

---

## ASPECTS DU RÔLE DE LA GÉOMÉTRIE DANS LA CONSTRUCTION DE L'ALGÈBRE

---

### *Regard historique sur la résolution des équations du second degré*

Odile KOUTEYNIKOFF

Groupe M:A.T.H. de l'IREM de Paris VII <sup>(1)</sup>

L'utilité de ce regard ne s'impose pas d'elle-même si on considère l'écart, somme toute minime, qui sépare les actuelles formules de résolution des équations du second degré, des algorithmes de résolution standardisés qu'on trouve déjà sur les tablettes mathématiques de la haute époque babylonienne (2000 à 1600 avant J.C.).

Par exemple : "J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30'. Tu croiseras 30' et 30' : 15'. Tu ajouteras 15' à 45' : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré". Tablette BM 13901, traduction Thureau-Dangin, *Textes Mathématiques Babyloniens*, Leyde, 1938.

---

(1) C'est après une relecture attentive de la brochure de l'IREM de Toulouse sur les équations du second degré que les membres du groupe M:A.T.H. s'étaient engagés dans un travail de recherche approfondi en algèbre, deux années durant (en 1994-1995 et 1995-1996). Cet article, dans sa

forme provisoirement achevée, relate et complète un travail en atelier proposé par M. Hallez et O. Kouteynikoff à la Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Epistémologie dans l'Éducation Mathématique, 24-30 Juillet 1996, Braga, Portugal.

ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

Soit, en écriture symbolique actuelle,

en numération sexagésimale :	en écriture fractionnaire :
$x^2 + x = 45'$	$x^2 + x = 3/4$
$x^2 + 1.x = 45'$	$x^2 + 1.x = 3/4$
30'	1/2
30'.30	1/2.1/2
15'	1/4
15' + 45'	1/4 + 3/4
1°	1
1	1
-30' + 1°	-1/2 + 1
30'	1/2

Les Babyloniens savaient déjà résoudre un problème "du second degré"... Nous possédons peu d'indications sur d'éventuelles justifications du procédé, à cette époque (2). Les justifications que, nous, enseignants, donnons classiquement à nos élèves, et qui sont de nature algébrique, sont apparues tardivement en Occident. C'est au seizième siècle que Rafael Bombelli (*Algebra*, Bologna, 1572) le premier semble-t-il, propose l'explication purement algébrique que nous connaissons, de l'algorithme de résolution numérique. Les démonstrations de validité que l'on trouve jusqu'à cette époque sont toutes géométriques : celles d'al-Khwarizmi sont simples et exemplaires de l'accompagnement d'une

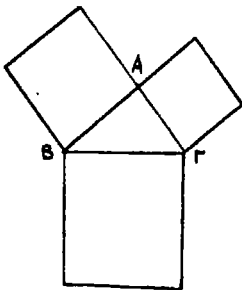
démarche algébrique par une démarche géométrique ; celles d'al-Khayyam sont plus savantes, pétries de géométrie euclidienne ; les trois auteurs du seizième siècle dont nous allons lire des extraits travaillent toujours avec les *Eléments* d'Euclide comme référence incontournable mais, en cette période d'émergence de l'algèbre symbolique, ils ont chacun des projets plus spécifiques sur lesquels nous nous attarderons. Nous tenterons de cerner, chez chacun des cinq mathématiciens choisis, la présence et le rôle de la géométrie euclidienne. En reconnaissant qu'ils usent de représentations géométriques pour justifier leurs calculs et leurs résultats, nous ouvrirons la large question du rôle de la géométrisation dans le développement historique des mathématiques. Plus modeste, mais plus urgente et non moins difficile, se pose à nous, enseignants, la question de l'apprentissage pour nos élèves. Géométriser, montrer pour démontrer, amener à comprendre une situation en la transformant en une autre mieux connue ou plus accessible, c'est proposer aux élèves un regard nouveau qui n'a rien de spontané ; pourtant est-ce sans doute un enjeu majeur de cette démarche que de

(2) J. Høyrup pense que c'est une "algèbre d'arpenteur", oubliée elle-même aujourd'hui (qui) a influencé trois grandes traditions mathématiques savantes : l'algèbre babylonienne, la géométrie "métrique" grecque et l'al-jabr arabe. Il développe cette thèse dans son article "Les quatre côtés et l'aire". Sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes", in *Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique*, Montpellier, 19-23 Juillet 1993, IREM de Montpellier, 1995.

construire du simple <sup>(3)</sup>. Puisque, comme chacun sait, le simple n'a rien d'évident, nous allons travailler ensemble et commencer par lire les pages des *Eléments* d'Euclide qui vont fonder notre réflexion.

I. Des treize livres qui constituent le gigantesque ouvrage axiomatico-déductif que sont les *Eléments* d'EUCLIDE, les six premiers sont consacrés à la géométrie plane.

Nous noterons, au livre I, la proposition 47 qui permet de construire un carré d'aire égale à celle de deux carrés donnés. C'est la proposition immortalisée sous l'appellation de théorème de Pythagore <sup>(4)</sup>: "Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit". Euclide procède, pour la démonstration de cette proposition, à des comparaisons d'aires de triangles et de rectangles.



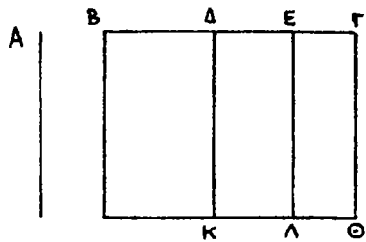
carré de BΓ = carré de BA + carré de AΓ.

(3) Ces deux pistes de réflexion nous sont suggérées par les travaux de R. Bkouche. A propos de *La géométrie comme langage et comme représentation*, on pourra lire tout particulièrement "Quelques Remarques à propos de l'Enseignement de la Géométrie", in *Reperes-IREM* n°26, Janvier 1997.

(4) Les extraits des *Eléments* d'Euclide sont présentés dans la traduction de F. Peyrard, Paris, 1819. Réédition introduite par J. Itard, Ed. Blanchard, Paris, 1993.

Au livre II, il énonce et démontre des relations d'égalité entre aires de rectangles et de carrés combinés. Les propositions 1 à 4 sont élémentaires. En voici les énoncés et les illustrations :

PROPOSITION 1 : "Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre."

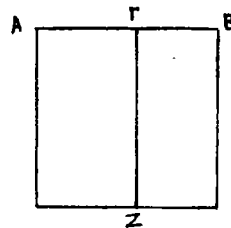


donnés : A, BΓ

Δ, E quelconques

Rect. BΘ = Rect. BK + Rect. ΔΛ + Rect. EΘ.

PROPOSITION 2 : "Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au carré de la droite entière."



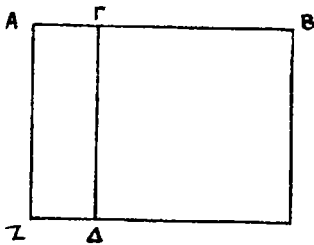
donné : AB

Γ quelconque

Rect. BZ + Rect. AZ = carré de AB.

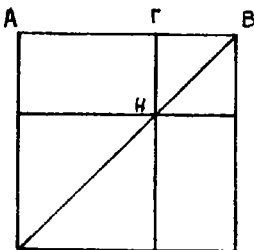
ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

PROPOSITION 3 : "Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les segments et au carré du segment premièrement dit."



donné : AB  
Γ quelconque  
Rect. BZ = Rect. AΔ + carré de BΓ.

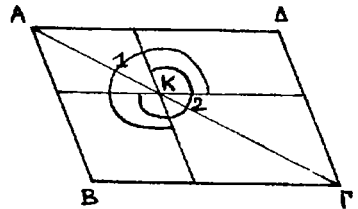
PROPOSITION 4 : "Si la droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments."



donné : AB  
Γ quelconque  
carré de AB = carré de AΓ + carré de ΓB + 2  
Rect. AH.

Les propositions 5 et 6 sont plus sophistiquées et méritent qu'on les photographie bien. Leur étude nécessite la connaissance du gnomon, qui fait l'objet de la définition

2 du Livre II : "Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon."

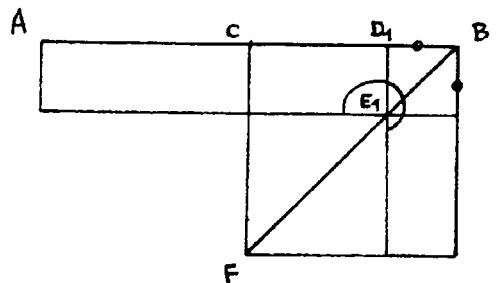


gnomon  $G_1$  = parallélogramme AK  
+ complément KΔ + complément KB,

ou

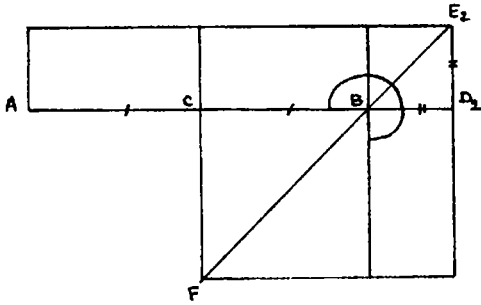
gnomon  $G_2$  = parallélogramme KΓ  
+ complément KΔ + complément KB.

PROPOSITION 5 : "Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite placée entre les sections, est égal au carré de la moitié de la droite entière."



C milieu de [AB]  
D1 quelconque  
Rect. AE1 = gnomon E1 donc  
carré FE1 + Rect. AE1 = carré FB (II,5)

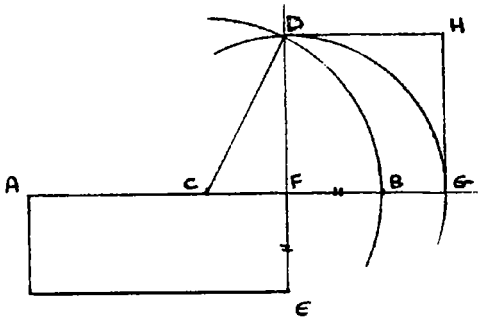
PROPOSITION 6 : "Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le carré de la moitié de la droite entière, est égal au carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite."



C milieu de [AB]  
D2 quelconque  
Rect. AE2 = gnomon B donc  
carré FB + Rect. AE2 = carré FE2 (II,6)

Les propositions 11 et 14 sont les seules propositions du livre II, qui formulent et résolvent des problèmes de construction.

PROPOSITION 14 : "Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée."

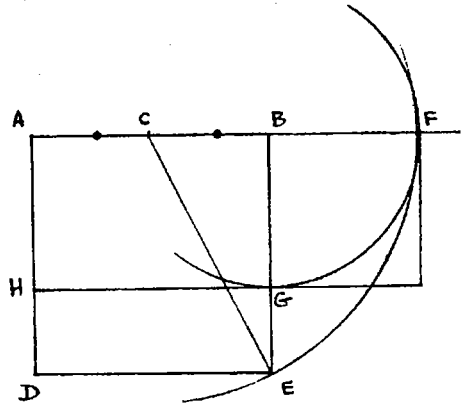


donné : le rectangle AE. Construire G sur la droite AF pour que le rectangle AE soit égal au carré de FG. La construction est celle-ci : soit B sur la droite AF tel que FE = FB, C le milieu du segment AB, D sur la demi-droite EF tel que CD = CB, et G sur la droite AF tel que FG = FD. En voici la justification en langage moderne :

$$\begin{aligned}
 \text{(II,5)} : \quad & \text{FA.FB} + \text{CF}^2 = \text{CB}^2 \\
 & = \text{CD}^2 \\
 \text{(I,47)} : \quad & = \text{CF}^2 + \text{FD}^2 \\
 & \text{FA.FB} = \text{FD}^2 \\
 & \text{Rect. AE} = \text{Carré FH} \\
 & \text{FA.FB} = \text{FG}^2
 \end{aligned}$$

FB, FG, FA sont proportionnelles. On connaît les extrêmes ; on cherche la moyenne. C'est la quadrature d'un rectangle et, potentiellement, celle d'une figure rectiligne quelconque.

PROPOSITION 11 : "Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant."



donné : le segment BE donc le carré BEDA construit sur BE. Construire G sur le segment BE pour que le rectangle GD soit égal au carré de GB. La construction est

ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

celle-ci : soit C le milieu du segment AB, F sur la demi-droite CB tel que CF = CE et G sur le segment BE tel que BG = BF. En voici la justification en langage moderne :

$$\begin{aligned} \text{(II,6)} : \text{FA.FB} + \text{CB}^2 &= \text{CF}^2 \\ &= \text{CE}^2 \\ \text{(I,47)} : &= \text{CB}^2 + \text{BE}^2 \\ \text{FA.FB} &= \text{BE}^2 \\ \text{Rect. FH} &= \text{Carré BD} \\ \text{Carré FG} &= \text{Rect. GD} \\ \text{GB}^2 &= \text{EG.EB} \end{aligned}$$

EG, GB, EB sont proportionnelles. On connaît l'extrême majeure EB ; on cherche la moyenne GB et l'extrême mineure EG, de somme la majeure. C'est la construction de la divine proportion.

Retenons que l'une et l'autre propositions réalisent, sous des contraintes différentes, l'égalité en aire d'un rectangle et d'un carré. Ce sont donc deux problèmes, qui sont pour nous des problèmes du second degré, que Euclide formule et traite de manière complètement géométrique. Zeuthen et Tannery, au XIX<sup>e</sup> siècle, seront très sensibles à la pertinence du livre II dans le domaine de l'algèbre. Ce sont eux qui l'intituleront le livre de "l'algèbre géométrique".

**II.** Le plus ancien traité complet d'algèbre qui nous soit parvenu est celui de Muhammad ibn Musa **AL-KHWARIZIMI** (780-850, Bagdad) : *l'abrégé du calcul* [par les procédés] *du Jabr et de la Muqabala*, rédigé avant 833. Sans avoir recours à aucun symbolisme, al-Khwarizmi fait émerger l'algèbre comme Science de l'Inconnue. Il en définit les objets, qui sont de trois sortes : les *nombre*s (entiers et rationnels positifs), *l'inconnue* (la Jidhr ou la racine) et son *carré* (le Mal ou le trésor ou le bien), et il formule les équations de façon rhétorique. Ainsi, "*Quant aux mal et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme*

*lorsque tu dis : un mal et dix de ses racines égalent trente-neuf dirham.*", est l'expression de l'équation qu'aujourd'hui nous écrivons :  $x^2 + 10x = 39$ . Sous la contrainte de ne laisser subsister dans les équations que des coefficients positifs, al-Khwarizmi distingue parmi les équations de degré inférieur ou égal à deux, qui sont les seules auxquelles il s'intéresse, six équations canoniques ; ce sont, dans l'ordre, et en écriture symbolique actuelle, les trois équations incomplètes : I)  $ax^2 = bx$  II)  $ax^2 = c$  III)  $bx = c$ , et les trois équations quadratiques à trois termes : IV)  $ax^2 + bx = c$  V)  $ax^2 + c = bx$  VI)  $bx + c = ax^2$ , où a, b, c sont des entiers, des rationnels et parfois même des irrationnels quadratiques, tous strictement positifs. Pour traiter un problème, al-Khwarizmi l'algébrise puis le ramène par Jabr et Muqabala à l'une des équations canoniques précédentes. Le Jabr est la "restauration" de l'équation dans le but de n'avoir que des monômes "ajoutés". C'est la technique qui permet de passer, par exemple, et en écriture symbolique actuelle, de l'égalité  $x^2 + 3 = 5 - 10x$  à  $x^2 + 3 + 10x = 5$ . La Muqabala est la "comparaison" des termes de même espèce se trouvant dans chacun des deux membres, qui permet de "simplifier". C'est par Muqabala que l'on passe, en écriture symbolique actuelle, de  $x^2 + 3 + 10x = 5$  à  $x^2 + 10x = 2$ .

Les trois équations quadratiques à trois termes sont étudiées sur des exemples numériques, respectivement : IV)  $x^2 + 10x = 39$  V)  $x^2 + 21 = 10x$  VI)  $3x + 4 = x^2$ , qui seront souvent repris, et deviendront eux-mêmes canoniques (5). Pour chaque équation, al-

(5) Ces indications concernant l'algèbre de al-Khwarizmi sont développées par A. Djebbar dans *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe (IX<sup>e</sup>-XV<sup>e</sup> s.)*, Actes de l'Université d'Été de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Toulouse, 1986.

Khwarizmi fournit un algorithme de résolution numérique standardisé pour la recherche des racines positives. Nous allons examiner ces algorithmes qui ne diffèrent pas essentiellement de ceux des tablettes babyloniennes.

Voici ce qu'écrivit al-Khwarizmi à propos de l'équation IV<sup>(6)</sup> : "Quel sera le trésor qui, quand on l'augmente de dix de ses propres racines, se monte à trente-neuf ? La

solution est celle-ci : tu divises en deux les racines, ce qui dans la question présente donne cinq. Tu multiplies ceci par lui-même ; ce sera vingt-cinq. Ajoute ceci à trente-neuf ; la somme est soixante-quatre. Prends-en maintenant la racine, qui est huit, et enlèves-en la moitié des racines, qui est cinq, reste trois. C'est la racine du trésor que tu cherchais ; le trésor lui-même est neuf."

Soit l'algorithme : Pour les équations V et VI, les algorithmes décrits sont les suivants :

$x^2 + 10x = 39$ $\begin{array}{r} 5 \\ 25 \\ 25 + 39 \\ 64 \\ 8 \\ -5 + 8 \\ 9 \quad 3 \end{array}$	$x^2 + 21 = 10x$ $\begin{array}{r} 5 \\ 25 \\ -21 + 25 \\ 4 \\ 2 \\ -2 + 5 \\ 9 \quad 3 \\ 2 + 5 \\ 49 \quad 7 \end{array}$	$3x + 4 = x^2$ $\begin{array}{r} 3/2 \\ 9/4 \\ 9/4 + 4 \\ 25/4 \\ 5/2 \\ 3/2 + 5/2 \\ 4 \quad 16 \end{array}$
--	---	---

Notons que al-Khwarizmi fait la discussion complète des équations du type V<sup>(7)</sup> : "Ce cas se résout à la fois par l'accroissement et par la diminution et, cela n'est pas ainsi pour les autres cas parmi les trois pour lesquels on a besoin de prendre la moitié des racines. Sache aussi que, dans ce cas, si, ayant pris la moitié des racines et les ayant multipliées par elles-mêmes, le résultat est inférieur aux dirham qui sont avec le carré, le problème est alors impossible. S'il est égal aux dirham eux-mêmes,

la racine du carré est alors égale, exactement, à la moitié des racines, sans accroissement ni diminution."

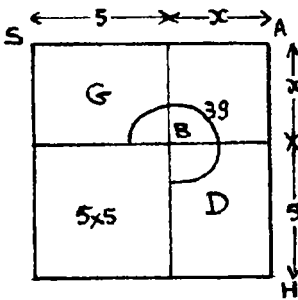
Al-Khwarizmi a ensuite le souci d'expliquer la validité de la procédure numérique par une justification géométrique qu'il conduit, pour chacun des trois types d'équation, sur une figure spécifique construite pas à pas, conformément aux étapes de la démarche calculatoire. Il procède par comparaison d'aires, et certaines de ses figures évoquent celles associées à des propositions du livre II des *Eléments* d'Euclide. A propos de l'équation IV : "...Il y a une autre figure qui conduit à la même chose. C'est la surface AB, qui représente le trésor. Nous voulons donc lui ajouter ses dix racines. Pour ce faire, nous

(6) La traduction des extraits relatifs à l'équation IV est celle de J. Høyrup dans : "Algèbre d'al-jabr" et "algèbre d'arpentage" au 9<sup>e</sup> siècle islamique et la question de l'influence babylonienne, 1992.

(7) La traduction de l'extrait relatif à l'équation V est inédite et due à A. Djebbar.

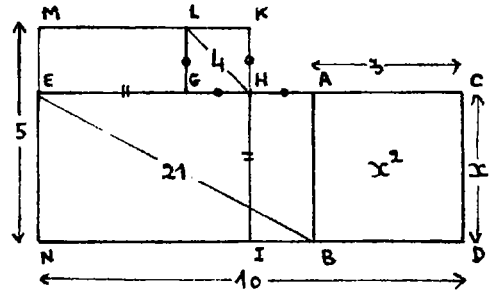
ASPECTS DU RÔLE  
DE LA GEOMETRIE

divisons les dix en deux, ce qui devient cinq, et nous construisons deux surfaces sur deux côtés d'AB, à savoir les surfaces G et D, dont les longueurs égalent cinq, ce qui est la moitié des dix racines, tandis que la largeur de chacun d'eux égale le côté du carré AB. Alors cinq sur cinq nous manque opposé au coin de AB : ce cinq étant cette moitié des dix racines que nous avons ajoutées à deux des côtés de la première surface. Nous savons donc que la première surface, qui est le trésor, et les deux surfaces sur ses côtés, qui sont les dix racines, font ensemble trente-neuf. Pour compléter la grande surface en carré, seul cinq sur cinq fait défaut, ou vingt-cinq. Nous ajoutons ceci à trente-neuf, pour compléter la grande surface SH. La somme est soixante-quatre. Nous extrayons sa racine, huit, qui est un des côtés de la grande surface. En lui enlevant la même quantité que nous lui avons ajoutée antérieurement, à savoir cinq, nous obtenons trois comme reste. Ceci est le côté de la surface AB, qui représente le trésor ; c'est la racine de ce trésor et le trésor lui-même est neuf. Ceci est la figure" (figure du texte complétée de quelques annotations) :



Pour l'équation V, nous ne donnons pas ici le texte complet d'al-Khwarizmi, mais seulement des figures et un commentaire en écriture semi-symbolique qui suit les étapes du texte de l'auteur.

$$x^2 + 21 = 10x$$



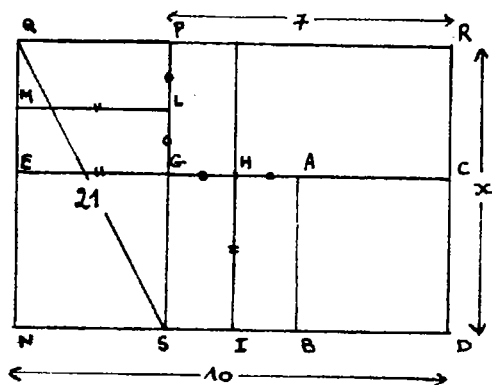
- longueur CD = x et surface AD =  $x^2$
- longueur EC = 10 et
- surface ED =  $10 \cdot x = x^2 + 21$
- surface EB = 21
- HE = HC = 5
- HA = HK = HG = HC - AC =  $5 - x$
- IK = NM = IH + HK =  $x + (5 - x) = 5$
- surface MI = 25
- EG = EH - GH =  $5 - (5 - x) = x = HI$
- GL = HA
- surface MG = surface AI
- 21 = surface EI + surface AI
- 21 = surface EI + surface MG
- 25 = surface EI + surface MG + surface GK
- surface GK = 4
- longueur HG = longueur HA = 2

Al-Khwarizmi termine ainsi la mise en évidence des deux racines : "...est égal au segment HA qui est égal à deux. Si tu le retranches du segment HC qui est la moitié des racines, il reste le segment AC qui est égal à trois et c'est la racine du premier carré. Si tu l'ajoutes au segment CH qui est égal à la moitié des racines, cela vaudra sept et c'est le segment GC. Ce sera la racine d'un carré plus grand que le premier carré et qui, si tu lui ajoutes 21, est égal à dix de ses racines."

Al-Khwarizmi s'arrête sur cette remarque sans juger utile de compléter la figure



pour faire apparaître le carré plus grand dont il parle. La justification géométrique peut être achevée ainsi :



$$CG = CH + HG = 5 + 2$$

$$CG = 7 = DS = SP = DR$$

$$\text{surface } SR = 7 \times 7$$

$$21 = \text{surface } EB$$

$$21 = \text{surface } EI + \text{surface } MG$$

$$21 = \text{surface } ES + \text{surface } MG + \text{surface } QL$$

$$21 = \text{surface } QS$$

$$\text{surface } SR + \text{surface } QS = 7 \times 7 + 21$$

$$\text{surface } QD = 7 \times 7 + 21$$

$$10 \times 7 = 7 \times 7 + 21$$

7 est bien solution de l'équation

$$10x = x^2 + 21.$$

La pertinence et l'adéquation aux algorithmes numériques des démonstrations géométriques sont intéressantes. Il est difficile de savoir si al-Khwarizmi connaît les *Eléments* d'Euclide, dont la traduction en langue arabe et la diffusion sont contemporaines de ses travaux. La démarche d'al-Khwarizmi, tout à fait pédagogique, reste plus directe que celle d'Euclide ; il ne recourt pas à des énoncés généraux du type des propositions. Quoi qu'il en soit, son raisonnement propre est

considérable à son époque et auprès des générations qui lui succèdent.

III. A partir du IX<sup>e</sup> siècle et pendant tout le Moyen-Age arabe, les mathématiques se développent sous la double autorité de Euclide comme maître à penser, et de al-Khwarizmi, comme fondateur de l'algèbre. C'est dans ce contexte que le grand savant Omar AL-KHAYYAM (1048-1139, Iran actuel), poète, philosophe, médecin, astronome, mathématicien, produit de nombreux ouvrages, parmi lesquels *Commentaire des difficultés se trouvant dans les introductions du livre d'Euclide* (1077) et *Traité sur le Jabr et la Muqabala* (1074) ; toutes les citations d'al-Khayyam qui suivent sont extraites de ce traité. "Une des notions mathématiques dont on a besoin dans la partie du savoir connue sous le nom de mathématiques, est l'art de l'algèbre et de l'al-muqabala, destiné à déterminer les inconnues numériques et géométriques..." Un peu plus loin : "l'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est un art scientifique dont l'objet est le nombre absolu et les grandeurs mesurables, en tant qu'inconnus mais rapportés à une chose connue par laquelle on peut les déterminer ; ..." Ainsi, Al-Khayyam réaffirme que l'algèbre est la Science de l'Inconnue.

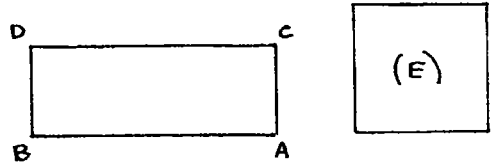
Il étend aux équations de degré inférieur ou égal à trois la classification entamée par al-Khwarizmi. En recensant pour les équations binômes, trinômes et quadrinômes, les positions relatives possibles des différents monômes à coefficients tous positifs, il met en évidence vingt-cinq équations canoniques. Ce qui est important, c'est que, parmi ces vingt-cinq équations, il distingue celles dont l'existence des solutions (positives) ne repose

ASPECTS DU RÔLE  
DE LA GÉOMÉTRIE

que sur des propositions des *Eléments* d'Euclide (c'est-à-dire celles dont les solutions sont constructibles) et celles dont les solutions (positives), lorsqu'elles existent, s'obtiennent par intersection de deux coniques (en fait, paraboles, hyperboles ou cercles) (8). Pour chacune des vingt-cinq équations, al-Khayyam examine séparément les possibilités de résolution numérique et géométrique.

Parmi les problèmes du second degré, le plus élémentaire, "un nombre est égal à un carré", est particulièrement instructif et essentiel pour la suite du travail : "Deuxième espèce [des binômes] : un nombre est égal à un carré. Le carré numérique sera donc connu, étant égal au nombre connu ; et il n'existe aucune voie pour connaître sa racine numériquement, sinon par induction : en effet celui qui sait que la racine de vingt-cinq est cinq, le sait par induction, et non par une loi de l'art... Les Indiens possèdent des méthodes pour déterminer les côtés des carrés et des cubes, reposant sur une induction [fondée] sur peu [de nombres] ; c'est-à-dire la connaissance des carrés de neuf chiffres, à savoir le carré de un, de deux, de trois [...], ainsi que des produits de l'un par l'autre, à savoir, le produit de deux par trois, et de même pour les cas similaires. Nous avons composé un ouvrage pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes... Ces démonstrations sont des démonstrations numériques, fondées sur les livres Arithmétiques de l'ouvrage des *Eléments*." Pour résoudre le problème géométriquement, al-Khayyam introduit un segment unité, construit un rectangle d'aire le nombre donné, et construit un

carré de même aire que le rectangle. Le côté du carré est la grandeur géométrique cherchée. Le texte est explicite : "La démonstration géométrique de la deuxième espèce est la suivante : Posons donnée la droite AB égale au nombre donné, et AC l'unité, telle qu'elle soit perpendiculaire à AB. Complétons le rectangle AD. On sait que l'aire de la surface AD est alors le nombre donné. Construisons une surface carrée égale au rectangle AD ; soit le carré E, comme l'a montré Euclide dans la proposition 14 du deuxième livre de son ouvrage. Le carré E est donc égal au nombre donné, et il est connu ; son côté est donc également connu. Médite sur la démonstration proposée par Euclide. C'est ce qu'on voulait obtenir."



Al-Khayyam lui-même insiste sur l'importance, et peut-être l'originalité, du procédé : "Et toutes les fois que dans ce traité nous dirons : un nombre est égal à une surface, nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné, et tel que chacune des parties de sa mesure soit égale au deuxième côté, je veux dire celui que nous avons supposé un."

Quant aux trois problèmes du second degré à trois termes, al-Khayyam les résout numériquement à la manière d'al-Khwarizmi. "Puisque nous venons d'achever les équations binômes, traitons

(8) D'après A. Djebbar, Toulouse, 1986.

*maintenant des trois premières des douze espèces trinômes. Première espèce : un carré plus dix de ses racines sont égaux à trente-neuf en nombre. Multiplie la moitié du nombre des racines par lui-même ; ajoute le produit au nombre, et soustrais de la racine de la somme la moitié du nombre des racines. Le reste est la racine du carré. En ce qui concerne la démonstration numérique, nous avons besoin de deux conditions ; la première : que le nombre des racines soit un nombre pair pour qu'il ait une moitié ; la deuxième : que la somme du carré de la moitié du nombre des racines et du nombre, soit un nombre carré ; sinon, le problème est impossible, numériquement."* Remarquons que al-Khayyam introduit ici des conditions tout à fait restrictives qui assurent que, à chaque étape, le calcul se fait en nombres entiers. Pour la deuxième espèce, *"un carré plus un nombre sont égaux à des racines"*, al-Khayyam commence par discuter l'équation : elle est impossible si le nombre est plus grand que le carré de la moitié du nombre des racines ; s'il lui est égal, la moitié du nombre des racines est la racine du carré ; si le nombre est plus petit que le carré de la moitié du nombre des racines, l'équation admet deux racines (positives) dont al-Khayyam donne l'algorithme de calcul. Après l'étude géométrique qui suit, al-Khayyam reprend et conclut : *"Il apparaît donc que cette espèce comporte différents cas, dont certains sont impossibles ; et tu peux connaître les conditions de sa validité lorsqu'il s'agit des nombres, selon ce qu'on a montré pour la première espèce."* Al-Khayyam distingue donc ici nettement le problème de l'existence des racines, numériques ou géométriques, de celui du calcul des racines numériques dans l'ensemble des nombres entiers.

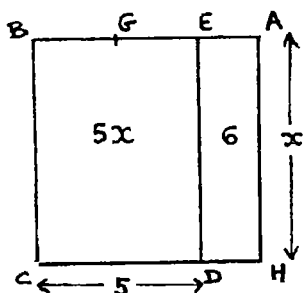
Après avoir étudié la troisième espèce, *"un nombre plus des racines sont égaux à un carré"*, Al-Khayyam récapitule à propos de l'existence des racines pour l'ensemble des trois espèces : *"On a montré que, dans la troisième espèce, rien n'est impossible, et non plus dans la première ; tandis que la seconde comporte des cas impossibles, et se présente sous diverses occurrences ; rien de tel pour les deux autres."*

Dans le registre géométrique, al-Khayyam développe plusieurs démarches de portées différentes.

Pour valider un algorithme numérique, (*"la démonstration numérique se conçoit lorsqu'on conçoit la démonstration géométrique"*), il reconnaît sur la configuration géométrique associée au problème, les conditions d'application de l'une des propositions II,5 ou II,6 des *Eléments*. Ainsi pour la troisième espèce, *"un nombre plus des racines sont égaux à un carré"*, après avoir détaillé l'algorithme : *"On ajoute le carré de la moitié du nombre des racines au nombre ; on prend la racine de la somme, qu'on ajoute à la moitié du nombre des racines. Ce qui résulte est la racine du carré"*, al-Khayyam entame une démonstration soutenue par un exemple numérique : *"Démonstration : le carré ABCH est égal à cinq de ses racines plus six en nombre. Séparons-en le nombre qui est le rectangle AD ; il reste le rectangle EC, égal au nombre des racines, lequel est cinq. La droite EB est donc cinq ; divisons-la en deux parties égales au point G. La droite EB est donc divisée en deux parties égales au point G ; ajoutons-lui EA sur son prolongement : on a donc la surface BA par AE, qui est la surface AD connue, plus le carré de EG, connu, égaux au carré de GA ; le carré de GA est donc connu, et GA*

ASPECTS DU RÔLE  
DE LA GÉOMÉTRIE

est connue. Mais GB est connue ; AB est donc connue."



Soit en écriture symbolique actuelle :

$$6 + 5x = x^2$$

d'après la proposition II,6 :

$$\text{rect. AD} + \text{GE}^2 = \text{GA}^2$$

$$\text{rect. AD} + \text{GE}^2 = \text{GA}^2$$

connu    connu    CONNU

$$\text{GA}$$

$$\text{GB} + \text{GA}$$

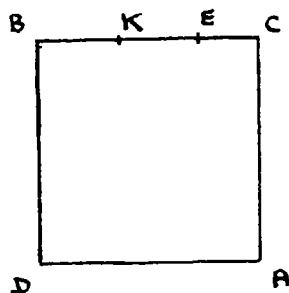
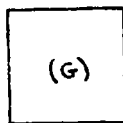
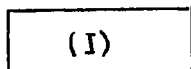
$$\text{BA}$$

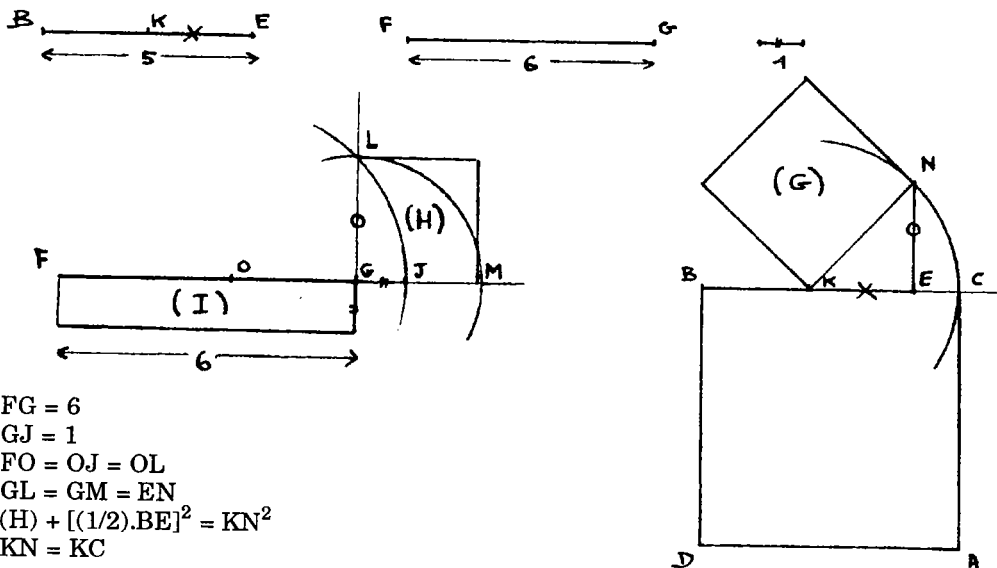
Il établit que puisque le nombre et le nombre des racines sont connus, le côté du carré l'est aussi. Autrement dit, il démontre la possibilité de résoudre le problème en même temps qu'il valide la technique qui permet de le faire.

Al-Khayyam s'intéresse aussi à la

construction de la grandeur géométrique cherchée. Pour la première espèce et la deuxième espèce, il se ramène à un problème d'application d'aire, c'est-à-dire à l'application d'une aire donnée sur un segment donné avec défaut ou excès du carré inconnu ; le problème est résolu par Euclide au livre VI, proposition 27 à 29. Il est d'une technicité supérieure à celle que nous pouvons proposer couramment à nos élèves de second cycle. En revanche, dans l'étude de la troisième espèce, pour construire le carré cherché, al-Khayyam utilise les moyens élémentaires que sont les propositions I,47 et II,14. Il s'exprime ainsi : "Mais si on suppose EB, égale au nombre des racines, et si on cherche un carré et son côté de telle sorte que ce carré soit égal au nombre de ses côtés plus le nombre donné, le carré ACBD est alors ce qu'on recherche. Soit le nombre donné le rectangle I, et H le carré qui lui est égal ; construisons un carré égal au carré H plus le carré de EK, [droite] qui est la moitié du nombre des côtés. Que [cette somme] soit le carré G. Faisons KC égale au côté de G, et complétons le carré ACBD. Le carré ACBD est donc ce qu'on recherche..." (cf. figure ci-dessous)

Nous détaillons ci-dessous les constructions effectivement proposées par al-Khayyam (cf. figure page suivante).





Ainsi al-Khayyam calcule la solution numérique, analyse géométriquement la démarche algorithmique et construit la solution géométrique. Le fait de donner le même statut à l'une et l'autre inconnues constitue une étape importante vers la Géométrie Analytique telle que la feront surgir, cinq siècles plus tard, les travaux de Viète (*L'Art Analytique*, Tours, 1591-1593) puis ceux de Descartes, (*La Géométrie*, Paris, 1637).

IV. Quand en Europe au XVe siècle, apparaissent les traductions en latin des *Eléments* d'Euclide, la tradition mathématique grecque, qui s'étaient développée grâce aux mathématiciens arabes, se trouve renforcée. Au moment où l'algèbre commence à évoluer du fait du passage progressif de l'expression rhétorique à l'expression symbolique, au moment où les nombres négatifs font leur apparition, la référence obligée à Euclide prend des

formes différentes selon les auteurs (9). Nous vous proposons quelques textes de la Renaissance.

Dans son *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur* (Paris, 1577), (Le grand art, ou la partie cachée des nombres, qu'on appelle couramment Algèbre et Almucabala), Guillaume GOSSELIN travaille toujours sur des nombres positifs et classe donc les équations quadratiques à trois termes, en trois espèces, à la manière des Arabes. (Par exemple, et en écriture symbolique actuelle :  $40 = x^2 + 6x$ ,  $x^2 = 4x + 12$ ,  $6x = x^2 + 8$ ). Il a adopté une notation

(9) La question des répercussions du symbolisme sur la pratique et la pensée des mathématiciens est soigneusement étudiée par E. Barbin, en particulier dans "Saisir l'Irrationnel, Dire, Montrer, Faire toucher, Tenir", in *Bulletin APMEP* n°400, Septembre 1995.

ASPECTS DU RÔLE  
DE LA GÉOMÉTRIE

symbolique à connotation géométrique : Q comme Quadratus pour le carré de l'inconnue, L comme Latus pour l'inconnue, côté du carré ; il utilise les signes P et M pour "plus" et "moins" respectivement, mais écrit "égal" en toutes lettres (aequalia, equalia, equale...). Pour chaque type d'équation, il mène deux procédures distinctes.

La première, algorithmique classique ; il énonce l'algorithme de façon générale. Ainsi pour la troisième règle, il écrit (10) : "*Canon tertius. Secunde equationis Canon tertius is demum est, cum latera equalia sunt 1 Q & numero, tum vero sumemus Quadratum semissis numeri laterum, de quo deducemus numerum valoris expertem, residui latus Quadratum inquerimus, quod vel addemus ad semissem numeri laterum, vel si lubet deducemus, habebitur unius lateris*

*valor.*" Il l'applique alors à la résolution d'une équation particulière : "*ut sint 6 L equalia 1 Q P 8, deducemus 8 ex 9 Quadrato 3 semissis 6 numeri laterum, restabit 1, cujus residui Quadratum latus est 1, addemus 1 ad 3 semissem 6 numeri laterum, existent 4, vel deducemus 1 ex ipso 3, restabit 2, dicemus itaque vel 4 vel 2 esse unius lateris valorem.*" La ou les solutions obtenues font l'objet d'une vérification : "*ac quidem 4, quia sex latera sunt 24, 1Q est numerus 16, qui numerus 16 cum 8 constituit idem 24, quod vero etiam latus sit 2, 1 Quadratum est 4, quo ad 8 addito, summa est 12, ac tantum conficiunt sex latera, nempe 12.*" Gosselin s'attarde sur le cas particulier où l'équation admet une seule racine : "*... ut sint 6 L aequalia 1 Q P 9, dico 3 esse valorem unius lateris...*". Voici les algorithmes traduits en écriture symbolique actuelle :

<p>6 L eq 1 Q P 8 :</p> $6x = x^2 + 8$ $3$ $9$ $9 - 8$ $1$ $3 + 1$ $4$ $3 - 1$ $2$ $6 \times 4 = 4^2 + 8$ $6 \times 2 = 2^2 + 8$	<p>6 L eq 1 Q P 9 :</p> $6x = x^2 + 9$ $3$ $9$ $9 - 9$ $0$ $3 + 0$ $3 - 0$ $3$
--	--

(10) Le texte de Gosselin nous semble à la fois difficile à traduire et relativement simple à suivre, pour qui connaît le propos et souhaiterait le reconnaître. Plutôt que d'en donner une traduction trop approchée, nous faisons le choix de livrer bruts quelques extraits exemplaires de l'écriture pratiquée par Gosselin, encore rhétorique et déjà symbolique. Nous en explicitons les contenus en langage mathématique actuel.

La seconde procédure est annoncée comme une démonstration arithmétique. Elle concerne une nouvelle équation particulière. L'inconnue L est remplacée par sa valeur inconnue A, le carré Q est remplacé par sa valeur, A fois A. Cette précaution nous indique que, dans l'esprit de l'auteur, les symboles ne sont pas opérationnels.

Cela n'empêche pas Gosselin d'élaborer une démonstration de type algébrique. Il calcule. Par des transformations éventuellement sophistiquées, il atteint la solution, soit en arrivant à l'égalité de deux carrés, soit en se ramenant à un problème qu'il a déjà traité. Nous donnons ici l'exemple de la démonstration arithmétique relative à la deuxième règle : "Demonstratio nostra secundi canonis arithmetica : Sint 6 L P 16 equalia 1 Q..."

Nous reproduisons fidèlement les étapes du texte. Soit à résoudre l'équation  $6x + 16 = x^2$ . Evidemment  $x > 6$  ; en effet, si  $x = 6$ ,  $36 + 16 = 36$  est impossible. Donc  $x = 6 + A$ . L'équation devient

$$6 \times (6 + A) + 16 = (6 + A)^2 = (6 + A) \times (6 + A).$$

D'après la proposition II,1 des *Eléments* d'Euclide,

$$(6 + A) \times (6 + A) = 6 \times (6 + A) + A \times (6 + A)$$

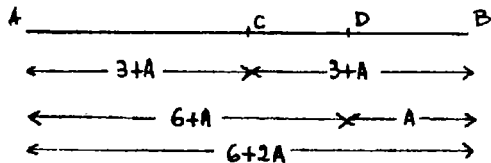
donc

$$6 \times (6 + A) + 16 = 6 \times (6 + A) + A \times (6 + A)$$

$$\text{soit } 16 = A \times (6 + A).$$

Au lieu d'appliquer la première règle, Gosselin poursuit : or  $6 + 2A = (6 + A) + A$  et  $(1/2) \cdot (6 + 2A) = 3 + A$ . Nous reconnaissons ici une situation relevant de l'application de la proposition II,5, soit :

$$A \times (6 + A) + [(6 + A) - (3 + A)]^2 = [(1/2) \cdot (6 + 2A)]^2$$



$$\begin{array}{rcl} & [6 - (1/2 \cdot 6) + A - A]^2 & \\ & 3^2 & \\ 16 & + & 9 & = & (3 + A)^2 \\ & & 5 & = & 3 + A \\ & & 2 & = & A \end{array}$$

Le côté cherché  $6 + A$  vaut  $6 + 2$ , soit 8.  
On a bien  $6 \times 8 + 16 = 64 = 8 \times 8$ .

Ainsi, c'est en utilisant des propriétés géométriques du livre II des *Eléments* d'Euclide, que Gosselin, au XVI<sup>e</sup> siècle, justifie ses démarches calculatoires, c'est-à-dire fonde sa démonstration algébrique.

En bon pédagogue, après avoir détaillé la démarche algorithmique et la démonstration dite arithmétique, propres à chaque règle, Gosselin termine l'étude en proposant un exemple d'utilisation pour la résolution d'un problème ; après l'examen détaillé de la première règle, nous trouvons : "Usus hujus canonis. Problema. Vestigemus duos numeros, ut..." Soit en langage actuel :

On cherche deux nombres tels que :  $x^2 + y^2 - x - y = 48$  et  $xy + x + y = 31$ . En posant  $x + y = X$ , le système devient :  $48 + X = x^2 + y^2$  (1) et  $31 - X = xy$  (2). En multipliant la seconde équation par deux, on obtient  $62 - 2X = 2xy$  (3). Grâce à la proposition II,4 des *Eléments* d'Euclide, [ $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ ], en ajoutant les égalités (1) et (3), il vient :  $48 + X + 62 - 2X = X^2$  soit  $110 - 1 \cdot X = X^2$  ou  $110 = 1 \cdot X + X^2$ . On reconnaît ici une équation à laquelle s'applique la règle I ; la solution est  $X = 10$ . On est ramené au système :  $x + y = 10$  et  $xy = 31 - 10 = 21$ . Il s'agit de partager dix en deux parties dont le produit est vingt-et-un. Les nombres cherchés sont 3 et 7. Gosselin connaît les solutions du problème, qu'il dit avoir traité au chapitre 14 du livre I de son ouvrage.

---

 ASPECTS DU ROLE  
 DE LA GEOMETRIE
 

---

Remarquons que Gosselin n'a pas établi de lien entre la résolution d'une équation du second degré et la recherche de deux nombres connaissant leur produit et leur somme. Simon Stevin, en revanche, dans son *Arithmétique* (Leyde, 1585), à la note 2 du problème LXIII, ouvre la question : il rapproche le fait que certaines équations du second degré ont deux solutions, du fait que le partage de 6 en deux parties telles que leur produit soit 8, conduit à trouver les deux nombres 4 et 2<sup>(11)</sup>.

Gosselin apparaît donc tout à fait emblématique de son époque : il est à la recherche d'une symbolique algébrique tout en restant largement dépendant de l'héritage euclidien, qu'il sait mettre au service de sa démarche algébrique.

V. Quelques années auparavant, l'Allemand Michael STIFEL a fait œuvre originale en publiant son *Arithmetica Integra* (Nüremberg, 1544). Il y fait la synthèse des connaissances de son époque en arithmétique et en algèbre, qu'il augmente de contributions personnelles. Stifel a adopté l'usage des nombres négatifs et mis en place un système de notations pour l'inconnue et ses puissances : 1 $\aleph$  pour la coss (la chose inconnue), 1 $\aleph$  pour son carré, 1 $\wp$  pour son cube, etc. Il utilise les signes + et - mais écrit "égal" en toutes lettres (aequatus, aequari... Nous utiliserons "eq" dans notre transcription).

Il élabore et formalise une règle pour la

résolution des problèmes d'algèbre et écrit<sup>(12)</sup> : "*Et voici la célèbre règle de l'Algèbre ramenée à son expression simple et générale. Celui qui cherche le nombre inconnu qu'il faut trouver, que, à sa place, il pose 1 Coss (nous, nous posons 1 $\aleph$ ) et une équation étant trouvée, qu'il la réduise, si elle est réductible. Ensuite qu'il divise par le nombre du plus grand signe cossique<sup>(13)</sup> le reste de l'équation, égalé au même diviseur, mais toutefois dénominé<sup>(14)</sup>. Et ainsi le nombre inconnu qu'on cherchait apparaîtra toujours soit dans le quotient soit dans une de ses racines. Et si une racine doit être extraite, le diviseur l'indiquera de façon suffisante et magnifique grâce à son signe cossique.*" Ainsi Stifel procède à la mise en équation du problème, puis isole le terme de plus haut degré de l'équation réduite et rend par division son coefficient égal à 1 ; il ne reste plus qu'à extraire la racine du second membre de l'équation, une racine carrée évidemment, pour la résolution d'une équation du second degré. Stifel classe les équations du second degré en trois catégories selon les signes de leurs coefficients, soit dans une écriture très proche de la sienne : 1 $\aleph$  eq 84 - 8 $\aleph$ , 1 $\aleph$  eq 8 $\aleph$  + 48, 1 $\aleph$  eq 18 $\aleph$  - 72. La résolution du problème se ramène donc à la recherche d'une racine qui soit égale à une racine carrée, par exemple : 1 $\aleph$  eq  $\sqrt{(84 - 8\aleph)}$ . Stifel ne calcule donc toujours que des racines positives. Cherchant une procédure calculatoire commune aux trois types d'équations, et devant donc tenir compte des signes des coefficients, il élabore un algorithme positionnel en cinq points, les

---

(11) La question du lien entre les deux problèmes, Résolution d'une équation du second degré, et Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence, fait l'objet d'une étude indépendante, à paraître dans les Actes de l'Université d'Été Interdisciplinaire sur l'Histoire des Mathématiques, Université des Pays de Loire, Nantes, 1997.

---

(12) La traduction des passages retenus est proposée par l'auteur de l'article, en collaboration avec M. Defradas.

(13) Il faut comprendre : "le coefficient du monôme de plus haut degré."

(14) C'est-à-dire : "affecté de son signe cossique."



résultats successifs s'inscrivant de façon réglée dans l'une ou l'autre des colonnes définies par les deux coefficients. C'est la fameuse règle AMASIAS : "Suit la méthode d'extraction. Premièrement. Commence par le nombre des racines, et l'ayant divisé par deux, à sa place, pose sa moitié, qui restera à sa place jusqu'à ce que l'opération soit entièrement terminée. Deuxièmement. Multiplie par lui-même le nombre moitié que tu as posé. Troisièmement. Ajoute ou soustrais selon l'exigence du signe d'addition ou du signe de soustraction. Quatrièmement. Il faut trouver la racine carrée de la somme de ton addition ou du reste de ta soustraction. Cinquièmement. Ajoute ou soustrais selon l'exigence du signe ou de ton exemple. Cette méthode d'extraction, je l'ai façonnée pour toi, mon bon lecteur, de façon qu'elle puisse s'attacher solidement à ta mémoire au moyen du mot AMASIAS. Ainsi A signifie premier point (on commence par A) et enseigne la position de la moitié du nombre des racines. La lettre M représente le second point, qui commande la Multipli-

cation. A&S représentent le troisième point qui requiert soit une Addition soit une Soustraction selon l'exigence du cas (ainsi que les exemples le rendront clair). La lettre I signifie que c'est l'Invention de la racine carrée qui est requise. A&S désignent le dernier point de cette règle qui à nouveau fait mention de l'Addition ou de la Soustraction de quelque chose." Stifel continue en proposant "des exemples qui développent cette méthode pour qu'alors un par un, les points de la méthode soient clarifiés de la meilleure manière.", ce qui l'amène à expliciter la différence des rôles joués par le signe moins, selon qu'il affecte le nombre des racines ou le nombre absolu (cf. ci-dessous).

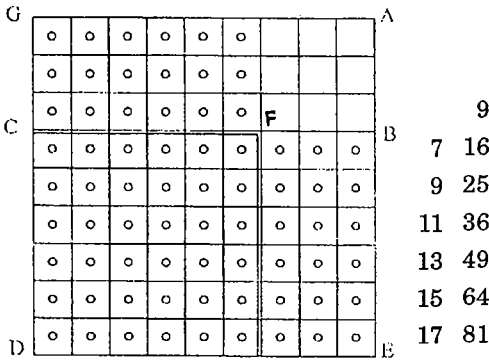
Ce progrès algébrique considérable ne rend pas Stifel indifférent à la géométrie euclidienne. Bien au contraire, sa démarche géométrique est double. D'une part, il propose des démonstrations géométriques pour ses algorithmes numériques tout neufs. D'autre part, il exploite les

13 eq 84 - 8N		13 eq 8N + 48	
- 4	A	4	A
(- 4) x (- 4)	M	4 x 4	M
84 + 16	A&S	16 + 48	A&S
100		64	I
10	I	8	A&S
10 - 4	A&S	4 + 8	
6		12	
13 eq 18N - 72		13 eq 12N - 36	
9	A	6	A
9 x 9	M	6 x 6	M
81 - 72	A&S	36 - 36	A&S
9		0	
3	I	0	I
9 ± 3	A&S	6 ± 0	A&S

12 et 6 sont racines.

ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

figures construites, pour en déduire des équations nouvelles. Observons l'exemple suivant : "De même pour 13 égal à 72 - 68. On cherche combien fait 18 tiré de 72 - 68. Démonstration



Quand je pose la moitié du nombre des racines, alors je pose la petite ligne (le segment) AB. Je la multiplie par elle-même, ce qui fait 9 pour sa surface carrée, que j'ai voulu signaler par l'absence de zéros. A cette surface (c'est-à-dire à 9) j'ajoute 72, ce qui fait son gnomon, entièrement signalé par les zéros ; et ainsi le carré est complété. J'en extrais donc la racine carrée ce qui fait 9, c'est-à-dire la ligne AE. De cette ligne je soustrais la petite ligne AB, c'est-à-dire la moitié du nombre des racines. Alors reste la ligne BE ou CD, qui est la racine de ce carré 72 - 68, faisant 6 par sa longueur. D'où 36 est égal à ce nombre cossique 72 - 68. Or la figure de cette démonstration, tu sais qu'elle est un exemple de la quatrième proposition du deuxième livre d'Euclide." A côté de la figure, les nombres impairs successifs que nous écrivons dans la première colonne

sont les valeurs des gnomons qu'on emboîte pour obtenir la suite des carrés, dont les valeurs sont indiquées dans la deuxième colonne, (soit 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 72, le gnomon ajouté ; 9 + 72 = 81, le carré obtenu). Le carré cherché est le carré DF, égal au gnomon moins les deux compléments :

$$6 \times 6 = 72 - 2 \times 3 \times 6,$$

$$6 = \sqrt{72 - 2 \times 3 \times 6} \text{ (15)}$$

Revenons à la référence que Stifel fait à la proposition 4 du livre II d'Euclide, en prenant la liberté de l'exploiter complètement. Parce que 9 = 6 + 3, alors 81 = 36 + 9 + 2 x 3 x 6. Cette égalité peut s'écrire :

$$\text{soit } 36 = 81 - 9 - 2 \times 3 \times 6$$

$$6^2 = 72 - 2 \times 3 \times 6$$

relation qui exprime que 6 est racine de l'équation 13 eq 72 - 68 ; c'est ce que Stifel a mis en évidence.

$$\text{soit } 9 = 81 - 36 - 2 \times 3 \times 6$$

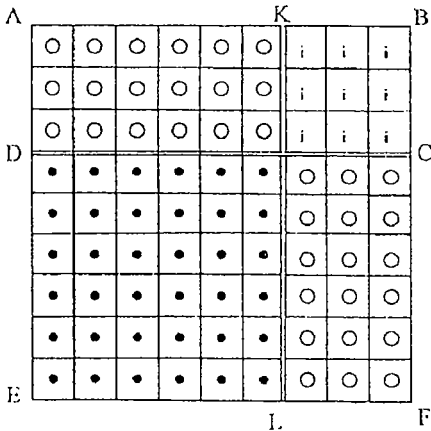
$$3^2 = 45 - 2 \times 3 \times 6$$

relation qui exprime que 3 est racine de l'équation 13 eq 45 - 128.

Ainsi, sur toute figure du même type, on peut lire deux équations ayant chacune comme racine positive le côté d'un des deux carrés. Ce résultat, qui n'est pas donné par Stifel, s'inscrit pourtant dans la perspective de ce qu'il propose plus loin. La figuration des nombres entiers que Stifel adopte lui permet de jouer avec les nombres, particulièrement de faire sortir d'une figure dont on connaît les dimensions, des équations dont

(15) Ce résultat est obtenu par des constructions qui suivent pas à pas l'algorithme AMASIAS.

on prévoit les solutions. Stifel affirme au chapitre 2 du livre III de l'*Arithmetica Integra* que les propositions du livre II des *Eléments* d'Euclide ont pour intérêt principal la fabrication d'équations. Le passage que nous citons maintenant est tout à fait exemplaire de la double démarche de Stifel : démontrer et fabriquer. "Il faut maintenant ajouter la démonstration par laquelle tu puisses voir et comprendre que les équations de cette sorte (où c'est le signe de la soustraction qui sépare, le nombre absolu étant posé à côté de ce signe) ont naturellement deux racines (or aucune équation n'en aura plus de deux). A cet effet, reprenons la seconde figure de ce chapitre, évidemment celle-ci :



Telle qu'elle figure ici, elle est un exemple de la troisième proposition du second livre d'Euclide comme elle peut également en être un de la quatrième [proposition] du second [livre]. Voici donc. Quand je dis que 13 égale  $9x - 18$  (16), bien sûr, d'après cette figure précé-

sément, tu vois comment cette équation convient ainsi au rectangle ABCD et au rectangle CDEF. En effet le carré le plus petit qui est signalé évidemment par les lettres i, tu vois qu'il est égal à  $9x - 18$ . A savoir que le rectangle entier ABCD contient  $9x$ , racines qui sont celles précisément du carré le plus petit, signalé par les lettres i. Par conséquent, si de ces racines on soustrait le nombre 18 c'est-à-dire la partie du rectangle qui est signalée par les zéros alors il reste 13, c'est-à-dire précisément le carré signalé par les lettres i. Elle convient aussi absolument au rectangle CDEF : en effet, le carré le plus grand qui est signalé par les points, tu vois qu'il est égal de la même façon à  $9x - 18$ . A savoir, le rectangle entier CDEF contient  $9x$ , racines qui sont celles précisément du carré le plus grand signalé par les points. Par conséquent, si de ces  $9x$  tu soustrais le nombre 18 c'est-à-dire cette partie du rectangle qui est signalée par les zéros, alors il reste 13 c'est-à-dire précisément le carré signalé par les points. Tu vois de façon certaine que une seule et même équation, celle-ci, 13 égale  $9x - 18$ , a deux racines, étant donné qu'elle convient à l'un et l'autre rectangles. D'une part 3 en est la racine la plus petite ; d'autre part 6 en est la racine la plus grande. Comme tu vois très bien que BC est le côté du carré le plus petit et DE le côté du carré le plus grand. Or quand je dis que 13 est égal à  $27 - 6x$ , tu vois de façon certaine que cette équation convient seulement au rectangle le plus petit, évidemment ABCD. Ainsi quand je dis que 13 est égal à  $54 - 3x$ , tu vois que l'équation convient seulement au rectangle le plus grand. Et quand je dis que 13 égale  $6x + 27$ , ou que 13 égale  $3x + 54$ , tu vois que ces équations conviennent seulement au carré contenant l'un et l'autre rectangle, évidemment ABFE."

(16) Dans tout ce qui suit, nous avons remplacé par 9 le 12 vraisemblablement erroné qui figure sur la copie de l'*Arithmetica Integra* dont nous disposons.

ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

Voici une formalisation possible des résultats obtenus :

dans le rectangle ABCD :

$$\begin{array}{r} \text{(II,3)} \quad 3 \times 9 = 3 \times 3 + 3 \times 6 \\ \quad \quad \quad \underline{3^2} = 3 \times 9 - 3 \times 6 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 9\aleph - 18 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 27 - 6\aleph \end{array}$$

dans le rectangle CDEF :

$$\begin{array}{r} \text{(II,3)} \quad 6 \times 9 = 6 \times 6 + 6 \times 3 \\ \quad \quad \quad \underline{6^2} = 6 \times 9 - 6 \times 3 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 9\aleph - 18 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 54 - 3\aleph \end{array}$$

dans le carré ABFE :

$$\begin{array}{r} \text{(II,2)} \quad 81 = 3 \times 9 + 6 \times 9 \\ \quad \quad \quad \underline{9^2} = 3 \times 9 + 6 \times 9 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 3\aleph + 54 \\ \quad \quad \quad \underline{13} = 27 + 6\aleph \end{array}$$

Il apparaît que la même équation  $13 \text{ eq } 9\aleph - 18$  admet la racine 3 et la racine 6.

La valeur 9 est racine pour chacune des deux équations.

Nous voyons Stifel jongler avec les figures et les nombres entiers. L'originalité de Stifel à son époque réside donc à la fois, en algèbre, dans sa tentative presque réussie de mise en place d'un algorithme unique pour la résolution des équations du second degré ; et, en géométrie, dans sa découverte de la productivité de figures jugées, jusque là, uniquement illustratives.

VI. Quand Simon STEVIN publie son *Arithmétique*, en français, à Leyde, en 1585, il est au fait des derniers développements de l'algèbre de cette fin de siècle. Comme Bombelli (*Algebra*, Bologne, 1572), il adopte pour les puissances de l'inconnue une notation arithmétique, ① pour le nombre, ② pour la racine, ③ pour son carré, ④ pour son cube, etc. S'il propose une équation du second degré à résoudre, il demande, par exemple, pour quelle valeur de 1 ①, 1 ② vaudra 4 ① + 5 ou 4 ① + 5 ②. Ayant reconnu que retrancher un nombre, c'est ajouter un nombre négatif, il calcule avec la même aisance sur tous les nombres positifs, négatifs, ou irrationnels (tout en ne recherchant pourtant que les racines positives). Il applique, à tous les problèmes du second degré, l'algorithme de résolution numérique de Stifel, allégé par l'adoption de la présentation unique ② vaut ① ② dans

laquelle le binôme est ordonné, allégé aussi de toute considération sur les signes des coefficients. Ainsi au problème LXVIII du livre II de son *Arithmétique*, Stevin ne distingue que formellement, les trois équations, écrites ici en écriture symbolique actuelle,  $x^2 = 4x + 12$ ,  $x^2 = -6x + 16$ ,  $x^2 = 6x - 5$ , qu'il nomme respectivement la première différence de second terme ① + ②, la seconde différence de second terme - ① + ②, la troisième différence de second terme ① - ②. Il leur applique un traitement commun :

première différence :

$$\begin{array}{r} x^2 = 4x + 12 \\ \quad \quad \quad 2 \\ \quad \quad \quad 2 \times 2 \\ \quad \quad \quad 4 + 12 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 16 \\ \quad \quad \quad 2 + 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6 \end{array}$$

deuxième différence :

$$\begin{array}{r} x^2 = (-6)x + 16 \\ \quad \quad \quad (-3) \\ \quad \quad \quad (-3) \times (-3) \\ \quad \quad \quad (+9) + 16 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 25 \\ \quad \quad \quad (-3) + 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array}$$

troisième différence :

$$\begin{array}{r}
 x^2 = 6x + (-5) \\
 3 \\
 3 \times 3 \\
 9 + (-5) \\
 \phantom{9} \phantom{+} 4 \\
 3 + 2 \\
 5 \\
 3 - 2 \\
 1
 \end{array}$$

Toutes les solutions positives sont obtenues.

Comme Bombelli, Stevin justifie par une méthode algébrique générale l'algorithme de résolution numérique : il ramène le problème du second degré à un problème du premier degré en faisant apparaître la forme canonique du trinôme et en écrivant l'égalité de deux carrés. Il explique ainsi pourquoi certaines équations ont deux racines. Nous reproduisons son texte en vieux français et en transcrivons ensuite le contenu mathématique en écriture symbolique actuelle :

*"De l'origine de la construction du précédent LXVIII problème. [...] Et par les choses dessus dites est assés notoire l'origine des autres deux différences, toutesfois parce que nous avons dict, qu'en l'origine appert pourquoy la troisieme difference a deux solutions, nous la declarerons. Soit 1 ②, egale à 6 ① - 5, qui sont le premier & second terme de l'exemple de la troisieme difference, & soustrayons de chascune partie 6 ①, & fera 1 ② - 6 ①, egale à - 5. Reste maintenant de trouver quelque ③, qui ajousté à 1 - 6 ①, le trinomie aie racine, qui soit 1 ① & quelque ④, le mesme pour les raisons que dessus fera 9 (à sçavoir le quarré de - 3 moitié de - 6 des - 6 ①.) Ajoustons doncques à chascune partie 9, & feront 1 ② - 6 ① + 9, egales à 4. Puis*

*extrayons de chascune partie racine quarrée, & sera 1 ① - 3, egale à 2. ou autrement - 1 ① + 3, egale à 2. Car autant 1 ① - 3, comme - 1 ① + 3, est racine de 1 ② - 6 ① + 9 ; quand doncques nous posons pour racine 1 ① - 3 egale à 2, il faut ajouster à chascune partie 3, & 1 ① sera egale, ou vaudra 5. Mais si nous posons pour racine - 1 ① + 3, egale à 2, il faudra soustraire de chascune partie 2, & restera - 1 ① + 1, egale à 0 ; Et ajoustant à chascune partie 1 ①, alors sera 1 ① egale ou vallant 1. Et est la cause de la double solution à la dicte troisieme difference par ces choses si manifeste, qu'il n'est mestier d'en sonner plus mot ; Laquelle origine il falloit declarer."*

Asavoir :  $x^2 = 6x - 5$ , donc  $x^2 - 6x = -5$ . On cherche a et b pour que  $x^2 - 6x + a$  soit le carré de  $x + b$ . Pour b, on prend  $(1/2).(-6)=(-3)$ , donc pour a,  $(-3) \times (-3) = 9$ . On obtient  $x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$ , donc  $x^2 - 6x + 9 = 4$ . De cette égalité de carrés, on déduit, soit  $x - 3 = 2$ , soit  $-x + 3 = 2$ , ce qui fait apparaître les deux solutions 5 et 1. Notons que Stevin détaille toutes les opérations élémentaires de transpositions.

Il traite également avec aisance les équations dont le terme de plus haut degré n'est pas unitaire.

C'est grâce à la mise en place d'un symbolisme opérationnel qu'il est maintenant possible de trouver l'inconnue numérique en faisant apparaître la forme canonique du trinôme. La démarche est fondamentalement différente de celle qui consiste à calculer l'inconnue en utilisant un algorithme. Nous avons vu al-Khwarizmi et al-Khayyam organiser leurs démonstrations autour du carré inconnu. Nous voyons maintenant Bombelli et Stevin organiser leurs calculs autour du nombre inconnu. La Science de l'Inconnue

ASPECTS DU ROLE  
DE LA GEOMETRIE

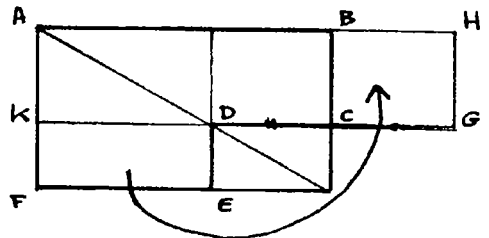
est, géométriquement et algébriquement, le champ privilégié de la démarche analytique.

Étudions maintenant le rôle que Stevin attribue à la géométrie dans cette situation algébriquement heureuse. Pour cela, examinons le plan d'étude repris pour chaque équation. D'abord une "construction" : c'est le terme géométrique que Stevin utilise pour désigner l'algorithme numérique, c'est-à-dire la construction par les nombres. Ensuite une "démonstration arithmétique" : c'est une simple vérification par calcul. Suit une "démonstration géométrique", en deux temps marqués par Stevin, celui de la mise en place de la configuration géométrique-type associée au problème, et celui d'une "construction par les grandeurs", qui... ne construit pas la grandeur inconnue. Ainsi, à propos de la troisième différence, (voir figure 21) : *"Autre démonstration géométrique : Soit décrit le carré ABCD, denotant 1 ②, ergo son costé AD (lequel prouverons valoir 5 à la fin de la démonstration) sera 1 ①. Puis soit produit la ligne DA, en E, & soit toute la DE 6, & de AE, & AB, soit décrit le rectangle AEFB ; ergo le rectangle DEFC (veu que DE est 6, & DC 1 ①) sera 6 ① : or puis que le carré ABCD, qui est 1 ②, est égal à 6 ① - 5, & que le rectangle DEFC fait 6 ①, ergo le rectangle AF fera 5. Doncques les trois termes donnez en nombres nous les avons icy en grandeurs, à scavoir ABCD 1 ②, egale à DF 6 ① - AF 5 ; Et AD est la 1 ①. Or faisons maintenant la construction par ces grandeurs, semblable à la précédente des nombres, en cette sorte : La moitié de ED 6, qui soit GD, sera 3. Son carré GHID 9. Au mesme ajousté le -5 donné, c'est à dire moins le gnomon KLIDGM, qui soit égal au rectangle AF - 5. Donne somme pour le carré MHLK 4. Sa racine MK ou GN est 2. A la mesme ajousté GD 3 premier en l'ordre, ou en son lieu GE 3, fait pour NE 5. Mais*

*AD est egale à NE (lequel se prouve, soustrayant AD 5 de ED 6, reste AE 1, qui multiplié par AB 5, donne son vray produit 5) fait doncques pour AD 5. Ce qu'il falloit demonstrer. Mais que la solution 1 est aussi veritable, se demonstre geometriquement ainsi :..."*

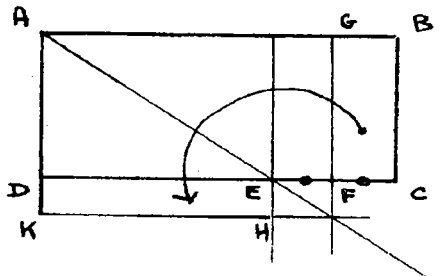
La démarche est donc sophistiquée, voire difficile à comprendre, puisque qu'il s'agit de faire une construction géométrique dont les étapes soient celles d'un algorithme algébrique. Pour mieux percevoir la technique en jeu, rappelons comment on peut opérer la transformation d'un gnomon en rectangle, (figure a), puis celle d'un rectangle en gnomon, (figure b), et plus particulièrement celle d'un rectangle en un gnomon de carrés, (figures c et d).

Figure a :



gnomon ABCDEF = rectangle AHGK.

Figure b :

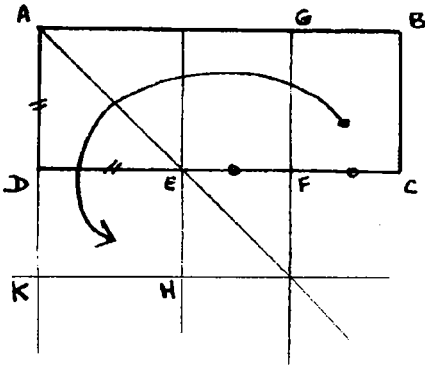


rectangle ABCD = gnomon AGFEHK

La construction n'étant pas déterminée, on peut choisir d'obtenir un gnomon de carrés :

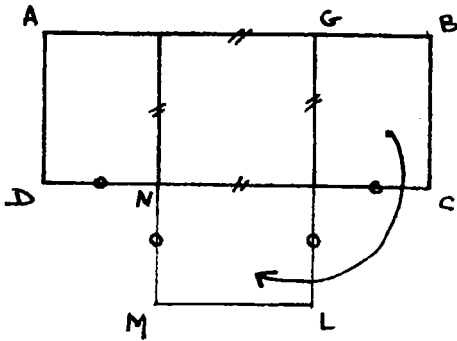
La solution 5 apparaît sur la figure ci-dessous :

Figure c :



rectangle ABCD = gnomon AGFEHK.

Ou encore, figure d :

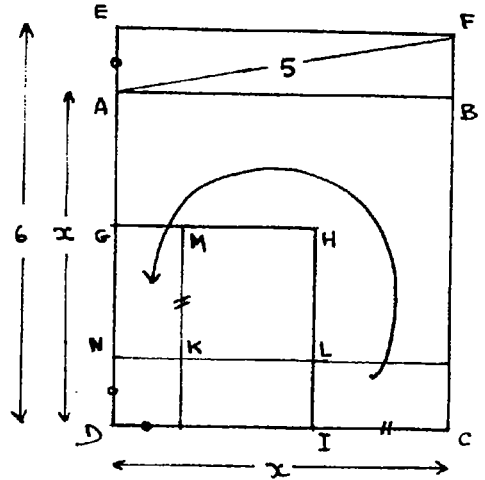


rectangle ABCD = gnomon AGLMND.

Nous avons maintenant les moyens d'examiner la "construction par les grandeurs" que Stevin réalise pour la différence  $x^2 = 6x - 5$ .

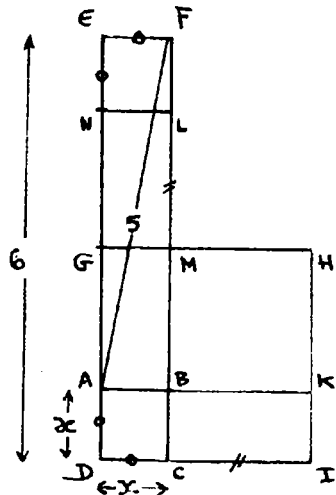
$$x^2 = 6x - 5$$

ou carré ABCD = rect. DF - rect. AF  
que vaut AD ?



carré GHID - gnomon - rect. AF = carré MHLK.  
le gnomon KLIDGM est égal au rectangle AF  
parce que IC = KM.  
AD = EN = EG + GN = 3 + 2 = 5.

La validation de la solution 1 se fait sur  
une figure distincte :



ASPECTS DU RÔLE  
DE LA GÉOMÉTRIE

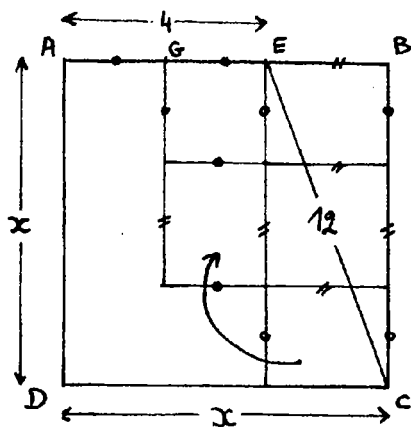
carré GHID – gnomon – rect.AF = carré MHKB.  
le gnomon BKIDGM est égal au rectangle AF  
parce que CI = ML.  
 $AD = EN = EG - GN = 3 - 2 = 1$ .

C'est seulement dans les configurations propres aux propositions II,5 ou II,6 des *Eléments* d'Euclide, qu'on peut obtenir un petit carré en retranchant un rectangle d'un grand carré. Que visent donc ces "constructions par les grandeurs", ces algorithmes géométriques que nous propose Stevin? Il tente une géométrisation des procédés du Jabr et de la Muqabala, pour étayer sa thèse de l'analogie entre les quantités arithmétiques et géométriques. Les opérations arithmétiques ont leur équivalent en géométrie et les nombres sont des quantités continues ; thèse prometteuse s'il en est, quelques décennies avant l'émergence de la Géométrie Analytique.

Peut-on induire que Stevin, au XVI<sup>e</sup> siècle, cherche à développer des automatismes géométriques, sur des figures canoniques sur lesquelles au IX<sup>e</sup> siècle, al-Khwarizmi travaillait de façon artisanale, presque expérimentale, tandis que les mêmes supports visuels inspiraient des travaux savants à al-Khayyam au XI<sup>e</sup> siècle? La figure suivante est commune aux trois auteurs, mais chacun en propose sa lecture propre.

Selon le niveau des élèves auxquels vous vous adressez, vous aurez sans doute été plus sensibles, certains, à la possibilité d'illustrer les règles du calcul algébrique élémentaire par les premières propositions du livre II des *Eléments* d'Euclide ; d'autres, à la clarté des figures validant les algorithmes numériques ; d'autres encore, à l'intérêt de la question ouverte, construction à la règle

et au compas des solutions d'une équation du second degré...



équation  $x^2 = 4x + 12$

Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, le Révérend Père Lamy (*Eléments de Géométrie ou de la Mesure de l'Etendue*, (17) Paris, 1731), dans la préface de son ouvrage, fait encore l'apologie de la géométrie comme propre à "apprendre la méthode de conduire l'esprit de vérités en vérités". Mais surtout au livre VI, il expose "la méthode que les géomètres appellent Analyse". Il explicite : "chapitre II. On peut exprimer les lignes et toutes les grandeurs, dont il est parlé dans une question, et faire sur elles toutes les opérations de l'Arithmétique, sans les connaître." Il commente un peu plus bas : "Cette manière générale d'exprimer toute grandeur et de faire sur elle les opérations qu'on fait sur les nombres est ce qu'on appelle l'Algèbre, comme nous l'avons dit." La thèse de Stevin a fait fortune. Viète et Descartes ont mis en place la Géométrie

(17) A paraître dans la collection *Reproduction de Textes Anciens* de l'IREM de Paris VII.



Analytique et Lamy la vulgarise. Il propose au chapitre XI du livre VI de ses *Eléments de Géométrie* plusieurs problèmes de construction simples traités analytiquement, et accessibles à nos élèves.

Pour schématiser des étapes de la relation "figure-problème du second degré" que nous avons pu rencontrer, rappelons

que nous avons mis en évidence : chez al-Khwarizmi en particulier, la construction de figures pour la validation des résolutions numériques des équations ; chez Stifel, l'utilisation de figures pour la fabrication d'équations ; chez les "nouveaux" géomètres, la résolution d'équations pour le traitement de problèmes de construction.

## BIBLIOGRAPHIE

- AL-KHWARIZMI, M., *Kitab al-Jabr wa l-Muqabala*, édité par A.M.Musharrafa et M.M.Ahmad, Le Caire, 1968.
- BOMBELLI, R., *Algebra*, Bologna, 1572.
- CASSINET, J. & *aliae*, *Equations du second degré*, IREM de Toulouse, 1979.
- DESCARTES, R., *La Géométrie. Appendice au Discours de la Méthode*, Paris, 1636.
- DJEBBAR, A., *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe, (IX<sup>e</sup>-XV<sup>e</sup> siècle)*, Actes de l'Université d'Été de la Commission Inter-IREM, Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Toulouse, 1986.
- EUCLIDE d'Alexandrie, *Les Eléments*, Traduction et commentaires par B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1994.
- GOSELIN, G., *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur*, Paris, 1577, (Le grand art, ou la partie cachée des nombres, qu'on appelle couramment Algèbre et Almucabala).
- HAMON, G., *Bombelli, traduction de fragments et commentaires*, IREM de Rennes, 1996.
- HØYRUP, J., "Les quatre côtés et l'aire". Sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes", in *Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique*, Montpellier, 19-23 Juillet 1993, IREM de Montpellier, 1995.
- "Algèbre d'al-jabr" et "algèbre d'arpentage" au 9<sup>e</sup> siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", in *D'Imhotep à Copernic*, Actes du Colloque International, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989, édités par Mawet et Talon, Peeters-Leuven, 1992.
- LAMY, R.P. B., *Eléments de Géométrie ou De la Mesure de l'Etendue*, Paris, 1731.
- PEYRARD, F., *Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement*, Paris, 1819. Réédition introduite par J. Itard, Ed. Blanchard, Paris, 1993.
- RASHED, R. et DJEBBAR, A., *L'œuvre algébrique de Al-Khayyam*, IHAS Université d'Alep, Alep, 1981.
- STEVIN, S., *Arithmétique*, Leyde, 1585.
- STIFEL, M., *Arithmetica Integra*, Nüremberg, 1544.
- TANNERY, P., *Mémoires Scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- THUREAU-DANGIN, *Textes mathématiques babyloniens*, Leyde, 1938.
- VIÈTE, F., *L'Art Analytique*, Tours, 1591-1593.
- ZEUTHEN, Z., *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age*, Paris, 1902.