RÔLE DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Document de discussion pour une étude ICMI *(1997-2000)*

John FAUVEL, Open University
Jan van MAANEN, Université de Groningen

Ces dernières années il y a eu un intérêt accru pour le rôle que peut jouer l'histoire des mathématiques dans le but d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. ICMI, l'*International Commission on Mathematics Instruction,* a mis en place une Étude sur ce thème qui doit rendre un rapport à temps pour le prochain *International Congress in Mathematics Education* (ICME) qui se tiendra au Japon en l'an 2000. Le présent document a pour but de dresser les grandes lignes des problèmes qui seront abordés lors de l'Étude ICMI, dans l'espoir que de nombreuses personnes à travers le monde désireront contribuer aux discussions de niveau international et l'accroissement des connaissances que nous espérons atteindre dans et à propos de ce domaine.

Ce document de discussion sera suivi par une conférence sur invitation (qui se tiendra en France, probablement au CIRM à Luminy en avril 1998, les langues officielles seront le français et l'anglais). Celle-ci conduira à la préparation d'une publication à paraître avant l'an 2000. La section suivante de ce document fait le tour des questions qui semblent devoir être abordées. Vos opinions sont sollicitées à la fois sur le choix des questions et sur les façons de les faire progresser dans le sens de ce qui est suggéré par les commentaires qui suivent chacune d'entre elles.

Quelques questions de recherche

L'intention générale est d'étudier les rôles possibles de l'histoire des mathématiques, dans ses nombreuses dimensions, à tous les niveaux du système éducatif : dans ses relations à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques aussi bien qu'en ce qui concerne la formation des enseignants et la recherche sur l'enseignement des mathématiques. L'ordre dans lequel les questions sont présentées ici ne doit suggérer aucune implication quant à leurs importances ou leurs représentativités relatives.

1. *En quoi le niveau scolaire de l'apprenant influence-t-il le rôle de l'histoire des mathématiques ?*

La façon dont l'histoire des mathématiques peut être utilisée, et la raison de cette utilisation, peuvent varier selon le niveau scolaire de la classe : des élèves du primaire ou des étudiants à l'université (par exemple) ont des besoins et des possibilités distincts. Des questions se posent sur les façons selon lesquelles l'histoire peut aborder ces différences.

2. *A quel niveau d'enseignement l'histoire des mathématiques comme discipline d'enseignement devient-elle pertinente ?*

Dans l'analyse du rôle de l'histoire des mathématiques, il est important de distinguer les questions où l'utilisation de l'histoire des mathématiques se fait dans des contextes où le but premier est l'enseignement des mathématiques de celles où l'histoire des mathématiques est enseignée en tant que telle, que ce soit dans un enseignement spécifique ou comme partie plus brève d'un cours.

3. *Quelles sont les fonctions particulières d'un cours (ou d'une partie de cours) d'histoire des mathématiques destiné à des enseignants ?*

L'histoire des mathématiques peut jouer un rôle particulièrement important dans la formation initiale des futurs enseignants ou dans des formations continues d'enseignants expérimentés. On peut énumérer plusieurs raisons pour défendre l'existence d'une composante d'histoire dans ces formations, dont l'enthousiasme renouvelé pour les mathématiques que cela procure, la possibilité offerte aux stagiaires de voir les élèves différemment, de voir les mathématiques aussi différemment, et l'occasion de développer des compétences pour la lecture, les recherches bibliographiques et la préparation d'exposés ou de mémoires, qu'un enseignement strictement mathématique aurait pu négliger.

4. *Quelle sont les liens qui existent entre les historiens des mathématiques et ceux dont la préoccupation principale consiste à utiliser l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques ?*

Cette question se doit avant tout d'analyser les contextes professionnels dont les acteurs des différentes communautés sont issus et touche donc à la structure sociale actuelle de la communauté des enseignants de mathématiques, mais elle induit aussi des interrogations sur la nature de l'histoire. Il est important que les historiens, les formateurs et les enseignants en mathématiques coopèrent puisque les connaissances historiques et l'expérience d'enseignement au niveau approprié ne cohabitent pas forcément dans la même personne.

5. *Est-ce que différentes parties du curriculum devraient comprendre de l'histoire des mathématiques de manière différenciée ?*

Il existe déjà des recherches visant à déterminer les particularités du rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de l'algèbre, comparé au rôle de l'histoire pour l'enseignement de la géométrie.

Les connaissances historiques peuvent même être exploitées dans l'élaboration des choix curriculaires. Une enquête sur les tendances des recherches récentes, pourrait par exemple déboucher (en gardant en tête que l'histoire s'étend dans le futur) sur des suggestions de nouveaux sujets à enseigner.

6. *Est-ce que les contextes d'apprentissage et d'enseignement dans différentes parties du monde, voire dans des communautés culturelles locales, nécessitent des demandes distinctes en histoire des mathématiques ?*

Une dimension historique dans l'apprentissage des mathématiques aide à mettre en évidence deux perceptions contraires d'une façon dialectique. La première est que les développements mathématiques prennent place dans des contextes culturels. L'antithèse de cette idée consiste à prendre conscience que toutes les cultures humaines ont donné lieu à des développements mathématiques qui sont aujourd'hui l'héritage de chacun ; ceci milite donc contre une vue ethnocentrique étroite du système éducatif.

Notre étude devrait explorer ce que les apprenants gagneraient à prendre conscience qu'ils ont un héritage local provenant de leurs ancêtres directs, mais aussi que chaque culture dans le monde a contribué à l'ensemble des savoirs et des expériences disponibles aujourd'hui pour l'apprentissage.

7. *Quel rôle l'histoire des mathématiques peut-elle jouer pour aider à remplir certains besoins d'enseignement spécifiques ?*

Les enseignants qui ont eu des responsabilités en rapport avec un large éventail de besoins éducatifs spécifiques dise d'expérience que l'histoire des mathématiques est propre à aider les élèves et à améliorer le processus d'apprentissage. En particulier, il existe des études sur des expériences avec des étudiants adultes, dans des cours de techniques numériques, dans des contextes d'apprentissages particuliers, avec des élèves jusqu'alors en difficulté, avec des élèves doués, ou avec des élèves dont les besoins sont liés à des handicaps spécifiques.

8. *Quelles sont les rapports entre le rôle ou les rôles que l'on attribue à l'histoire et les moyens de l'introduire et de l'utiliser dans l'enseignement ?*

Cette question a été un centre d'intérêt fort dans les dernières décennies. Chaque fois que quelqu'un présente une expérience d'enseignement utilisant l'histoire des mathématiques et ce qu'elle a apporté, il suggère une réponse à cette question.

Cette question implique aussi une énumération des moyens permettant d'introduire ou d'incorporer une dimension historique : par exemple de façon anecdotique, en présentant les grandes lignes, du point de vue d'un contenu précis, ou en utilisant des artifices dramatiques, etc. Ensuite, il s'agit de s'intéresser à l'ensemble des objectifs pédagogiques que chaque mode d'incorporation tend à réaliser : la façon dont les anecdotes historiques sont censées changer l'image des mathématiques et les rendre plus humaines, par exemple. Cela débouche sur des sujets riches en discussions et en recherches par exemple à propos de l'utilisation de sources originales en classe de mathématiques à des niveaux appropriés.

9. *Quelles sont les conséquences pour l'organisation et la pratique de la classe ?*

Les conséquences de l'intégration de l'histoire sont d'une portée considérable. En particulier, il y a de plus larges modes possibles d'évaluation. L'évaluation peut être élargie de sorte à développer des aptitudes différentes (telles que l'écriture et la présentation de projets), dans ce sens, les conséquences en termes d'intérêt et d'épanouissement des élèves ont été remarquées. Les enseignants peuvent sans aucun doute avoir besoin de soutien et de conseils pratiques en ce qui concerne les nouveaux modes d'évaluation ou certains aspects de l'organisation de la classe.

10. *En quoi l'histoire des mathématiques peut-elle être utile pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques ?*

Par exemple, l'utilisation de l'histoire des mathématiques peut aider les enseignants comme les apprenants à comprendre et à surmonter les ruptures épistémologiques dans le développement des connaissances mathématiques. Il peut être approprié de mener une analyse critique et constructive de l'idée selon laquelle "l'ontogenèse récapitule la phylogenèse" - que le développement individuel des connaissances mathématiques suit le développement historique des idées. Un autre exemple concerne la recherche sur le développement des concepts mathématiques. Dans ce cas, le chercheur considère l'histoire comme des "lunettes" possibles pour regarder les mécanismes qui mettent la pensée mathématique en marche. De telles combinaisons de perspectives historiques et psychologiques méritent une attention particulière.

11. *Quelles sont les expériences nationales connues ayant permis d'incorporer de l'histoire des mathématiques dans des programmes et des directives officiels ?*

Ce point ne représente pas vraiment une question à discuter mais consiste plutôt à établir une banque de données regroupant des informations provenant de personnes reconnues d'autant de pays et d'états que possible. Mais bien sûr cette tâche comporte également des implications politiques, et pourrait conduire à partager entre membres de la communauté des expériences ayant permis au niveau des appareils politiques d'influencer le contenu ou la forme des documents officiels.

12. *Quel travail a été accompli par le passé qui pourrait entrer dans le champ de cette Étude ?*

La réponse est : beaucoup. Mais ceci est très dispersé et a besoin d'être rassemblé et référencé de façon analytique. Un important travail de bibliographie critique et annotée du domaine, qui prendrait sans doute une part importante de la publication finale, serait une contribution extrêmement riche de l'Étude ICMI. Cette bibliographie devrait inclure un résumé succinct de chaque article ou partie d'ouvrage qu'elle incorporerait, ainsi que des indications sur les catégories dont ces travaux relève, le tout répertorié dans un index analytique. Le travail en cours pourrait être rendu accessible via le WorldWideWeb

Appel à contributions

L'Étude ICMI sur le *rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* explorera les questions exposées ci-dessus pendant les deux prochaines années.

L'Étude comprend trois composantes : une conférence sur invitation, des activités de recherche associées, et une publication à paraître dans la série des Études ICMI qui sera basée sur les contributions en vue et lors de la conférence ainsi que sur les activités de recherche associées. La conférence aura lieu en avril 1998 en France. Les principales productions de l'Étude seront publiées sous la forme d'une Étude ICMI en 1999 et seront présentées lors de l'*International Congress of Mathematics Education* (ICME) au Japon en l'an 2000.

Le Comité International de Programme de l'Étude invite les membres des communautés de recherche sur l'enseignement et sur l'histoire des mathématiques à soumettre des contributions sur les questions, les problèmes ou les sujets spécifiques que ce document aura pu stimuler au plus tard le 1er octobre 1997 (en tout état de cause le plus tôt possible). Les contributions, sous la forme d'articles de recherche, de textes de discussion ou de réponses plus courtes, peuvent aborder une ou plusieurs des questions soulevées plus haut mais aussi des problèmes qui y font écho, voire même des sujets plus larges liés au contenu de l'Étude. Les contributions, en français ou en anglais avec un résumé dans l'autre langue, doivent être envoyées aux deux co-présidents (cf. adresses ci-dessous). Des propositions de recherche qui seraient en cours d'élaboration plus ou moins avancée sont aussi les bienvenues, néanmoins les questions devront être clairement formulées et un aperçu des résultats - obtenus ou seulement attendus - doit être également présenté, si possible en référence avec des travaux antérieurs qui s'y rapportent. Toutes ces propositions seront examinées comme des données potentielles pour l'organisation de l'Étude.

Les membres du Comité International de Programme sont :

Abraham Arcavi (Israel), Evelyne Barbin (France), Jean-Luc Dorier (France), Florence Fasanelli (USA), John Fauvel (Grande-Bretagne, co-président), Alejandro Garciadiego (Mexique), Ewa Lakoma (Pologne), Jan van Maanen (Pays-Bas, co-président), Mogens Niss (Danemark) et Man-Keung Siu (Hong-Kong).

Ce document est une version courte d'un document plus long accessible sur le WorldWideWeb à l'une des adresses suivantes :

http ://www-leibniz.imag.fr/DDM/ICMI.html
ou
http ://www-leibniz.imag.fr/DDM/Etude-ICMI.html

Il a été préparé par John Fauvel et Jan van Maanen avec l'aide de Abraham Arcavi, Evelyne Barbin, Alphonse Buccino, Ron Calinger, Jean-Luc Dorier, Florence Fasanelli, Alejandro Garciadiego, Torkil Heiede, Victor Katz, Manfred Kronfellner, Reinhard Laubenbacher, David Robertson, Anna Sfard, et Daniele Struppa.

Les contributions doivent être envoyées aux deux co-présidents aux adresses suivantes :

John Fauvel, Mathematics Faculty, The Open University,
MiltonKeynes MK7 6AA, England UK
(j.g.fauvel@open.ac.uk)

Jan van Maanen, Department of Mathematics,
University of Groningen, P O Box 800, 9700 AV Groningen, Pays-Bas
(maanen@math.rug.nl)

L'INVENTION D'UNE IDÉE MATHÉMATIQUE : LA DEUXIÈME INCONNUE EN ALGÈBRE

Luis RADFORD
Université Laurentienne, Ontario, Canada (1)

Lueur de petite aube, un instant suspendue, où va se poindre un monde...

André Malraux, *Les voix du silence.*

§1. Introduction

Scruter l'acte d'invention d'une idée mathématique apparaît d'emblée une tâche épistémologique intéressante. Cependant, la tâche est loin d'être facile : à moins d'adopter la supposition simpliste d'après laquelle l'acte d'invention serait confiné à une sorte d'état d'âme qui se déclencherait par un heureux concours de circonstances dans la profondeur d'un esprit fertile et solitaire, une telle tâche demande de chercher, à l'intérieur du cadre conceptuel dans lequel le nouvel objet émerge, les éléments qui ont permis de le penser, de l'imaginer, de l'inventer. Comme disait A. Malraux, " Toute création est, à l'origine, la lutte d'une forme en puissance contre une forme imitée ".

Comment donc, à l'intérieur du cadre conceptuel qui permet à la pensée d'agir en même temps qu'il lui impose inévitablement une limite, peut-on entrevoir, imaginer, inventer ce nouvel être ou ce nouvel objet ? La tâche est d'autant plus difficile qu'on ne peut pas réduire l'invention des idées au seul champ cognitif. En effet, le nouvel objet apparaît inéluctablement porteur, dès sa naissance, des empreintes formelles et fonctionnelles de la culture où il vient au monde. C'est donc vrai, disait J.-P. Sartre en se référant à l'art (mais l'appréciation s'applique aussi bien aux mathématiques), qu'une œuvre

(1) Cet article fait partie d'une recherche qui a reçu une subvention du FRUL (Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne) et une subvention du FCAR (Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche), Québec, No. 95ER0716.

d'art est à la fois une production individuelle et un fait social (Sartre, 1964). Bien sûr, il ne s'agit pas de voir le volet social de la création comme une simple question de "mise d'accord" d'une communauté mathématique, à la manière des votations lors d'une assemblée. Il ne s'agit pas non plus d'affirmer, comme le veut le béhaviorisme social, que la création est la conséquence des conditions sociales et culturelles suffisantes qui, une fois réunies, déclencheront l'acte d'invention. Le problème est beaucoup plus profond : ce que nous suggérons c'est que le cadre conceptuel mathématique à partir duquel l'idée prend forme et contre lequel la pensée se dresse dans l'acte d'invention fait partie d'un ensemble plus vaste, à savoir, celui de la rationalité culturelle, rationalité qui, pour utiliser une expression qui revient à Fleck (1935), définit le *style* de pensée de la culture en question. Le style de pensée de la culture fournit les critères et les modes qui déterminent, entre autres, la nature ontologique des objets mathématiques, le type de discours scientifique tenu comme acceptable, les arguments reconnus comme valides et les méthodes de recherche qui lui sont propres (Crombie, 1995). Le style de pensée configure ainsi l'"aspect" ou la "forme" de l'objet créé ainsi que son "contenu".

Comprendre la pensée mathématique et son mouvement créateur ne peut se faire, d'après la perspective que nous venons d'esquisser, que par une mise en rapport dialectique entre la pensée mathématique et son contexte culturel.

Le travail que nous présentons ici se propose d'aborder le problème de l'invention de la deuxième inconnue en algèbre chez les mathématiciens abaquistes (c'est-à-dire, les mathématiciens œuvrant dans les écoles d'abaco du Moyen Âge et du début de la Renaissance en Italie) (2). Rappelons ici que, sous formes sémiotiques différentes (3) la deuxième inconnue algébrique avait déjà paru en Mésopotamie ainsi que de façon très ponctuelle chez les Arabes dans une œuvre écrite probablement au début du XIe siècle, l'*Extrait du* Fakhrî, par le mathématicien Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî (voir Woepcke, 1853).

L'invention abaquiste de la deuxième inconnue se trouve au centre du passage d'une algèbre à une inconnue à une algèbre à plusieurs inconnues. L'intérêt que nous portons à ce thème provient, d'une part, du fait que, historiquement, chez les abaquistes, les méthodes algébriques de résolution de problèmes en mots ("word-problems") sont demeurées longtemps basées sur l'utilisation d'une seule inconnue (on pourra consulter notre étude historico-épistémologique de la pensée algébrique "à une inconnue" dans Radford, 1995a) ; d'autre part, au niveau de l'enseignement, nous avons constaté à plusieurs reprises certaines difficultés qu'éprouvent les élèves à passer de la maîtrise des méthodes algébriques basées sur une inconnue à celle des méthodes basées sur l'utilisation de plusieurs inconnues

(2) Problème qui ne s'est pas présenté dans la culture chinoise ancienne, comme le suggèrent les données historiques disponibles.

(3) Nous prenons ici le terme "forme sémiotique" au sens d'un ensemble de procédures, implicite ou explicitement formulées, comprenant, entre autres, les formes de *symbolisation* qu'une culture se donne ; cela comprend, en plus des formes spécifiques de représentation basées sur l'utilisation de signes ou codes, les formes (par exemple, les activités ou arguments) sociales de munir de significations les objets de la culture en question –dans l'occurrence les "objets mathématiques".

(Radford, 1994). La réapparition du problème du passage de l'algèbre à une inconnue à l'algèbre à plusieurs inconnues dans deux cultures différentes (celle de la transition Moyen Âge-Renaissance et celle dans laquelle nos élèves se trouvent submergés) nous invite à nous pencher sur celui-ci afin d'essayer de mieux le comprendre dans chacun de ses aspects socioculturels locaux, c'est-à-dire afin de mieux le comprendre à la lumière de son propre mouvement historico-sémiotique [4].

Avant de disposer sur la table les instruments qui vont nous permettre de scruter cet acte particulier de création, arrêtons-nous un moment sur la considération suivante. En termes généraux, l'émergence d'un concept se joue sur la frontière des connaissances actuelles et sur celles en devenir. C'est – dans certains cas – la prise de conscience de l'impossibilité des outils (concepts, méthodes,...) actuels pour résoudre un *nouveau* problème [5]. Dans d'autres cas, c'est le résultat de vouloir résoudre *autrement* un vieux problème pour lequel on disposait déjà des outils nécessaires à sa résolution. En fait, comme nous allons le voir, l'émergence de la deuxième inconnue semble appartenir au deuxième cas mentionné.

(4) C'est donc délibérément que nous évitons de poser le problème en termes d'*obstacles épistémologiques* (pour une discussion plus détaillée au sujet de l'étude et de la comparaison de la production mathématique dans différents contextes historiques, voir Radford, sous presse).

(5) Comme Vergnaud l'a souligné dans son travail *La théorie des champs conceptuels* (1990), une méthode ou procédure peut résoudre une certaine classe de problèmes, mais peut être insuffisante pour résoudre d'autres problèmes. Alors un nouveau processus de construction de connaissances a lieu : il peut arriver que de nouveaux concepts ou de nouvelles méthodes soient élaborés.

§2. L'espace d'émergence de la deuxième inconnue

Quel est l'espace conceptuel à l'intérieur duquel et contre lequel émerge la deuxième inconnue ?

Pour répondre à cette question, il convient de rappeler que les mathématiciens abaquistes du Trecento ont procédé à une assimilation de l'algèbre léguée par leurs prédécesseurs des 12^e et 13^e siècles (Jean d'Espagne, Fibonacci). Toutefois, il ne s'agit pas seulement de l'assimilation d'une tradition et du remplacement de sa langue d'expression – le latin – par la langue en usage dans le milieu social des marchands dans lequel l'algèbre allait désormais se développer – l'italien –, mais, aussi, d'une simplification dans la terminologie. Alors que les objets de base de l'algèbre de Fibonacci (1202 ; voir Boncompagni, 1857) sont *censo* (le trésor) et *radix* (la racine) – qui se confond avec *res* (la chose) [6], ce qui est dû probablement à la convergence de plusieurs traditions algébriques au cours du Moyen Âge [7] –, les maestri d'abaco du Trecento ne conservent que deux termes : *la cosa* (la chose) et son carré désigné par le mot *il censo* (le trésor) (voir, par exemple, le *Chasi Exenplari alla regola dell'algibra* de Maestro Biagio, Pieraccini, éd., 1983 ou le *Trattato dell'alcibra amuchabile*, d'un auteur anonyme du 14^e siècle, éd. Simi, 1994).

L'espace duquel émergera la deuxième inconnue est donc un "espace bi-dimensionel" dont les objets sont engendrés par le mouvement calculatoire des objets de base – la *cosa* et le *censo* – lors de la résolution de problèmes. En fait, bien qu'il

(6) Pour un exemple, voir le problème donné *in extenso* dans Radford (1995a, p. 31).

(7) Voir à ce sujet Høyrup (1993, p. 13 f.)

y ait une relation fonctionnelle entre les objets de base, en ce sens que le *censo* est le carré de la *cosa* (ou multiplication de la *cosa* par elle même), ces deux objets apparaissent comme différents dans la conceptualisation abaquiste. C'est pourquoi, parfois, la réponse ne consiste pas à donner seulement la valeur numérique de la *cosa* mais aussi celle du *censo* (8). D'autre part, remarquons que la relation entre la *cosa* et le *censo* n'a pas toujours été celle d'un nombre à son carré. Par exemple, dans le texte d'origine hindoue *Liber augmenti et diminutionis,* traduit par Abraham ben Ezra au 11e siècle, on trouve le problème suivant :

> "Un trésor (*censo*) est augmenté de son tiers. Alors une quatrième partie de cet agrégat est ajoutée à la première addition. La nouvelle addition est 30. Combien le trésor originel était-il ?" (Libri, 1838-1841, p. 321 ; notre traduction) (9).

Dans ce problème, la relation entre le *censo* et la *cosa* est bien différente : la *cosa* (*res* dans la traduction latine) est appelée à désigner (*"Deinde assumas rem"*) le trésor plus un tiers du trésor, de sorte qu'on résout d'abord l'équation "une *cosa* plus un quart de la *cosa* égal à 30", puis, en trouvant que la *cosa* est égale à 24, on résout une deuxième équation dont la nouvelle inconnue est à nouveau appelée la *cosa* (*"Deinde assume rem secundam"*). Cette équation est : "une cosa et un tiers de la cosa égal à 24".

Un point important à soulever – et qui aura des répercussions dans l'invention de la deuxième inconnue – est la *nature fonctionnelle* de la *cosa*. Fonctionnellement, la *cosa* n'est rien d'autre qu'un artifice heuristique – comme l'est l'*arithme* dans la résolution de problèmes chez Diophante (*cf.* Radford, 1992) – et comme l'est un de ses ancêtres, le *positio*, c'est-à-dire le nombre qu'on choisit comme solution provisoire au début d'une démarche de fausse position (10). La nature fonctionnelle de la *cosa* en tant qu'artifice heuristique apparaît très clairement dans le problème du *Liber augmenti et diminutionis* vu ci-dessus : elle apparaît à deux reprises comme une même représentation de deux expressions différentes (d'abord comme représentation de $t + \frac{1}{3}$ t dans

(8) Par exemple dans le problème 19 de l'annexe du *Traité d'Al-jabr* d'Al-Khwarizmi, dans la traduction de Gerardo de Cremona (Hughes, 1986, p. 261), on trouve d'abord *res* = $1\frac{1}{3}$, puis *censo* = $1\frac{7}{9}$.

(9) Si on désigne par *t* le trésor, on peut traduire le problème précédent comme suit :
$t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}(t + \frac{1}{3}t) = 30$.

(10) Remarquons que, pour résoudre le problème mentionné ci-dessus du *Liber augmenti et diminutionis* par la méthode de simple fausse position, nous pouvons faire le *positio* suivant : nous pouvons (sup)poser la cosa égale à 4 dans la première équation $t + \frac{1}{4}t = 30$, ce qui nous amène à $4 + \frac{1}{4}4 = 5$. Or, nous voulions 30. Vu que 5 (la réponse obtenue) et 30 (la réponse voulue) sont dans le rapport de 1 à 6, il s'ensuit que la valeur exacte de *t* doit être 6 fois la valeur supposée de *t* (qui était 4). D'où que $t = 24$. En appliquant encore une fois la méthode de fausse position, mais cette fois à l'équation $t + \frac{1}{3}t = 24$, on obtiendrait que le trésor est égal à 18. Comme nous l'avons déjà suggéré (voir Radford, 1996 ; 1995b), l'idée d'inconnue algébrique aurait émergé précisément au moment où l'on arrête de penser en termes de solutions fausses *a priori* (c'est-à-dire, en termes de *positio*) pour penser en termes de la solution exacte quoique encore non-connue.

$t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}(t + \frac{1}{3}t) = 30$, puis comme représentation du trésor dans l'équation "un trésor et un tiers du trésor égal à 24".

Arithmétiquement indéfinissable (en ce sens qu'il est la négation de la détermination arithmétique des nombres et qu'il ne deviendra détermination qu'à la fin des calculs), cet objet appelé la cosa, dont le nom bizarre est assez suggestif des difficultés que les mathématiciens d'antan ont eues à pouvoir le nommer, nous amène dans l'espace du "non-encore-déterminé" ou de l'occulte, pour utiliser l'expression du Maestro Antonio de'Mazzinghi (ca. 1353-1383). En effet, la cosa, disait celui-ci, est une quantité occulte (11). Comme nous le verrons dans le chapitre qui suit, c'est avec un nom flou, pris du langage courant, et qui désigne un objet à nature heuristique, comme la cosa elle-même, que la deuxième inconnue est inventée.

§3. L'émergence de la deuxième inconnue

C'est précisément dans le *Trattato di Fioretti*, composé vers 1373 par Mazzinghi lui-même, que la deuxième inconnue apparaît en Occident, et c'est dans le problème 9 que nous la trouvons pour la première fois :

> "Trouve deux nombres qui multipliés entre eux font 8 et [la somme de] leur carré est 27". (Arrighi, éd., 1967, p. 28 ; notre traduction)

Si nous désignons les nombres par a_1 et a_2 respectivement, le problème, en notations modernes est :

$$a_1 . a_2 = 8$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 27$$

La solution de Mazzinghi est la suivante :	Traduction moderne :
« ... que la première quantité soit une chose moins la racine d'une certaine quantité, l'autre soit une chose plus la racine d'une certaine quantité. Maintenant je multiplie la première quantité par elle-même et la deuxième quantité par elle même et je les additionne ensemble et j'ai 2 censi et une quantité non connue, laquelle quantité non connue est laquelle qui est 2 censi jusqu'à 27, qui est 27 moins 2 censi [d']où la multiplication de cette quantité est 13 1/2 moins 1 censo. Donc, la plus petite partie est une chose moins la racine de 13 1/2 moins 1 censo et l'autre est une chose plus la racine de 13 1/2 moins 1 censo. Et je dis que j'ai trouvé 2 quantités dont les carrés ajoutés ensemble font 27 et une [quantité] est une chose moins la racine de 13 1/2 moins un censo, l'autre [quantité] est une chose plus la racine de 13 1/2 moins 1 censo. Maintenant il faut voir si en multipliant l'une	Soient : $a_1 = t - \sqrt{q}$, $a_2 = t + \sqrt{q}$ $a_1^2 + a_2^2 = 2t^2 + 2(\sqrt{q})(\sqrt{q}) = 27$ $2(\sqrt{q})(\sqrt{q}) = 27 - 2t^2$ $(\sqrt{q})(\sqrt{q}) = 13\frac{1}{2} - t^2$ $a_1 = t - \sqrt{13\frac{1}{2} - t^2}$ $a_2 = t + \sqrt{13\frac{1}{2} - t^2}$

(11) "Chosa è una quantità ochulta." (Cité par Franci et Rigatelli, 1988, p. 15).

par l'autre cela fait 8 ; [d']où je multiplie une chose moins [la] racine de 13 1/2 moins 1 censo par une chose plus [la] racine de 13 1/2 moins un censo. Et quand je multiplie, premièrement 1 chose par une chose, cela fait un censo ; et puis, je multiplie 1 chose par plus racine de 13 1/2 moins 1 censo, et une chose par moins racine de 13 1/2 moins un censo, cela fait 0 ; et puis multiplie moins racine de 13 1/2 moins 1 censo par plus racine de 13 1/2 moins 1 censo, cela	$a_1 . a_2 = 8$ $\left(t-\sqrt{13\frac{1}{2}-t^2}\right)\left(t+\sqrt{13\frac{1}{2}-t^2}\right)=8$
fait un censo moins 13 1/2. Et l'on ajoute au censo de tantôt, cela fait 2 censi moins 13 1/2. Et ceux-ci sont égaux à 8, où j'ai rendu égales les parties et j'ai dû additionner à chaque partie 13 1/2 et on a que 2 censi sont égaux à 21 1/2. On se rapproche d'un censo et on a qu'un censo est égal à 10 3/4. Donc la chose vaut la racine de 10 3/4 et le censo vaut son carré, c'est-à-dire, 10 3/4 ; [d']où la première partie, qu'on avait trouvé qu'elle était une chose plus [la] racine de 13 1/2 moins 1 censo*, j'ai enlevé 10 3/4 de 13 1/2, il reste 2 3/4. Et je dis que la première partie est la racine de 10 3/4 plus la racine de 2 3/4 et l'autre, qui était une chose moins la racine de 13 1/2 moins 1 censo, j'ai enlevé 10 3/4 de 13 1/2, il reste 2 3/4 et je dis que l'autre partie est la racine de 10 3/4 moins la racine de 2 3/4 [...] »	$2t^2 - 13\frac{1}{2} = 8$ $2t^2 = 21\frac{1}{2}$ $t^2 = 10\frac{3}{4}\quad t=\sqrt{10\frac{3}{4}}$ $a_1 = \sqrt{10\frac{3}{4}} - \sqrt{2\frac{3}{4}}$ $a_2 = \sqrt{10\frac{3}{4}} + \sqrt{2\frac{3}{4}}$

** On remarquera que Mazzinghi aurait dû soustraire et non pas ajouter la racine de 13 1/2 moins un censo ; cependant, cela ne modifie pas le résultat.*

Ainsi, la deuxième inconnue apparaît comme une certaine *quantité* dont la racine est enlevée de (resp. ajoutée à) la *cosa* pour donner le premier (resp. deuxième) nombre cherché.

La première question qui s'impose est la suivante : Qu'est-ce qui amène Mazzinghi à exprimer ainsi les nombres cherchés a_1 et a_2 ?

En effet, deux raisons font du choix de Mazzinghi un choix assez particulier.

(i) Premièrement, une paramétrisation plus "directe" des nombres dans lequel le premier nombre serait désigné par la *cosa* et le deuxième nombre par la *quantità* mène à une résolution dont le coût syntactique est nettement moindre que le coût syntactique qu'impose la démarche suivie par Mazzinghi. En effet, si l'on exprimait la *quantità* en fonction de la *cosa*, on aboutirait rapidement à une équation bicarrée, en l'occurrence l'équation : "le *censi* du *censo* plus 64 est égal à 27 fois le *censo* ", c'est-à-dire : $64 + x^4 = 27x^2$, donc à un type d'équation que Mazzinghi sait résoudre. (Par exemple, dans le problème 27 du *Trattato di Fioretti*, Mazzinghi résout l'équation $56255 + 4100x^4 = 9940x^2$). Si nous appliquons la méthode de résolution canonique à l'équation $64 + x^4 = 27x^2$, nous trouvons que $x^2 = 13\frac{1}{2} - \sqrt{118\frac{1}{4}}$; il en résulte que la *cosa*, x, vaut : $x = \sqrt{13\frac{1}{2}-\sqrt{118\frac{1}{4}}}$. Donc le premier nombre est $\sqrt{13\frac{1}{2}-\sqrt{118\frac{1}{4}}}$ et l'autre nombre est $\frac{8}{\sqrt{13\frac{1}{2}-\sqrt{118\frac{1}{4}}}}$.

(ii) Deuxièmement, comme paramétrisation algébrique, le choix d'exprimer les nombres par "la cosa plus ou moins la *racine* d'une certaine quantité" (12) ne semble pas naturel dans le contexte de la tradition algébriste abaquiste (13).

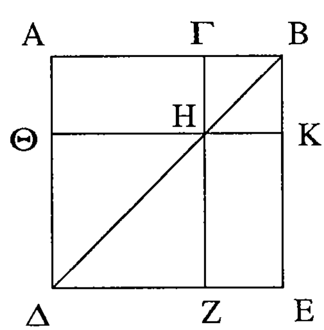
La réponse à la question du choix particulier d'Antonio de' Mazzinghi dans la paramétrisation des nombres cherchés est sans doute liée à la façon dont la *quantità* a été *imaginée*. Pour y voir de plus près, attardons-nous un moment sur une autre solution que Mazzinghi donne au même problème et qui précède la solution algébrique vue ci-dessus. C'est une solution que Mazzinghi reconnaît comme n'appartenant pas à l'algèbre et qui fait appel à la proposition 4 du Livre II d'Euclide. Maestro Mazzinghi dit :

"Maintenant à la résolution dans la quatrième [proposition] du deuxième [Livre] d'Euclide il est montré que quand il y a 2 quantités leurs carrés avec le double de la multiplication d'une [quantité] par l'autre est égal au carré de l'ensemble des 2 quantités. Donc, si on double 8, qui est la multiplication d'une quantité par l'autre, on aura 16 ; et ceci s'ajoute à 27 et cela fait 43. Et ceci est le carré de leur ensemble, donc, leur ensemble est la racine de 43. Maintenant qu'on a trouvé qu'entre les deux, lesdites quantités sont la racine de 43, et nous dirons : fais de la racine de 43, 2 parties, que l'une multipliée par l'autre fasse 8. Où je divise la racine de 43, que cela soit la moitié de la racine de 10 3/4, et celui-ci multiplié par lui-même fait 10 3/4 et de ceci j'enlève 8, il reste 2 3/4, duquel on prend la racine qui est la racine de 2 3/4 et enlève-la de la racine de 10 3/4, il reste la racine de 10 3/4 moins la racine de 2 3/4, et voilà la première partie. Et la deuxième partie est la racine de 10 3/4 plus la racine de 2 3/4 [...]". (Arrighi, 1967, p. 28 ; notre traduction).

Ainsi, l'idée consiste à utiliser la proposition 4 du Livre II d'Euclide, qui dit :

"Si la droite est coupée à volonté, le quarré [sic] de la droite entière est égal aux quarrés [sic] des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments." (Peyrard, 1819, p. 43).

La figure qui accompagne la démonstration de cette proposition dans les *Éléments* d'Euclide est celle-ci :



La droite est AB et elle est coupée en Γ. La proposition affirme que l'aire du carré

(12) "porremo che lla prima quantità sia una chosa meno la radice d'alchuna quantità, l'altra sia una chosa più la radice d'alchuna quantità" (Arrighi, 1967, pp. 28-29)

(13) C'est sans doute la nouveauté de la paramétrisation qui amène Maestro Benedetto, auteur d'une sorte d'encyclopédie du 15e siècle, à dire, en se référant au problème 9 du *Trattato di Fioretti*, qu'"ici la pensée de notre Antonio est allée très haut".

AE est égale à l'aire des carrés ΘZ et ΓK et celle des rectangles *AH* et *HE*.

Cette proposition permet à Mazzinghi de transformer le problème initial en un problème de "somme et produit connus" qui, écrit en langage moderne, correspond à :

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \sqrt{43} \\ a_1 \cdot a_2 &= 8 \end{aligned}\right. \qquad (T)$$

ce qui est possible en interprétant les nombres a_1 et a_2 du problème initial (c'est-à-dire du problème $a_1 . a_2 = 8$, $a_1^2 + a_2^2 = 27$) comme étant la longueur des segments AΓ et ΓB. Les résultats obtenus sont, donc : $a_1 = \sqrt{10 3/4} - \sqrt{2 3/4}$ et $a_2 = \sqrt{10 3/4} + \sqrt{2 3/4}$.

En regardant les résultats que fournit la solution non-algébrique au problème 9 du *Trattato di Fioretti*, nous nous apercevons que les nombres cherchés s'écrivent comme la somme et la différence de la racine de deux nombres : $a_1 = \sqrt{10 3/4} - \sqrt{2 3/4}$ et $a_2 = \sqrt{10 3/4} + \sqrt{2 3/4}$. Il devient clair que l'idée qui a permis à Mazzinghi d'*imaginer* la deuxième inconnue provient de la *structure numérique* des solutions a_1 et a_2. En remplaçant le premier terme $\sqrt{10 3/4}$ par la *cosa* (quelque chose de *pensable* dans l'espace "bi-dimensionnel" engendré par la *cosa* et le *censo* où la cosa est souvent exprimée numériquement par un radical) et en *occultant* le nombre 2¾ avec quelque chose de nouveau, en l'occurrence "alchuna quantità", Mazzinghi accomplit un acte d'invention qui se révélera vite très fructueux.

En effet, la paramétrisation juste imaginée, qui met maintenant à disposition deux objets : la *cosa* et la *quantità*, et qui bouscule le paysage monotone de l'ancien espace "bi-dimensionnel", commence à porter ses fruits dans d'autres problèmes : tout de suite après, Mazzinghi aborde le problème suivant :

> Trouve deux nombres tels que la somme de leurs carrés est 100 et en multipliant l'un par l'autre on a le carré de la différence des deux nombres moins 5 (Arrighi, 1967, p. 30) (14).

Comme précédemment, ce problème est résolu en exprimant les nombres cherchés sous la forme $t \pm \sqrt{q}$. Mais plus loin, la relation est modifiée : au lieu d'utiliser $t \pm \sqrt{q}$ il utilise $q \pm t$. C'est le cas du problème 18 du *Trattato*, que nos notations modernes permettent de traduire par

$$a_1 \cdot a_2 = (a_1 - a_2)^2$$
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = a_1 + a_2$$

Dans le problème 20, les nombres cherchés (a_1 et a_2) sont exprimés comme $t \pm q$. Traduit en notations modernes, ce problème s'écrit ainsi :

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} = 6$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 60$$

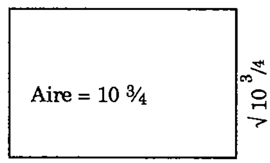
Nous venons donc de voir que Mazzinghi donne deux solutions au problème 9 et que les résultats fournis par la solution articulée sur la proposition 4 du Livre II d'Euclide est à la base de l'invention de la deuxième inconnue. Or, d'où cette solution vient-elle ? Mazzinghi ne justifie pas la démarche de résolution au problème transformé (T). La rapidité avec laquelle Antonio débute l'étape algorithmique de

(14) En notations modernes : $x^2 + y^2$ 100, $x . y = (x - y)^2 - 5$.

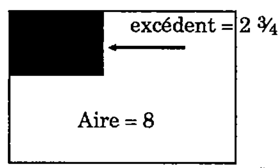
résolution proprement dite, sans explication additionnelle, laisse sous-entendre que cette démarche algorithmique (non algébrique, car la *cosa* et le *censo* n'y sont pas employés) était bien connue à l'époque. En fait, le problème de "somme et produit connus" est un problème ancien (qui remonte aux Babyloniens, et qui réapparaît énoncé sous forme arithmétique chez Diophante : problème I, 27).

Probablement ce que Mazzinghi a en tête est la solution géométrique suivante (ce qui est d'ailleurs suggéré par l'allusion à la proposition géométrique d'Euclide) qui consiste à transformer les figures en coupant et en collant certaines de ces parties, jusqu'à arriver à la solution cherchée (les citations suivantes proviennent de l'extrait donné ci-dessus pris d'Arrighi, 1967, p. 28) :

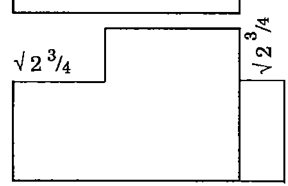
« fais de la racine de 43, 2 parties [...] je divise la racine de 43 en deux parties, que cela soit la moitié de la racine de 10 3/4 ». Dans une démarche de quasi fausse position, on commence par supposer que les côtés a_1, a_2 du rectangle cherché sont égaux à leur demi-somme. Chacun d'eux mesure donc $\sqrt{10\ 3/4}$, et le rectangle AG devient un carré.



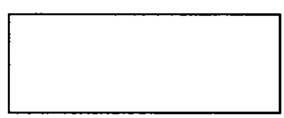
« ... ceci [$\sqrt{10\ 3/4}$] multiplié par lui-même fait 10 3/4 ». Or le rectangle ainsi obtenu a une aire égale à 10 3/4, alors qu'on cherche un rectangle d'aire égale à 8. Donc on a un excédent de 2 3/4.



« j'enlève 8, il reste 2 3/4 duquel on prend la racine ». On doit donc retrancher la partie ombragée du carré et transformer la figure résultante en rectangle. Cela est obtenu en découpant le rectangle supérieur et en le déplaçant vers la droite.



« enlève-là [$\sqrt{2\ 3/4}$] de la racine de 10 3/4 et il reste... ». Le rectangle cherché a alors une côté égal à $\sqrt{10\ 3/4} + \sqrt{2\ 3/4}$, et l'autre côté égal à $\sqrt{10\ 3/4} - \sqrt{2\ 3/4}$.



Cette solution appartient à un courant mathématique que Høyrup (1990) a mis en évidence – la géométrie du collage – et dont les origines remonteraient aux anciens Babyloniens. La géométrie du collage, visible dans le *Liber Mensurationum* d'Abû Bakr, une œuvre probablement contemporaine du *Traité d'Al-jabr* d'Al-Khwarizmi, se fond avec une tradition numérico-algébrique dans l'œuvre de ce dernier avec ses preuves géométriques (*cf.* Høyrup, 1986). La géométrie du collage, en tant que tradition mathématique, a certainement pénétré le milieu des mathématiciens abaquistes, comme le suggère la solution de certains problèmes du *Liber Abaci* et de la *Géométrie Pratique* de Léonardo Pisano. Elle est aussi présente chez Luca Pacioli et chez son maître Piero della Francesca [15], ce qui rend vraisemblable l'idée que Mazzinghi ait effectivement fait appel à des éléments de cette tradition quand il aborde la solution non-algébrique du problème précédent.

La discussion précédente suggère donc que la deuxième inconnue algébrique émerge inspirée d'une résolution non-algébrique (probablement géométrique) d'un problème qu'on savait déjà résoudre. Elle émerge de l'"espace bi-dimensionnel" engendré par la *cosa* et le *censo* et, comme ces derniers, elle joue un rôle heuristique. De plus, les problèmes d'émergence sont des problèmes qui expriment des conditions *symétriques*. (Les traductions modernes des problèmes précédents permettent de voir cela clairement : a_1 et a_2 peuvent être permutés dans l'énoncé des problèmes). Maintenant la route est déjà esquissée : des relations non-symétriques pourront être considérées dans le choix qu'on fera dans l'écriture des nombres en fonction de la *cosa* et la *quantità*.

§4. Une hiérarchie entre inconnues

Il convient d'ajouter ici que bien que la deuxième inconnue, la *quantità*, soit considérée par Mazzinghi comme une inconnue au sens algébrique abaquiste, elle est assujettie à la première inconnue, c'est-à-dire à la *cosa*. Ainsi, dans la démarche de résolution, Mazzinghi va toujours exprimer la *quantità* en termes de la *cosa*, de sorte que l'équation finale est donnée en termes de la *cosa* et non pas de la *quantità*. Il y a donc une hiérarchie établie entre inconnues [16]. La hiérarchie entre inconnues n'est plus présente dans l'œuvre de Cardano, où celles-ci acquièrent un rang d'égalité. En effet, dans son *Ars Magna*, publié en 1545, donc plus d'un siècle et demi plus tard que le *Trattato* de Mazzinghi, Cardano consacre les chapitres 9 et 10 à la deuxième inconnue. Les première et deuxième inconnues sont appelées *positio* and *quantità*, respectivement. Le premier problème du chapitre 9, un problème qui "autrement [c'est-à-dire sans le recours à deux inconnues] nous ne pourrions expliquer que difficilement" s'énonce ainsi :

> "Trois hommes ont un certain montant d'argent. Le montant du premier homme plus la moitié de ce qu'ont les deux autres font 32 *aurei* ; le montant du deuxième homme plus un tiers de ce qu'ont les autres font 28 *aurei* ; le montant du troisième homme plus un quart de ce qu'ont les deux autres font 31 *aurei*. Combien chaque homme a-t-il ?" (Cardano, 1545, p. 71 ; notre traduction)

Le montant du premier homme est désigné par *positio*, le montant du deuxième homme est désigné par *quantità* (le montant du troisième homme est

(15) Par rapport à ce dernier, voir par exemple, le problème "de la surface et les 4 côtés" (Arrighi, 1970, p. 122), un problème babylonien auquel Høyrup consacre son article de 1993 "*The Four Sides and the Area*". C'est dans ce même article que l'influence de la géométrie du collage chez Pisano et Pacioli à laquelle nous venons de faire référence est mise en évidence.

(16) Ce phénomène se manifeste aussi au niveau de l'insertion de l'objet "deuxième inconnue" au réseau sémiotique déjà en place : alors que le carré de la cosa est désigné par un mot précis, 'il censo', il n'y a pas de mot analogue pour désigner le carré de la quantità. Mazzinghi dit alors "la multiplication de la quantité" (voir problème 9 du *Trattato* ci-dessus) ou encore, comme dans les problèmes 18 et 20 du *Trattato* : "le carré de cette quantité" (voir l'édition d'Arrighi, 1967, p. 41 et p. 45).

exprimé en termes de *positio* et de *quantità*, à travers les relations données dans l'énoncé du problème). Dans ce problème, l'équation finale est exprimée en termes de la *quantità*. C'est donc la *quantità* qui est trouvée en premier, alors que dans le deuxième problème du même chapitre (qui est un problème du même type que le précédent, sauf qu'il y a seulement deux hommes), l'équation finale est exprimée en termes de *positio*, de sorte que c'est le *positio* qui est trouvé en premier.

§5. Les autres inconnues

L'apparition de la deuxième inconnue va préparer le terrain pour l'apparition de l'algèbre à plus de deux inconnues. L'œuvre de Michel Stifel, *Arithmetica Integra*, publiée en 1544 – donc juste un an avant l'*Ars Magna* de Cardano – consacre le troisième et dernier livre à l'algèbre – appelée "*de perfecta arte calculandi*". Le chapitre 6 de ce livre est destiné aux *secundis radicibus*, c'est-à-dire, les autres inconnues. Contrairement à Cardano, Stifel commence en considérant un problème très simple, qui peut facilement être résolu à l'intérieur de l'algèbre à une inconnue :

> Deux nombres, qui ajoutés font 15. Le plus grand divisé par le plus petit fait 19. [Quels sont les nombres ?]. (Stifel, 1544, p. 251r ; notre traduction).

Son souci est en effet autre : vu qu'on n'est plus en face d'un problème symétrique, comme c'était le cas chez Maestro Mazzinghi, le choix des inconnues pour le plus grand et le plus petit nombre n'est plus considéré comme allant de soi. Donc il veut montrer qu'on peut représenter le plus grand nombre par le symbole x (qui désigne la *cosa*) ou par la lettre A, qui désigne la deuxième inconnue. Donc, il résout d'abord le problème en prenant x pour le nombre le plus grand ; puis il refait le problème en prenant x pour le nombre le plus petit, et il montre qu'on arrive au même résultat. Dans les deux solutions, il exprime toujours A en termes de x. Ensuite il montre avec le même problème qu'on peut choisir d'exprimer x en termes de A et résoudre l'équation en A. Plus loin, il résout un problème qui fait intervenir 7 équations linéaires et 7 inconnues. Les inconnues sont représentées par x, A, B, C, D, E et F (17).

La méthode de paramétrisation de Stifel (c'est-à-dire celle qui consiste à représenter les inconnues du problème par des lettres différentes) sera suivie quelques années plus tard par Jacques Peletier du Mans dans son livre *L'Algèbre* (1553) avec des intentions différentes – celles d'enlever à l'algèbre le caractère marchand qu'elle avait eu jusqu'alors pour la convertir en une discipline scientifique, digne de la cour et des milieux juristes de la France du 16 siècle (18). Dans *L'Algèbre*, Peletier reprendra précisément l'exemple de Cardano discuté ci-dessus (voir §4) et représentera les avoirs des trois hommes par I R, I A et I B (Peletier, 1553, p. 106 ff).

(17) Le symbole x n'est pas un présage de notre symbole "*x*". Il s'agit de la lettre "r ornementée" telle qu'on avait l'habitude de l'écrire dans les documents manuscrits antérieurs au 15e siècle. Le fait que Stifel l'utilise ici pour désigner l'inconnue, alors qu'il utilise en *même temps* les lettres A, B, C, etc., pour représenter les autres inconnues, est la manifestation du phénomène de transition que lui et son siècle sont en train de vivre : celui de l'introduction de l'imprimerie.

(18) Voir Cifoletti, 1995.

§6. Mazzinghi et la pensée culturelle du Trecento

Dans la reconstruction historique d'invention de la deuxième inconnue que nous venons de proposer, nous avons vu comment Mazzinghi s'appuie sur la connaissance des solutions $a_{1,2} = \sqrt{10\,3/4} \pm \sqrt{2\,3/4}$ du problème $a_1 \cdot a_2 = 8$; $a_1^2 + a_2^2 = 27$ fournies par une résolution non-algébrique. Dans notre reconstruction, l'idée créatrice consiste à voir les solutions a_1 et a_2 et doublement *occultes* : d'abord on occulte le premier terme $\sqrt{10\,3/4}$ des solutions par la *cosa* (ce qui en fait n'est rien d'autre que la propre définition de la *cosa* : voir note de bas de page 11), puis, dans un mouvement qui apparaît tout à fait *naturel* dans l'"espace bi-dimensionnel" *cosa-censo*, on occulte la racine du deuxième terme, c'est-à-dire, 2¾. Mais pour accomplir cette tâche, il faut un *nouveau nom* ; il faut occulter ce nombre par un mot. Or Mazzinghi, comme ses collègues les Maestri d'abaco, sont des hommes pratiques, ce sont aussi des hommes d'affaires. Ce ne sont pas des humanistes. Ce ne sont pas des philosophes. On ne va pas aller chercher des mots savants en usage chez les orateurs de l'époque dévoués à la restitution du latin : Mazzinghi prend un mot de la langue courante, de l'italien vernaculaire. Il n'y a pas, on dirait, de mot plus à la portée que celui d'*alchuna quantità*. Mais dans ce geste banal, la pensée accomplit ce mouvement transcendantal qui va à l'encontre de l'*imitation*, selon les mots de Malraux, et dans lequel réside la nouveauté nécessaire à l'acte créateur. En effet, l'abaquiste a, en pratique, un soin précieux à bien distinguer le langage algébrique du langage naturel (19). C'est cela qui explique que l'abaquiste ne puisse jamais se passer de paramétriser le (ou les) nombre(s) cherché(s) en termes de la *cosa* et/ou du *censo* et leurs puissances, même si, parfois, en passant par la paramétrisation il ne simplifie pas la tâche de résolution du point de vue syntactique (20). C'est que l'abaquiste ne raisonne jamais sur les nombres cherchés eux-mêmes. C'est pourquoi il n'y a jamais d'équation dans le langage naturel. Il raisonne toujours à l'intérieur de l'"espace bi-dimensionnel" algébrique. Les égalités qui apparaissent dans l'énoncé du problème sont des égalités de relation ; elles sont descriptives. Les autres égalités – des égalités qui appartiennent à l'espace algébrique– sont des égalités conditionnelles ou des égalités algébriques proprement dites (c'est le cas de l'égalité "2 censi égal à 21 1/2" qui apparaît dans le problème 9 du *Trattato di Fioretti* donné in extenso au §3) *(cf. schéma page suivante)*.

Mazzinghi fait bousculer la tradition en introduisant un mot de l'italien quotidien dans l'espace algébrique quand il dit : "que

(19) Il ne faudra pas penser que parce qu'il n'y a pas de "*x*" ou de "*y*", qu'il n'y pas de langage algébrique. Les abaquistes avaient certainement développé un langage algébrique. On se gardera toutefois de voir le langage algébrique abaquiste comme un langage pré-symbolique syncopé (voir Radford, sous presse).

(20) Un exemple est le suivant : Dans ses *Question d'algebra*, écrits en 1384, Maestro Gilio pose le problème suivant : "Trouve un nombre qui multiplié par 6 et que ce produit divisé par 3 donne 10" (Franci, 1983, p. 22 ; notre traduction). M° Gilio commence ainsi : "Fais comme ceci : pose que le nombre soit une cosa, multiplie par 6, cela donne 6 cose...". Pourquoi ne pas raisonner directement sur le nombre cherché et dire : "Fais comme ceci : multiplie le nombre par 6, cela donne 6 nombres..." ?

Trouver deux nombres qui multipliés entre eux...	Donc la plus petite partie est une chose moins la racine de 13 1/2 moins un censo...	... ce qui fait 2 censi moins 13 1/2. Et ceci est égal à 8. Donc...
Langage descriptif	Langage de transition	Langage calculatoire ou langage algébrique

la première quantité soit une chose moins la racine d'une certaine quantité, l'autre soit une chose plus la racine d'une certaine quantité. Maintenant je multiplie la première quantité par elle-même et la deuxième quantité par elle même." (Problème 9, Arrighi, 1967). Le mot "quantité" va d'un langage à l'autre (ou, plutôt, il reste, comme élément clandestin, dans l'espace algébrique) ; tantôt il désigne le premier ou deuxième nombre (et alors il joue un rôle d'élément descriptif), tantôt il désigne le nombre 2¾ qu'il occulte (et alors il joue un rôle d'élément de l'espace algébrique). Il suffit de voir les textes de ses contemporains pour s'apercevoir que Mazzinghi est loin de se conformer à l'usage habituel abaquiste.

En faisant de la sorte, Mazzinghi provoque une fissure à l'enveloppe de l'espace bi-dimensionnel algébrique ; maintenant on peut aller plus loin. Mais, bien sûr, la fissure ne peut assurer en elle-même l'accomplissement de l'acte de création dans tous ses détails. L'acte de création ne vient que d'être entamé.

Quelle est la suite ?

Pour répondre à cette question, remarquons que Mazzinghi n'avait nul besoin de savoir résoudre le problème par une méthode géométrique pour résoudre le problème par l'algèbre. En effet, il aurait pu très bien avoir recours *directement* à la paramétrisation "premier nombre = cosa" et "deuxième nombre = $\frac{8}{\cos a}$", de sorte à voir vérifiée la condition du problème $a_1 . a_2 = 8$, et aboutir à l'équation bicarrée $64 + x^4 = 27x$, d'où, comme nous l'avons déjà mentionné au §3, il aurait tiré (par une procédure qu'il connaît très bien) que les nombres cherchés sont $a_1 = \sqrt{13\frac{1}{2} - \sqrt{118\frac{1}{4}}}$ et $a_2 = \frac{8}{\sqrt{13\frac{1}{2} - \sqrt{118\frac{1}{4}}}}$ (21).

Il aurait pu faire cela sans devoir introduire la deuxième inconnue.

Ainsi, les points clés dans le mouvement de création se trouvent :

(i) d'une part, dans la facilité qu'il éprouve à passer des démarches algébriques aux démarches non-algébriques dans la résolution de problèmes (ce qu'il fait à plusieurs reprises dans le *Trattato*) et,
(ii) d'autre part, dans le regard attentif qu'il jette sur les solutions $a_{1,2} = \sqrt{10\frac{3}{4}} \pm \sqrt{2\frac{3}{4}}$ et qu'il arrive à

(21) Une paramétrisation du type fractionnaire "8/cosa" n'est pas étrangère à Mazzinghi : il l'utilise, par exemple, dans le problème 11 du *Trattato*.

voir *autrement*, au-delà de leur représentation numérique, à travers les lentilles de nouvelles représentations sémiotiques.

Or, les points clés que nous venons de souligner constituent deux points importants de la rationalité culturelle du Trecento. Sans pouvoir les traiter à fond dans le cadre de cet article, mentionnons les point suivants :

6.1. Les frontières qui tombent et le monde qui s'ouvre...

Le Trecento est un siècle de ruptures à plusieurs égards. C'est pendant ce siècle que la pensée commence à se dégager des limites d'une rationalité dominée par la tradition classique et le système fermé socio-politique féodal pour s'ouvrir à la pensée des cités marchandes en expansion. C'est une pensée qui nous livre le gothique dans l'art et une contestation de l'Aristotélisme et du dogme en général. Cette ouverture se manifeste, dans le cas des mathématiques, par une sorte de négativité, une non-frontière entre les théories mathématiques. Ce n'est pas qu'on ne soit pas conscient des différences anciennes entre géométrie et arithmétique, par exemple : c'est que les frontières sont plutôt données par le *contenu* à traiter : problèmes d'arpentage, problèmes de calcul arithmétique, etc. Rien n'interdit le passage d'un domaine mathématique à un autre. Ce qui prime n'est pas l'organisation théorique de la discipline, comme c'était le cas des *Éléments* d'Euclide ou de l'*Introduction à l'Arithmétique* de Nichomaque, mais un savoir *pratique*. Maints traités de géométrie abaquiste sont précisément intitulés "géométrie pratique".

Le savoir *pratique* comme valeur intellectuelle, étranger à l'*épistémè* grecque, ne peut être compris qu'à condition de placer l'activité mathématique dans son propre contexte socioculturel et d'avoir présent à l'esprit que la recherche algébrique du Haut Moyen Âge a eu lieu dans l'environnement particulier des écoles d'abaque, c'est-à-dire des écoles de formation à des métiers *pratiques* et *commerciaux* dont les méthodes d'enseignement étaient précisément basées sur le savoir-faire (savoir *résoudre*, savoir *appliquer*). Le maestro d'abaco demeure porteur d'une culture essentiellement pratique qui ne s'ouvrira aux milieux intellectuels universitaires qu'à la fin du 15^{e} siècle (Luca Pacioli est sans doute un bon exemple à rappeler de cette période de transition). On comprend, dans ce contexte, comment le savoir pratique se voit offrir la possibilité de circuler assez librement dans les différents domaines mathématiques. Il se voit offrir un laissez-passer qui, dans les mains de Mazzinghi, débouche sur la création d'un nouvel objet.

6.2. La rupture avec les représentations byzantines

Or, si le contexte intellectuel que nous venons d'esquisser permet de mieux comprendre la facilité que Mazzinghi éprouve pour passer d'un domaine mathématique à un autre (ce qui aurait été difficile sinon impossible pour un Grec de la période classique), nous sommes encore loin de comprendre ce qui permet à Mazzinghi de voir l'expression $a_{1,2} = \sqrt{10\,3/4} \pm \sqrt{2\,3/4}$ *autrement*.

Pour cela, il faut rappeler qu'au Trecento on assiste à une rupture dans la tradition des représentations qui se manifeste avant tout par une distance entre l'objet et sa représentation. Rappelons à cet effet les paroles du Florentin Coluccio Salutati :

> "Nous n'apercevons pas [les images religieuses] comme étant des Saints ou des Dieux mais plutôt comme des images de Dieu et des Saints [...]. La peinture [est] quelque chose faite par la main de l'homme, non pas quelque chose de divin en soi mais une similitude de la providence divine, de la direction, de l'ordre – qui représente certainement non pas les caractères essentiels mais plutôt les méandres et les tournants des affaires mondaines [...]". (Cité par Baxandall, 1971, pp. 60-61 ; notre traduction).

En se libérant de la tradition byzantine des majestueuses représentations rigides, Giotto est capable de donner à la peinture ce qui avait été impossible avant lui : représenter l'expression humaine sous son angle intime, en mouvement. Dans son livre *De origine civitaties Florentiae et eiusdem famosis civibus*, écrit en 1831-2, Filippo Villani disait : "Les images qui sortent de son pinceau concordent si bien avec les linéaments de la nature qu'elles semblent vivre et respirer". (Cité par Baxandall, 1971, p. 70 ; notre traduction).

La peinture gothique ne cherche plus à symboliser l'expression des sentiments humains. Et elle trouve, à travers Giotto, les moyens d'en donner l'illusion. En se référant à la peinture de Giotto, Malraux (1951, p. 259) disait : "La peinture découvrait à son tour que figurer l'expression d'un sentiment est un puissant moyen de le suggérer".

C'est cette rupture au niveau des représentations, un accomplissement du Trecento, qui permet à Mazzinghi de voir l'expression $a_{1,2} = \sqrt{10\,3/4} \pm\sqrt{2\,3/4}$ *autrement*. Car, en fait, qu'est-ce que c'est d'autre cette paramétrisation $a_{1,2} = t \pm\sqrt{q}$ sinon une façon de *suggérer* l'expression des valeurs exactes $\sqrt{10\,3/4} \pm\sqrt{2\,3/4}$ de $a_{1,2}$?

Il ne s'agit pas, bien sûr, d'enlever à Maestro Antonio le mérite de l'invention. Il ne s'agit pas d'"expliquer la musique tonale par le régime de la propriété", disait Sartre (1964, p. 35) au sujet de la créativité et la négativité phénoménologique : "j'indique seulement", il continuait, "qu'il y a, pour chaque époque, des correspondances profondes entre les objets sur lesquels, en tous domaines, la négativité s'exerce et entre les limites qu'elle rencontre, en même temps, dans toutes les directions".

M° Antonio était certainement un homme particulièrement brillant. D'ailleurs, comme Franci (1988) nous le rappelle, M° Antonio, malgré son jeune âge, était considéré par ses contemporains comme le plus talentueux des mathématiciens de son époque. Et il suffit de regarder son *Trattato* et le comparer aux autres traités d'abaco du Moyen Âge pour se rendre compte de la grande versatilité qu'il déploie. La lecture du *Trattato* nous dévoile certainement une pensée exquise qui court avec une fluidité et agilité inusuelles le long des problèmes.

Ce que nous voulons mettre en évidence c'est que l'acte de création est encadré par des mouvements qui ne proviennent pas seulement d'un ego solitaire mais, aussi, par des mouvements de rationalité de la culture où la création a lieu.

Avec ce geste créatif que nous avons tenté de reconstruire, Mazzinghi a ouvert une fissure dans l'espace algébrique bidimensionnel et a fait émerger un nouvel objet. Il a donné aux mathématiques la plasticité que Giotto a donnée à l'art. C'est à ce titre qu'il pourrait être considéré un mathématicien gothique. Avec son geste créateur, c'est une petite aube qui se dessine. Lueur de petite aube, un instant suspendue, où va se poindre un monde... celui de l'algèbre aux multiples inconnues.

RÉFÉRENCES

ARRIGHI, G. (1967) (éd.) MAZZINGHI, A. *Trattato di Fioretti.* (nella trascelta a cura di M° Benedetto), Pisa : Domus Galileana.
— (1970) (éd.) *Piero Della Francesca : Trattato de Abaco*, Pisa : Domus Galileana.

BAXANDALL, M. (1971) *Giotto and the Orators*, Oxford : Clarendon Press.

BONCOMPAGNI, B. (1857) (ed.) *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secondo decimo-terzo*, I, Il Liber abaci di Leonardo Pisano. Roma : Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

CARDANO, G. (1545) *Ars Magna or The Rules of Algebra.* Traduit par T. Richard Witmer, Boston : The Massachusetts Institute of Technology. Reprint Dover, 1993.

CIFOLETTI, G. (1995) "La *question* de l'algèbre. Mathématiques et rhétorique des hommes de droit dans la France du 16e siècle", *Annales Histoire, sciences sociales*, 50e année, N° 6, pp. 1385-1416.

CROMBIE, A.C. (1995) "Commitments and Styles of European Scientific Thinking", *History of Sciences*, Vol. 33, pp. 225-238.

FLECK, L. (1935) *Genesis and Development of a Scientific Fact.* Traduit par T.J. Trenn et R.K. Merton, Chicago : The University of Chicago Press, 1979.

FRANCI, R. (éd.) (1983) *Questioni d'algebra*, Quaderni del centro studi della matematica medioevale, N° 6, Siena : Università di Siena.
— (1988) "Antonio de' Mazzinghi : An Algebraist of the 14th Century", *Historia Mathematica*, Vol. 15, pp. 240-249.

FRANCI, R. et RIGATELLI, L.T. (1988) "Fourteenth-century Italian algebra", dans : *Mathematics from Manuscript to Print, 1300-1600*, Cynthia Hay (ed.), Oxford : Clarendon Press, pp. 11-28.

HØYRUP, J. (1986). "Al-Kharizmi, Ibn Turk, and the Liber mensurationum : on the origins of Islamic Algebra", *Erdem* 2, pp. 445-484.
— (1990) "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought", *Altorientalische Forschungen*,17, 27-69, 262-354.
— (1993) *The Four Sides and the Area. Oblique light on the Prehistory of Algebra*, Denmark : Roskilde University Centre, Department of Languages and Culture, 3 Raekke : Preprints og reprints, 1993 nr. 1.

HUGHES, B. (1986) "Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi's *Al-Jabr* : A Critical Edition", *Mediaeval Studies*, N° 48, 211-263.

LIBRI, G. (1838-1841) *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* Paris : Jules Renouard, Vol. II.

MALRAUX, A. (1951) *Les voix du silence*, Paris : La galerie de la Pléiade.

PELETIER, J. (1553) *L'Algèbre*, Lyon : Jean de Tournes ; réimpression 1609.

PEYRARD, F. (1819) *Les œuvres d'Euclide*, Paris : C.-F. Patris. Réimpression : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1993.

PIERACCINI, L. (éd.) (1983) *Chasi Exenplari alla regola dell'algibra* de Mastro Biagio, Quaderni del centro studi della matematica medioevale, N° 5, Siena : Università di Siena.

RADFORD, L. (1992) "Diophante et l'algèbre pré-symbolique", *Bulletin AMQ (Association Mathématique du Québec)*, 31/32, (4/1), pp. 73-80. Reprint : *L'ouvert*, IREM de Strasbourg, N° 68, pp. 1-13.

— (1994) "Moving through Systems of Mathematical Knowledge : from algebra with a single unknown to algebra with two unknowns", *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, J. da Ponte and J. Matos (eds.), Portugal : University of Lisbon, Vol 4, pp. 73-80.

— (1995a) "Before the Other Unknowns Were Invented : Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra", *For the Learning of Mathematics*, 15 (3) 28-38.

— (1995b) *The Historical Origins of Algebraic Thinking*. Pre-prints, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne.

— (1996) "The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra : Historical Remarks from a Didactic Perspective", *in* : *Approaches to Algebra : perspectives for research and teaching*, N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (eds.), Dordrecht /Boston/ London : Kluwer, 39-53.

— (sous presse) "On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics", *For the Learning of Mathematics*.

SARTRE, J.-P. (1964) *Situations IV*, Paris : Éditions Gallimard.

SIMI, A. (éd.) (1994) *Trattato dell'alcibra amuchabile*, auteur anonyme, Quaderni del centro studi della matematica medioevale, N° 22, Siena : Università di Siena.

STIFEL, M. (1544) *Arithmetica Integra*, Norimbergae apud Johan. Petreium.

VERGNAUD, G. (1990) "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, N° 2-3, pp. 133-170.

WOEPCKE, F. (1853) *Extrait du Fakhrî*, Paris : Imprimérie Impériale. Reprinted by Georg Olms Verlag, Hildesheim/ Zurich/ New York, 1982.