pour les autres au contraire on aura augmentation de la part des exercices. L'enseignant doit à la fois maintenir le cap sur le savoir, dont il est garant pour les élèves, face à l'institution, à ses collègues, à la société, et aussi accompagner les élèves. L'équilibre est parfois difficile à maintenir et, suivant leurs autres contraintes, y compris intérieures, les enseignants auront tendance à privilégier l'un ou l'autre pôle. Nous allons, dans le paragraphe suivant essayer de préciser quelques éléments concernés par la recherche de cet équilibre.

4. Peut-on caractériser quelques équilibres fondamentaux ?

Nous avons vu que les enseignants semblent pris entre des pôles contradictoires. Nous allons maintenant essayer de caractériser quelques équilibres qui paraissent à la fois importants et difficiles à trouver avant d'en tirer quelques conséquences pour la formation.

– sens/algorithmes

Faut-il privilégier l'acquisition des automatismes de base ou la construction par les élèves du sens des notions enseignées à travers la résolution de problèmes ? La pression du temps fait que ces objectifs paraissent contradictoires. Pourtant, comme j'ai essayé de l'illustrer à propos de la division (Perrin-Glorian 1995), les algorithmes eux-mêmes sont porteurs de sens. De plus, le sens et les automatismes ne s'opposent pas pour l'expert : les automatismes sont nécessaires pour avancer, pour se concentrer sur les points délicats du problème. Nous avons vu avec l'exemple de Didier qu'ils sont nécessaires aussi pour les élèves. Cependant, si l'expert a un fonctionnement automatique, il a aussi des moyens de contrôle et des possibilités de revenir sur une partie de ses calculs, pour l'élève en difficulté, quand on a un fonctionnement automatique, c'est souvent sans moyen de contrôle. Comment faire donc pour que l'élève acquière des automatismes avec des moyens de contrôle ?

– paradoxe de l'institutionnalisation

Nous avons déjà signalé l'exiguïté de la marge de manœuvre concernant l'institutionnalisation : d'une part, les élèves ne peuvent pas dégager seuls ce que la démarche qu'ils ont utilisée dans la résolution d'un problème a de général et de réutilisable, d'autre part le risque de dérapage formel est grand dès qu'il y a décontextualisation. Si l'on veut partir des activités des élèves dans des phases de recherche, comment articuler le cours à ce qu'ont fait les élèves ? A quel moment apporter de l'information, sous quelle forme ? Comment garder la maîtrise du déroulement de l'enseignement sans provoquer de rupture avec ce qu'ont produit les élèves ? Comment gérer le bilan et l'institutionnalisation si les élèves ont produit des choses très diverses dans la phase de recherche ? Il arrive que l'enseignant se méprenne sur la signification réelle des connaissances en jeu pour les élèves et saute des étapes importantes pour que cette décontextualisation se fasse sans perte de sens excessive. Cela peut s'expliquer par la difficulté pour les enseignants à connaître l'état des connaissances réelles des élèves, et aussi par la nécessité où ils se trouvent de faire avancer le temps didactique, ce qui les amène à conclure sous leur seule autorité. La conclusion est pourtant nécessaire : les élèves ont besoin de disposer d'une synthèse claire du travail réalisé et de notes réutilisables [18]. Cependant, le lien entre le travail effectivement réalisé et la synthèse du professeur sera peut-être précaire pour certains élèves. Il nous paraît donc nécessaire de distinguer différents niveaux dans la décontextualisation pour les élèves :

– si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée,
– utiliser des arguments qui mettent en relation des connaissances qui ne se réfèrent plus forcément au contexte,
– utiliser la connaissance dans un autre contexte.

Cette dernière étape serait aussi à hiérarchiser suivant que la problématique de réinvestissement est proche des problématiques déjà rencontrées ou qu'elle est très nouvelle : par exemple, pour les fractions, la problématique de la mesure des aires planes est relativement proche de celle de la mesure des longueurs de segments même si le passage de l'une à l'autre soulève des problèmes nouveaux et importants (non superposabilité des parties de même mesure) tandis que la problématique de la mesure est différente de celle des codages d'applications linéaires.

– *ancien/nouveau*

Les élèves en difficulté ont tendance à se lasser rapidement des situations, ce qui fait que l'enseignant est parfois amené à les abandonner avant que les élèves puissent arriver au niveau de traitement visé, ce qui conduit soit à une conclusion sous l'autorité du maître soit à une absence de conclusion et d'institutionnalisation. Il me semble que les élèves se lassent à la fois parce qu'ils se focalisent sur le contexte "encore des rectangles !", ce qui nous ramène à la question de l'identification de l'enjeu d'apprentissage, et parce qu'ils pensent avoir plus de chances de réussir quelque chose de nouveau pour lequel ils n'ont pas de passif. En même temps, ils ont souvent peur de s'engager dans un problème pour lequel ils n'ont pas appris de méthode de résolution, en considérant qu'ils ne peuvent pas faire ce qu'on ne leur a pas appris à faire. Comment donc faire que les élèves puissent utiliser les connaissances anciennes dans une situation nouvelle mais avec un sens critique pour les adapter au besoin ?

– *gestion de la complexité*

Comment trouver des situations assez complexes pour que les savoirs visés y soient engagés avec suffisamment de sens, que l'élève puisse engager sa responsabilité de façon assez significative, mais néanmoins abordables pour assurer suffisamment de réussite ?

– *réussite /apprentissage*

Nous avons déjà signalé que la logique de l'apprentissage qui risque de n'amener la réussite qu'à long terme semble s'opposer à celle de la réussite à court terme. Comment donc obtenir la réussite des élèves sans excès de négociation à la baisse qui hypothèquerait l'apprentissage? Cette préoccupation rejoint bien sûr les précédentes : gestion de la complexité et des rapports entre l'ancien et le nouveau.

(18) Voir sur ce point l'article de J.-C. Duperret dans *Repères-IREM* n°13.

– *évaluation*

Comment maintenir les exigences sans décourager, avoir une évaluation cohérente avec celle qu'on peut avoir dans d'autres classes du même niveau (pour justifier les passages de classe par exemple) et en même temps une évaluation qui permette d'évaluer la progression des élèves ?

5. Quelles conséquences pour la formation ?

Je voudrais conclure en essayant à la fois de pointer quelques écueils pour la formation et d'indiquer quelques pistes et quelques questions qui pourraient être l'objet de recherches. Je ne développerai pas beaucoup ces points parce qu'ils sont, soit conséquences des équilibres que je viens d'évoquer, soit à étudier davantage.

Quelques écueils

On peut souvent constater des dérives dans l'utilisation de moyens didactiques donnés par la formation pour aider les enseignants à analyser les erreurs des élèves et à y remédier :

– pulvérisation du savoir : découpage en mini-objectifs d'apprentissage juxtaposés.
– autocensure : on pense que les élèves n'y arriveront pas et on finit par leur demander moins que ce qu'ils pourraient faire.
– glissement métadidactique : on détourne l'apprentissage de l'objet visé à des moyens d'obtenir une réponse correcte sans mettre en jeu le concept visé.
– perméabilité didactique : ce qu'on veut donner comme outil d'analyse pour le maître passe directement dans l'enseignement, par exemple les classifications de problèmes ou de types de procédures, voire l'analyse d'erreurs que les élèves n'ont pas commises.

Ces écueils posent la question de l'utilisation des résultats de recherche dans la formation, et celle de la formation de formateurs et de leur proximité par rapport à la recherche.

Quelques pistes et questions

– Il me semble important pour les maîtres d'avoir une vision d'une continuité des apprentissages avec quelques étapes cruciales qu'il faut savoir identifier, travailler et reprendre à différents moments ; les connaissances anciennes évoluent à mesure qu'on en introduit de nouvelles, on doit pouvoir commencer tôt à travailler une notion difficile qui demandera un long temps d'apprentissage et qu'il faudra reprendre à différents moments. Cela va contre l'idée dominante qu'une notion est au programme ou non, que dans le premier cas on la traite et dans le deuxième cas, on n'en parle pas du tout.

– Comment donc reprendre une notion ancienne ? Comment lui redonner du sens ou des sens nouveaux ? Comment reprendre des contenus anciens à travers l'introduction de contenus nouveaux ?

– Comment prévoir des aides dans un problème de recherche pour l'adapter à des élèves différents sans "tuer" le problème ?

– Il me semble qu'on doit conclure une activité quoi qu'il arrive même si les élèves n'ont pas trouvé, quitte à reprendre une autre situation sur le sujet, sans que le maître soit culpabilisé à ce sujet. Evidemment, ici l'équilibre est important et sans doute difficile à apprécier par un enseignant débutant. Que peut-on laisser à la charge des élèves ? Qu'est-ce qui l'a été réellement au bout du compte ? quand faut-il les aider ? Comment ? Quand conclure ? Jusqu'où aller ?

– Quel équilibre entre sens et algorithmes ? Comment le gérer dans les différents moments de l'action didactique ?

– Comment éviter une pulvérisation des apprentissages en petits objectifs mais aussi savoir agir sur des points précis bien identifiés ?

– Comment gérer l'hétérogénéité à certains moments, l'homogénéité à d'autres ?

– Quelles exigences de formulation ? Quelle est la place de l'écrit ? Quelles exigences a-t-on avec les élèves à ce niveau ? Au cours d'un stage de formation continue de maîtres de l'école élémentaire, il m'a semblé que les exigences à ce niveau étaient très faibles, peut-être en réaction aux formes de rédaction stéréotypées à l'honneur autrefois. Or, si des exigences trop fortes de formulation peuvent gêner la recherche des élèves, il me semble aussi que la formulation, y compris par écrit aide à y voir plus clair et à avancer.

– Le maître a besoin d'être tourné à la fois vers les élèves et vers le savoir, pour ne pas perdre de vue l'objectif d'apprentissage et pour adapter son enseignement aux élèves. Quelle formation pour qu'il apprenne à garder les deux caps en vue ?

– Il existe nécessairement une distance entre le savoir du maître et celui de l'élève. Le savoir du maître est autre. On ne dispense pas en formation des savoirs qui vont être directement restitués dans l'enseignement aux enfants. Comment dans la formation prendre en compte ces deux types de savoirs concernant le contenu : ceux qui vont être dispensés aux enfants et ceux qui, concernant le savoir destiné aux enfants, vont rester du domaine du maître ?

BIBLIOGRAPHIE

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) : "Réflexions sur le rôle des représentations méta-cognitives dans l'apprentissage des mathématiques", *Revue Française de pédagogie* n°84, pp. 13-19, INRP, Paris.

BEILLEROT J. et collectif (1990) : *Savoir et rapport au savoir*, Editions Universitaires, Paris.

BOERO P. (1987) : "Analyse de quelques facteurs d'erreur dans l'apprentissage des mathématiques dérivant de l'origine socio-culturelle des élèves", *Actes de la réunion CIEAEM Sherbrooke 1987*, Ed. Université de Sherbrooke, 1988.

BONNEVILLE J.-F., COMITI C., GRENIER D., LAPIERRE G. (1990) : "Eléments d'étude des représentations des enseignants de mathématiques. Le métier, les contraintes, l'apprentissage", *Publications de l'Institut de Formation des maîtres, équipe imat* Université J. Fourier, Grenoble.

BROCCOLICHI S. (1994) : *Evolutions différentielles des performances selon l'origine sociale et genèse des dispositions scolaires : le cas des mathématiques dans le secondaire.* Thèse dirigée par Pierre Bourdieu , EHESS (soutenance janvier 1994).

BROUSSEAU G. (1987) : "Fondements et méthodes de la didactique", *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, pp. 33-115, La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) : "La mémoire du système didactique", *Recherches en didactique des mathématiques* n° 11.2.

BRUNER J.S. (1983) : *Savoir faire, savoir dire,* Presses Universitaires de France, Paris.

CARRAHER NUNES T. (1988) : "Street mathematics and school mathematics", *Proceedings of 12th PME Conference, vol.1,* Veszprem, O.O.K., Hongrie.

CHARLOT B. (1983) : *L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir,* Journées Nationales de l'APMEP Lille, 22-24 sept.1983 dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques n°342 fev. 1984.*

CHARLOT B. ; BAUTIER E. ; ROCHEX J.-Y. (1992) : *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs,* A. Colin.

CHAUVEAU G. (1982) : "L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels", *Psychologie scolaire,* n°39 pp. 21-39.

CHEVALLARD Y. (1985, réédité en 1991) : *La transposition didactique,* La pensée sauvage, Grenoble.

— (1988) : *Notes sur la question de l'échec scolaire,* Publication de l'IREM de Marseille, n° 13.

— (1992) : "Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique", *Recherches en didactique des mathématiques,* n° 12/1, 73-111, La pensée sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1987) : : "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 pp. 5-31, La pensée sauvage, Grenoble.

— (1992) : "Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement", *Repères IREM* n°6.

DUPERRET J.-C. "Point de vue : objet sans âme, outil sans vie...", *Repères IREM* n° 13.

DURU M. (1986) : "Notation et Orientation. Quelle cohérence, quelles conséquences ?", *Revue Française de Pédagogie,* n°77 oct-nov-déc 1986.

DURU-BELLAT M. et MINGAT A. (1989) : "Analyse de la genèse temporelle des trajectoires scolaires", *Revue Française de pédagogie* n°88.

DUVAL R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine,* Peter Lang.

FORQUIN J.-C. (1981) : *L'approche sociologique de la réussite et de l'échec scolaires,* CREFED - ENS Saint-Cloud.

FRANÇOIS F. (1980) : "Analyse linguistique, normes scolaires et différenciations socioculturelles", *Langages* n° 59 sept. 1980.

FREUDENTHAL H. (1984) : "L'échec des coureurs", conférence aux journées APMEP de Lille, oct 1983, *Bulletin de l'APMEP* n°342, fev. 84.

GILLY M. (1980) : *Maître – élève. Rôles institutionnels et représentations,* Paris, P.U.F.

HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) : "Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire", *Revue Française de pédagogie*, n°84 pp. 5-12, INRP Paris.

ISAMBERT-JAMATI V. (1990) : *Les savoirs scolaires. Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leur réforme*, Ed. Universitaires, collection "Savoir et formation", Paris.

LAUTREY J. (1980) : *Classe sociale, milieu familial, intelligence*, Paris, PUF.

LEGER A. et TRIPIER M. (1986) : *Fuir ou construire l'école populaire ?* Méridiens Klincksieck.

LEGRAND M. (1990) : "Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique", *Recherches en didactique des mathématiques* n°9.3. pp. 365-406.

NOIRFALISE R. (1987) : "Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques* n°7.3. Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

PERRENOUD P. (1984) : *La fabrication de l'excellence scolaire*, Librairie Droz, Genève.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1985) : "Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves du CM2 et du collège", *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 24, IREM Paris 7, et (1986) même titre *Petit x*, n° 10 IREM de Grenoble.

— (1992) : *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM- 6^e*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7, février 1992.

— (1993) : "Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 13 n°1/2, Ed. La pensée sauvage. Grenoble.

— (1994) : "Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de 'classes faibles' ", *Petit x n°35*, pp. 5-40, IREM de Grenoble.

— (1995) : "Sens, algorithmes et représentations symboliques", *in Mathématiques et langage*, Hachette éducation.

PERRIN-GLORIAN M.-J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) : "Elèves en difficulté en classe de 6^{e}", *Repères-IREM n° 3*, pp. 97-139, Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.

PLAISANCE E. (1985) : Colloque du C.N.R.S. de 1984 *L'échec scolaire. Nouveaux débats, nouvelles approches*. Editions du C.N.R.S.

ROBERT A. et ROBINET J. (1989) : "Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement", *Cahier de DIDIREM* n°1, IREM de Paris 7.

— (1993) : "Prise en compte du méta en didactique des mathématiques", *Cahier DIDIREM n°21*, IREM Paris 7 publié dans *Recherches en didactique des mathématiques* n°15/2, 1995.

VERGNAUD G. (1991a) : "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en didactique des mathématiques* n° 10.2.3., La pensée sauvage, Grenoble.

— (1991b) : "Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques", *Revue française de pédagogie*, n° 96. pp. 79-86, INRP Paris.

VYGOTSKI L.S. (1985) : *Pensée et langage, Editions sociales Messidor, Paris.*