REPERES - IREM . N° 28 - juillet 1997

COMMENT RECUEILLIR DES CONNAISSANCES CACHÉES EN ALGÈBRE ET QU'EN FAIRE ?

GÉCO (1) : Catherine SACKUR,
Jean-Philippe DROUHARD (2),
Maryse MAUREL (3),
Michèle PÉCAL

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années notre sujet d'étude est l'apprentissage de l'algèbre au collège et au lycée. Pour regarder les phénomènes mis en jeu nous avons construit des outils théoriques, "les connaissances locales" et les "trois orientations" ainsi que la "dénotation des expressions algébriques". Le travail de recherche se fait avec la méthodologie de la "triple approche" et les données expérimentales sont recueillies dans des entretiens avec les élèves, où ils décrivent, pour eux et pour nous, leur activité mathématique.

Notre but est de montrer et d'expliquer à travers l'étude de quelques protocoles d'entretien avec des élèves, le fonctionnement de nos outils théoriques et méthodologiques.

Nous constatons que ces entretiens permettent au professeur de poser un diagnostic à la fois sur les connaissances d'un élève et sur sa façon de travailler. Ce diagnostic est d'une autre nature que celui que peut faire le professeur de l'élève, ainsi que nous le mettrons rapidement en évidence à propos de Vanessa. Il permet aussi d'envisager une aide au changement dans les comportements mathématiques des élèves.

(1) Association pour le développement du Génie Cognitif,
1bis rue Charles de Foucauld 06100, NICE.
(2) drouhard@unice.fr
(3) maurel@unice.fr

Nous sommes des enseignants et ce travail de recherche nous donne, dans notre pratique, en dehors des activités de recherche, une sensibilité particulière aux comportements des élèves et à leurs erreurs. Nous développerons donc, en conclusion, deux points qui sont de nature à intéresser un enseignant dans sa classe. D'une part, en faisant la synthèse des résultats de ce travail, nous tenterons d'expliquer pourquoi il est si difficile à un élève d'apprendre l'algèbre et à un enseignant de l'enseigner ; d'autre part nous tracerons quelques pistes qui peuvent permettre à un professeur d'agir sur la compréhension que ses élèves ont de l'algèbre.

Nous utilisons ici des entretiens menés avec deux élèves différentes, et, pour l'une d'entre elles, nous disposons de trois entretiens successifs. Dans le cadre de cet article il n'est pas possible de donner des exemples des nombreux entretiens que nous avons menés, soit dans le cadre de notre recherche, soit dans le cadre d'une aide au changement. Un certain nombre d'affirmations ne seront donc pas illustrées par des extraits de protocole.

Pour présenter nos outils théoriques nous avons eu besoin de "mots" ; nous les avons bien sûr empruntés au langage courant avec toutes les ambiguïtés qui les accompagnent. Il est nécessaire, pour ne pas faire de contresens, d'accepter l'idée fondamentale de notre travail, l'interprétation des actions à travers les trois espaces ; quand cela est fait, les différents mots employés, validité, conformité, compréhension... sont *définis* à l'intérieur du cadre théorique et sont pris avec ce sens particulier en oubliant le sens que chacun leur donne habituellement.

II. ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

II.1. Spécificité de notre démarche de recherche

Le travail que nous présentons ici fait partie d'une recherche encore inachevée. Notre but n'est pas de construire un bon modèle de la réalité, encore moins de chercher à la décrire. Nous essayons de construire des outils avec lesquels il est possible d'avoir à la fois une grille de lecture des comportements d'un élève et des possibilités d'intervention. Notre travail a donc une valeur d'interprétation et d'action.

Nous tenterons ici de décrire comment il est possible d'analyser un *phénomène particulier* (le travail d'un élève en algèbre) grâce à une *approche originale*. Ce que nous voulons observer ne peut l'être que si nous "entrons" dans le mode de fonctionnement du sujet, si nous nous intéressons à sa *pensée privée* (4). Pour ce faire nos techniques d'entretien nous permettent de recueillir des observables que nous analysons avec nos outils théoriques. L'exposé de ceux-ci peut paraître abstrait et superflu ; nous pensons au contraire que ce cadre théorique valide l'utilisation des techniques d'entretien particulières qui sont les nôtres et est indispensable pour l'interprétation d'abord, l'action ensuite. Sans théorie, il ne nous serait pas possible de soutenir une quelconque argumentation sur ce que nous mettons en évidence dans la façon de travailler des élèves.

(4) Vermersch (1993).

Nous verrons dans cet article que cette pensée privée est très différente selon les élèves et est susceptible de varier pour un même élève d'un entretien à l'autre. Il nous paraît alors indispensable de pouvoir être, selon les nécessités de la recherche, un interlocuteur plutôt psychologue, plutôt didacticien ou plutôt mathématicien-professeur, bref de pouvoir "changer de casquette". C'est là toute la philosophie de la triple approche et la raison de notre formation bi- ou tri-disciplinaire.

II.2. Triple approche et trois orientations

II.2.1. Connaissances locales

La "triple approche" (5) a pour origine des travaux menés sur les connaissances des élèves en algèbre. Nous pensons que ce que nous exposons ici peut s'appliquer à toutes les connaissances, mais nous ne développerons pas ce point. A l'origine notre approche était piagétienne. Concernant les mathématiques, la dialectique proposée par Piaget (1984) entre "Réussir et Comprendre" nous a paru laisser de coté un aspect essentiel de la construction des connaissances, l'aspect social. De notre point de vue, les mathématiques sont un corps de connaissances pour la construction duquel l'accord social joue, historiquement, un rôle tout à fait primordial et continue à être essentiel dans la communauté mathématique actuelle. En dehors peut-être de l'arithmétique très élémentaire, la seule interaction d'un sujet avec son environnement ne peut conduire à une construction des concepts mathématiques. Cette idée se rapproche de celles développées par Vygotski (1987). Cependant il convient de noter que ce qui nous intéresse c'est bien la "re-construction" par un individu des mathématiques socialement et historiquement déjà construites par les mathématiciens et non un apprentissage socialement reconnu comme peut l'être, de façon parfois caricaturale, l'apprentissage des mathématiques qui permettent de réussir un problème de baccalauréat.

La notion de connaissance locale (6) est essentielle dans la triple approche. Notre idée en mettant en évidence cette notion était d'insister sur le fait que les erreurs que nous constatons dans les travaux mathématiques des élèves ne sont pas le résultat d'*incohérences*, de *conceptions erronées*, mais de *connaissances* qui ont une "forme" particulière. Pour les étudier de manière féconde nous sommes amenés à poser une thèse :

Nous affirmons que toute connaissance est le résultat d'interactions entre un sujet, un groupe social et la réalité.

Les connaissances sont construites par le sujet de façon à être acceptables par un groupe social et dans une confrontation permanente avec la réalité. Ainsi nous interprétons toute connaissance et toute action du sujet suivant trois composantes que nous avons appelées les trois espaces, l'espace psychologique (rapport intra-cognitif du sujet avec lui-même), l'espace social (rapport inter-cognitif du sujet avec un groupe social), l'espace réel (rapport avec une réalité matérielle, ou conceptuelle en ce qui concerne les mathématiques) qui n'est pas l'espace réel traditionnel des scientifiques. Sur cette base théorique, nous avons posé la notion de

(5) Léonard et Sackur (1991).

(6) Léonard et Sackur (1991).

connaissance locale : toute connaissance est locale, elle est "vraie" au sens usuel du terme à l'intérieur de certaines limites ; le sujet ignore l'existence de ces limites et, évidemment, leur place dans le savoir. Ces limites sont identifiables par un "expert", c'est à dire quelqu'un qui possède une connaissance moins locale que celle du sujet. Que voulons-nous dire en disant qu'elle est "vraie" ? Plaçons-nous dans les trois espaces : dans l'espace psychologique, elle est dite *cohérente en elle-même* pour le sujet ; elle ne contient pas de contradiction à l'intérieur du domaine où le sujet est susceptible de l'utiliser (ce qui ne signifie pas qu'elle n'est pas contradictoire avec d'autres de ses connaissances) ; dans l'espace social, elle est dite *valide,* validée par un groupe social (ou l'un de ses représentants) qui la reconnaît comme telle ; dans l'espace réel, elle est dite *efficace*. Nous affirmons qu'une connaissance locale possède ces trois qualités à l'intérieur de ses limites et que, dès que les limites sont dépassées, elle perd les trois qualités à la fois. Nous appelons ces qualités les *dimensions* de la connaissance locale et cela correspond à un aspect *statique,* à la connaissance stable, en état d'équilibre. Nous pouvons donner comme exemple très simple de connaissance locale : "quand on multiplie ça augmente, quand on divise ça diminue". Le domaine de validité est facile à identifier, il s'agit des réels plus grands que 1 et on peut penser que pour un élève il s'agit des entiers plus grands que 1. La connaissance est cohérente pour l'élève qui ne fait fonctionner que ces nombres là, elle est évidemment valide mathématiquement et efficace, en ce sens qu'appliquée à ces nombres elle produit des résultats exacts. Nous aurons l'occasion, dans la suite de ce travail d'identifier d'autres connaissances locales en algèbre.

Si on accepte cette notion, le projet de notre recherche est clair : l'élève construit des connaissances locales qui vont évoluer depuis des connaissances très locales comme celle citée ci-dessus jusqu'à des connaissances acceptables par un certain groupe social, l'école ou les mathématiciens par exemple. Il s'agit alors pour nous d'identifier les connaissances locales d'un élève et d'agir sur elles. La suite de notre travail concerne donc l'utilisation des connaissances et leur évolution : si une connaissance locale est utilisée à l'intérieur de son domaine de validité, elle est efficace, valide, cohérente et il n'y a aucune raison qu'elle se modifie. Si elle est utilisée hors de son domaine de validité, elle est invalide, incohérente, inefficace et le système de connaissances du sujet est perturbé ; il n'est pas sûr que le sujet en tienne compte, mais s'il le fait, il y a possibilité d'évolution. C'est ce que nous nous proposons d'étudier maintenant.

II.2.1. Trois orientations

Nous nous intéressons dès lors à l'aspect *dynamique* des connaissances. Les connaissances sont utilisées pour agir et nous pouvons considérer que toute action est orientée vers un objectif ; il y a ainsi des critères d'atteinte de cet objectif qui sont aussi des critères d'arrêt de l'action. Afin d'observer et de décrire finement l'activité des sujets, il nous a paru nécessaire de différencier la nature des objectifs de l'action et donc des critères d'atteinte de ces objectifs d'après les trois espaces ; nous obtenons alors ce que nous avons appelé les trois *orientations* (7) de l'activité d'un sujet, la *compréhension* dans l'espace psychologique, la *conformité* dans l'espace social et la *performance* dans l'espace réel. L'espace

(7) GECO (1994).

lié à chacune des orientations détermine, entre autres, la nature des indices que le sujet prend en considération à partir des résultats de son action pour guider celle-ci.

Avant de détailler ce point il nous paraît important de nous pencher très brièvement (et de façon très superficielle) sur ce qui caractérise le travail d'un expert en mathématiques. L'algèbre (et sans doute toutes les mathématiques) tire en partie sa force de *la possibilité qu'elle offre de travailler sans revenir à chaque instant à la compréhension du* pourquoi *d'une transformation algébrique*. Un mathématicien se permet de faire une confiance aveugle à des règles qu'il connaît et qui sont des règles valides, efficaces et cohérentes, et ceci tant qu'aucun obstacle ne survient. L'économie de pensée qui est ainsi rendue possible est depuis longtemps reconnue comme une des caractéristiques de l'algèbre. Cependant, en cas de difficulté, ou pour garder un contrôle sur la validité de son travail le mathématicien a la possibilité d'abandonner ce type de fonctionnement et de mettre en œuvre d'autres procédures. Nous dirons qu'il change d'orientation, qu'il abandonne un aspect de ce que nous appelons la conformité. Un expert, dans notre cadre théorique, peut être caractérisé par la capacité qu'il a, à tout moment – et à bon escient– de changer son orientation de travail.

Pour un élève qui travaille en conformité, les indices qui guident son action sont pris dans l'espace social et l'action du sujet est orientée vers la recherche d'un accord avec les normes édictées par autrui (par exemple par le professeur représentant les mathématiciens, ou les élèves de la classe dans le cas d'un travail de groupe : on a vu des élèves se mettre d'accord sur des normes erronées). Si nous nous intéressons alors aux explications que peut donner un élèves de ses actions, nous trouvons des phrases qui ressemblent à des formulations de règles *"quand il y a x en haut et en bas, on simplifie"*, *"pour résoudre une équation, on fait passer..."*. Dans le paragraphe qui suit, en développant la notion de "calculateur aveugle" nous verrons quelles conséquences la conformité peut avoir sur le travail d'un élève.

De même, dans un objectif de réussite (en performance), le rapport à la réalité (conceptuelle) peut amener un élève à rejeter un résultat tel que $|z| = -3$. Il n'est pas facile d'identifier de façon irréfutable ce qui permet de dire que l'activité du sujet se situe dans l'une ou l'autre des orientations : le rejet d'une valeur négative pour le module d'un nombre complexe peut, suivant le contexte, être le fait d'un travail en conformité avec des règles bien "apprises", d'un travail en performance ou d'un travail en compréhension, l'élève ayant identifié ce qu'il pouvait y avoir de contradictoire dans ses connaissances locales s'il acceptait un tel résultat (par exemple la propriété du module d'un produit). Les orientations peuvent se distinguer les unes des autres par l'observation d'indices non verbaux : ton de la voix, rapidité du discours, gestes,... Il est assez difficile de les décrire mais on peut noter qu'un travail en compréhension est un travail très personnel, sans relation avec le questionneur, souvent accompagné de murmures relativement indistincts, ponctué d'exclamations sourdes (ah oui, ah mais non...) avec éventuellement une accélération au moment de la découverte (eurêka ! en quelque sorte), alors qu'un travail en conformité est le travail que nous connaissons bien de l'élève qui récite en cherchant des yeux notre acquiescement et qui énonce ses règles d'une voix égale plus ou moins assurée suivant les compétences qu'il ose se reconnaître. Les orientations sont aussi repérables lorsqu'un élève passe d'une orientation à une autre dans son travail, par exemple de la conformité à la compréhension : là, on assiste souvent une modification complète de sa "façon d'être", en même temps qu'à une modification de son activité mathématique : prise de décisions, envie des tester des hypothèses, retours en arrière pour comparer des résultats...

II.2.3. Évolution des connaissances locales

Le fait que les dimensions des connaissances locales concernent leur aspect statique et les orientations leur aspect dynamique nous amène à poser une thèse assez forte :

Les dimensions d'une connaissance locale sont indissociables : les limites sont les mêmes pour les trois dimensions ; la connaissance locale est à la fois valide, cohérente, efficace. Les orientations d'une connaissance locale sont dissociées : à chaque instant l'action du sujet (qui met en jeu ses connaissances locales) se trouve dans une seule orientation. Les changements d'une orientation à une autre peuvent être très rapides et ce sont eux qui nous permettent le plus souvent d'identifier les orientations.

Nous travaillons actuellement sur deux hypothèses :

1) A partir d'un même ensemble de connaissances locales, qui caractérisent un sujet à un moment donné, les connaissances locales construites dans des orientations différentes sont différentes.
2) Nous pouvons agir sur l'orientation dans laquelle travaille un élève.

Nous pensons qu'il n'y a pas de hiérarchie entre les orientations. Ainsi que nous l'avons dit, tout travail de mathématiques s'effectue en partie en conformité ; nous constatons, par contre, que les élèves qui ont des difficultés en algèbre n'ont jamais travaillé qu'en conformité et qu'il est à la fois indispensable et très difficile de susciter chez eux un changement d'orientation. C'est indispensable car aucun élève ne peut mémoriser de façon correcte la totalité des règles formelles qui permettraient, par exemple à un ordinateur, de ne jamais se tromper dans un calcul et qu'il faut donc que ces règles soient organisées et que l'élève puisse exercer un contrôle sur ses connaissances. Nous essayerons dans la conclusion d'étudier pourquoi c'est difficile.

L'étude des entretiens de nos différents élèves nous permettra d'identifier des orientations différentes (par exemple chez Leslie et chez Vanessa) et des changements d'orientation pendant un entretien (chez Leslie). Nous verrons aussi qu'on peut travailler en compréhension avec des connaissances principalement construites en conformité. Enfin nous verrons que l'entretien tel que nous le menons nous permet d'agir sur le fonctionnement d'un élève et de contribuer à une évolution de ses connaissances locales.

II.3. Sens et dénotation des écritures algébriques

Les connaissances locales de l'algèbre élémentaire, illustrent de manière étonnamment claire à quel point les trois dimensions sont indissociables. Les règles de calcul littéral (socialement) valides sont (mathématiquement) efficaces, et forment un tout cohérent. Certes, mais pourquoi, au fait ? Est-ce le hasard, ou la divine providence qui sont à l'origine de cette indissociabilité ?

Pour répondre à cette question, nous serons amenés à nous demander ce qui, dans la nature même de l'algèbre, assure cette indissociabilité des connaissances locales de l'algèbre élémentaire, en particulier dans le rapport très spécifique qu'entretiennent les écritures algébriques avec les objets mathématiques qu'elles représentent. Notre réponse repose sur une théorie dite de la "dénotation" que nous esquisserons rapidement.

Faisant d'une pierre deux coups, nous pourrons alors analyser plus finement les rapports qu'entretiennent entre elles les trois orientations des connaissances locales de l'algèbre élémentaire. Plus précisément, nous verrons dans le paragraphe II-4 comment nous pensons pouvoir amener un sujet à passer de la conformité à la compréhension en jouant sur la performance. Cela n'a rien d'évident *a priori* tant les malentendus biaisent les dialogues entre expert et non-expert en algèbre. En outre, ce n'est certainement pas en le lui demandant de but en blanc ("mais voyons, réfléchis donc un peu !") qu'on peut amener un sujet à se mettre en compréhension. C'est l'utilisation des caractéristiques de la dénotation qui nous donnera un moyen (oblique) d'y arriver, par ce que nous appellerons les entretiens "Faire (toujours) Faux".

II.3.1. L'indissociabilité des trois dimensions

Qu'est-ce qui fait que les trois dimensions des connaissances locales algébriques sont indissociables ? Autrement dit, quand on opère sur une expression, de manière cohérente et au moyen de règles valides, pourquoi obtient-on, efficacement, une expression mathématiquement équivalente ? Par exemple, pourquoi est-ce que, si j'applique la transformation "bien connue" (*i.e.* socialement valide) de "différence des deux carrés" à une expression telle que :

(i) $\quad 4x^2 - \frac{2}{9}$

j'obtiens :

(ii) $\quad (2x + \frac{\sqrt{2}}{3})\,(2x - \frac{\sqrt{2}}{3})$

tout en étant certain que (sous réserve de n'avoir pas fait d'erreur, c'est-à-dire d'avoir appliqué la bonne transformation de la façon convenable) (ii) est, sans l'ombre d'un doute, mathématiquement équivalente à (i) ?

La question peut paraître de prime abord parfaitement saugrenue tant la réponse semble aller de soi. Pour le mathématicien en effet, les règles telles que celle de la différence de deux carrés se ramènent à quelques unes des règles simples qui, toutes ensemble, font de R un corps ordonné.

En réalité, la question de l'adéquation entre correction formelle et équivalence mathématique (entre validité et efficacité) n'apparaît saugrenue (en ceci que sa réponse est, dans un certain sens, évidente), qu'à celui qui se l'est déjà posée un jour ! En tant que professeur, nous avons dû, à un moment ou à un autre, nous poser cette question durant notre formation et nous y avons répondu ; sinon, nous n'aurions pas compris une des règles essentielles du jeu mathématique, et on peut supposer que nous ne serions pas devenu professeur ! Toutefois, à partir du moment où nous en avons compris la réponse, la question a perdu son sens pour nous : une fois qu'on a compris, on oublie qu'il y avait quelque chose à comprendre. De ce fait, il est difficile, à celui qui a compris que la validité est liée indissolublement à l'efficacité, de se rendre compte que l'élève doit à son tour se poser la question et comprendre que la réponse va (en quelque sorte) de soi, pour passer (en algèbre du moins) de la conformité à la compréhension.

Pour comprendre quelques-unes des difficultés rencontrées par les élèves (pour nous mettre "à leur place"), c'est-à-dire pour oublier (volontairement, cette fois) que nous en connaissions la réponse, nous avons été amenés à nous (re-)poser la question, dans un cadre adéquat, celui de la logique. En effet, pour le logicien, le fait que l'application des transformations correctes aboutisse à des expressions équivalentes n'est pas du tout une propriété intrinsèque des règles mathématiques, mais bien un *théorème* qu'il démontre par récurrence sur la complexité des formules.

Toutefois, les logiciens reconstruisent le langage mathématique pour pouvoir travailler plus aisément. Par contrecoup, leurs constructions s'éloignent de la pratique usuelle des mathématiciens et sont donc peu utilisables, en l'état, pour nous permettre de comprendre la manière dont les élèves interprètent les règles, les expressions et les équivalences entre expressions.

II.3.2. la dénotation

Nous avons donc procédé de manière légèrement différente, et nous avons cherché d'abord à approfondir la manière dont les élèves pouvaient interpréter les expressions (et par suite les équivalences entre expressions). Pour ce faire, nous nous sommes servis de la distinction que le logicien G. Frege a posée en 1892 (trad. 1970) entre *Sinn* ("Sens") et *Bedeutung* ("Dénotation") (8). Par exemple (en français) "Neil Armstrong" et *"Le premier homme sur la Lune"* ont le même dénoté (*Bedeutung*) : l'homme nommé Neil Armstrong. Toutefois, ces deux phrases n'ont pas le même sens (*Sinn*) : la seconde phrase insiste sur ce qu'il a fait, tandis que la première souligne son patronyme.

En mathématiques, comme l'a montré Frege, les choses sont un petit peu plus compliquées. Quatre cas sont à considérer : les expressions algébriques numériques (*i.e.* sans lettre), p. ex. "2 + 3", les énoncés algébriques numériques p. ex. "2 + 3 = 5", les expressions algébriques littérales (p. ex. "$2x$ + 3") et enfin les énoncés algébriques littéraux (p. ex. "$2x$ + 3 = 7").

En général, une expression algébrique numérique dénote un nombre ("1 + 1" dénote 2). Concernant les énoncés (*i.e.* les écritures contenant des signes "=", "<" etc.), Frege opère un véritable coup de force, qui consiste à considérer qu'une telle écriture désigne non pas un *état de fait* (le double de 4 auquel j'ajoute 3 est égal à 11), mais une *valeur de vérité* :

$2 \times 4 + 3 = 11$ est VRAI

Par ailleurs, on dit souvent qu'une lettre *désigne un nombre indéterminé.* Toutefois, qu'est-ce qu'un nombre indéterminé ? Il n'y a pas d'ensemble 𝕀 des nombres indéterminés ! Les mathématiciens utilisent constamment la notion d'indétermination, mais pour autant cette notion n'est pas

(8) Voir également Arzarello, Bazzini et Chiappini (1992).

mathématique, c'est-à-dire qu'elle n'est pas définie *à l'intérieur* des mathématiques (comme le sont par contre les notions d'opération ou de fonction). Le second coup de force de Frege consiste à refuser l'idée confuse que les expressions dénotent des nombres "indéterminés". À la place, il propose de dire qu'une expression dénote une *fonction* (9) (la fonction qui à toute valeur des lettres associe la valeur prise par l'expression).

> "On ne dira pas que "n" désigne un nombre indéterminé mais qu'il indique de manière indéterminée des nombres."
> *Qu'est-ce qu'une fonction ?* (1904, trad. 1971) p. 163

S'en tenir à l'"indétermination", c'est confondre la fonction (le dénoté) avec son image (le "nombre indéterminé"). En pratique, les choses sont assez compliquées à formaliser.

Enfin, la notion de "forme booléenne", fonction de $\mathbb{R}^n$ dans {VRAI, FAUX}, nous permet de modéliser de manière cohérente la notion de valeur de vérité "indéterminée", ou encore "contingente" (au sens de Viviane Durand-Guerrier, 1995).

II.3.3. le sens ("Sinn")

> "L'information véhiculée par de tels symbolismes n'est pas constituée par un renvoi pur et simple à des objets qui transcendent ces signes, mais à des systèmes d'opérations apparemment intérieurs au symbolisme."
> Gilles-Gaston GRANGER, *Langages et épistémologie* p. 53

(9) Frege parle plutôt de "forme insaturée".

Frege est malheureusement bien moins explicite sur la notion de sens ("Sinn") que sur celle de dénotation, en particulier en mathématiques ; autrement dit sur ce qui diffère, du point de vue *sémantique*, entre "$2x\,(y + x)$" et "$2xy + 2x^2$", et qui est bien entendu essentiel puisque le calcul symbolique peut être considéré comme un jeu sur les différences de sens. Dans "Sens et Dénotation" (1892-1971 p. 103) Frege écrit :

> "Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, où est contenu le *mode de donation de l'objet.*"

et dans "Fonction et concept" (1891 trad. 1971) :

> "[...] l'identité des dénotations n'a pas pour conséquence l'identité du *contenu des pensées.*"

Le sens d'une écriture nous permet de savoir comment elle est faite, comment on peut la calculer (*"mode de donation de l'objet"*) (10) ; il nous permet également d'avoir des informations sur ce qu'on peut en faire (telle forme est factorisable, telle autre est développable, dans le cadre de la résolution d'une équation telle forme est préférable etc.).

Une discussion détaillée de ce qu'on peut appeler *sens* dans le calcul symbolique dépasserait le cadre de cet exposé. Tout au plus, nous remarquerons ici que le

(10) Nous avons ici un rapprochement avec l'écriture considérée comme un "programme de calcul", au travers de la théorie des "λ-expressions" qui prolonge les travaux de Frege.

sens n'est pas défini dans l'absolu, *a priori*, mais qu'il est – entre autres choses – relatif au *projet* de celui qui fait les calculs. On retrouve ici la question "pourquoi" dans le sens de "pour quoi faire". Le sens est ainsi la composante pragmatique (*i.e.* liée au contexte) de la signification. De ce point de vue (et de ce point de vue seulement) rares sont les élèves qui ne donnent pas *un* sens ("Sinn"), au moins pragmatique, aux écritures qu'ils manipulent. La mise en œuvre de cette composante pragmatique a été bien étudiée par tous ceux qui ont travaillé sur les transformations, voir par exemple Paolo Boero (1994), également les travaux sur APLUSIX (11) ces derniers au niveau des tactiques et des stratégies. De son côté, l'équipe "ABC" (12) a repris cette dimension au sein de la notion de "frame", issue de l'Intelligence Artificielle. Dans cette perspective, la dénotation se situe dans un cadre donné ; un *frame* est un cadre de travail associé à une structure de données à l'intérieur duquel le sens et la dénotation appropriés des écritures sont activés par les élèves pour en donner des représentations stéréotypées mais adaptées au contexte de résolution (d'après Boero, 1994). Tout ceci permet de donner une dimension dynamique à une sémantique qui, si elle se limitait aux seuls aspects dénotationnels, resterait statique ; savoir que les transformations conservent la dénotation ne nous renseigne pas en effet sur les *choix* à effectuer pour déterminer quelles transformations faire à un moment donné. Vu le nombre des travaux (on pourrait également citer Vergnaud qui définit le sens en termes de *schèmes*), nous ne nous attarderons pas ici sur cet aspect des choses.

(11) Nicaud (1987, 1994), Gélis (1995), Nguyen Xuan (1993).
(12) Arzarello, Bazzini et Chiappini (1992).

Tout ce qui précède peut permettre, du moins nous l'espérons, de comprendre un petit peu mieux de quoi il s'agit quand on dit d'un élève qu'il donne (ou ne donne pas) du sens à une *écriture* qu'il manipule. En particulier, nous avons vu qu'il fallait se poser la question de savoir si l'on voulait parler de sens pragmatique (Sinn) ou de dénotation, car plusieurs cas de figure peuvent se présenter (sens ou non et dénotation ou non) qui correspondent à des comportements bien différents. Nous allons maintenant nous intéresser plus en détails aux problèmes proprement didactiques posés par la dénotation (ou plus précisément par son absence éventuelle).

II.3.4. Les orientation figées : le cas des "calculateurs aveugles"

Revenons maintenant aux élèves et à leurs difficultés, en particulier en rapport avec les trois orientations. On a vu que l'algèbre permet de transformer des expressions algébriques sans se référer *toujours* à leur signification, ce que Leibniz appelait le "calcul aveugle" (13). Mais cette force est aussi, de fait, l'origine de la principale difficulté à enseigner l'algèbre : certains élèves ne font *jamais* référence à une signification quelconque. Nous appellerons ce type particulier de comportement le "calcul à l'aveuglette", et les élèves qui le manifestent des "calculateurs aveugles".

Le problème que nous avons rencontré et qui, selon nous, est familier à quiconque veut enseigner l'algèbre, est que ces "calculateurs aveugles" ne se sentent pas concernés par tout ce que l'enseignant peut leur dire sur la signification des expressions

(13) Bell (1993), Boero (1993), Drouhard (1992), Kieran (1991).

qu'ils produisent. En général, lorsqu'ils se trompent en transformant une expression, la valeur de celle-ci n'est pas conservée. Quand le professeur le leur fait remarquer, ils font en substance une réponse du genre *"J'ai fait ce que j'ai pu, si ce n'est pas bon, je n'y peux rien!"*

Par exemple, beaucoup d'élèves produisent l'erreur classique :

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

dans ce cas, l'enseignant, qui tente d'avancer l'argument :

> si a est égal à 2 et b égal à 3, alors $(a + b)^2$ vaut 25 tandis que $a^2 + b^2$ vaut 13,

n'est guère convaincant. Certains élèves répondent *"et alors ?"* car l'algèbre leur apparaît comme une affaire de *règles* (conformité). Peu leur importe que $(a + b)^2$ soit égal à 25 ou à 13 ou à n'importe quelle autre valeur : pour eux, la valeur des expressions n'est pas un critère *pertinent*.

On peut voir dans ce comportement un problème de *sens* algébrique (lié, selon les auteurs, plutôt à des situations de référence, des activités de modélisation ou des concepts sous-jacents) que les élèves n'auraient pas (bien) construit ou n'arriveraient pas à retrouver. Toutefois, nous pensons que ces différentes approches ne traitent pas de front le problème du comportement *"et alors ?"*.

D'une part en effet, les algébristes "experts" n'ont pas besoin de faire constamment appel à des situations de référence (de modélisation ou autres) à chaque étape du calcul. Cela signifie simplement que les experts (ceux qui ne répondent pas *"et alors ?"* lorsqu'on leur fait remarquer que leurs calculs ne "tombent pas juste") ont à leur disposition des moyens, pour évaluer leurs productions, que n'ont pas les calculateurs aveugles, et qui ne consistent pas à se ramener perpétuellement à des situations introductives (Margolinas, 1992). En d'autres termes, le sens des expressions ne réside pas uniquement dans les situations qu'elles peuvent décrire.

D'autre part, dans l'exemple précédent de $(a + b)^2$, ce qui fait difficulté pour les "calculateurs aveugles", c'est qu'en plus du *concept* de carré lui-même et de la *situation*, ils ont besoin de savoir que la *valeur* de ce carré doit rester la même pendant son développement (Cortés, 1994).

II.3.5. savoir et ignorer que les expressions dénotent

Nous soutenons qu'un élève doit savoir :

1. qu'une expression comme $y(2x + y)$ a une valeur numérique,
2. que cette valeur dépend des valeurs de x et de y,
3. que cette valeur n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques que cette expression peut subir, par exemple celle qui transforme $y(2x + y)$ en $2xy + y^2$.

C'est cela que nous appellerons "dire qu'un élève doit savoir que les expressions dénotent", même s'il ne peut pas le verbaliser sous cette forme. Autrement dit, il doit savoir que $y(2x + y)$ a une valeur et que cette valeur dépend de la valeur de x et de y. La notion de dénotation est une *clé de voûte* c'est elle qui fait la différence entre le pur *calcul symbolique* des ordinateurs et l'*algèbre* effectivement pratiquée.

Nous pensons donc que les "calculateurs aveugles" ignorent que les expressions dénotent. A plus forte raison, ils ne peuvent pas savoir que cette dénotation est conservée par les transformations (14). Or il est très difficile de discuter de cela avec eux. Quand le professeur n'est pas d'accord avec la transformation :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

parce qu'elle ne conserve pas la dénotation, ils pensent que c'est seulement parce que le professeur préfère une autre *règle* (de transformation) qui serait par exemple :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Même l'interprétation numérique proposée par le professeur n'est pas pertinente pour eux, s'ils ignorent que les transformations sont censées conserver la dénotation. Pour eux, les procédures étant différentes, les résultats le sont évidemment aussi. Que la même expression puisse à l'issue de deux transformation différentes, donner des valeurs différentes, ne leur apparaît pas comme une contradiction. Ils répondent en substance : *"Vous faites une transformation et j'en fais une autre. Les valeurs ne sont pas les mêmes ? C'est normal puisque nous n'avons pas fait la même chose !"* Pour qu'une contradiction puisse leur apparaître, il leur faudrait la dénotation.

Les "calculateurs aveugles" ne savent pas que les expressions dénotent, et leurs professeurs peuvent ne pas savoir que les "calculateurs aveugles" ne le savent pas.

(14) "Le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques dans l'expression, d'autre part" (Chevallard 1989).

C'est un malentendu complet, et qui peut durer longtemps, car chacun interprète le discours de l'autre à sa manière. Or les deux interprétations ("formelle" et "dénotationnelle") sont également cohérentes, et pour cause, puisque le langage algébrique a précisément été construit, au long de son histoire, pour que le respect des règles formelles assure la validité des réponses en termes de dénotation. La question qui se pose alors est : comment briser ce malentendu ou, en d'autres termes, comment faire prendre conscience aux interlocuteurs que, tout en employant les mêmes mots, ils ne parlent pas en fait de la même chose ? Nous allons voir maintenant que certains entretiens, que nous avons qualifiés d'"entretiens Faire Faux" peuvent permettre de sortir de ces dialogues de sourds.

II.4. Techniques d'entretien

II.4.1. L'entretien d'explicitation

Nous avons cherché au GECO des *techniques d'entretien* pour *produire des observables* autres que les gestes (observés ou filmés) ou les traces écrites (brouillons, devoirs) et pour *obtenir des informations issues du sujet.*

De notoriété "professionnelle", il est difficile pour un professeur de mathématiques d'entendre la parole d'un élève sans chercher immédiatement à l'interpréter et il lui est tout aussi difficile de lire des réponses écrites sans imaginer aussitôt un cheminement mental qui pourrait amener à produire cette réponse. La première réaction pour savoir si l'interprétation imaginée est la bonne est évidemment de le demander à l'élève, mais le questionnement en "pourquoi", spontané pour le professeur, amène des rationalisations après coup, des jugements, des justifications. De plus, l'élève peut-il toujours répondre, sait-il toujours comment il a fait ? D'ailleurs savons-nous nous-mêmes répondre ? Il apparaît donc ici la nécessité d'une médiation pour aider l'élève à découvrir le fonctionnement de sa propre pensée et pour l'accompagner dans la mise en mots de la description de cette expérience. Il nous faut donc disposer d'une pratique, c'est-à-dire de techniques particulières. Nous utilisons des techniques empruntées à l'entretien d'explicitation tel qu'il a été développé par Pierre Vermersch [15].

Le questionnement se mène avec l'accord du sujet et est centré sur son action. Ces techniques nous permettent, quand nous les utilisons au GECO, d'obtenir une réponse de l'élève pour lui-même, et non la réponse que donne l'élève parce qu'il pense que c'est celle qu'attend le professeur. Nous le questionnons, non pas pour savoir s'il sait, mais pour qu'il sache ce qu'il fait et comment il s'y prend pour le faire, et qu'il le verbalise pour nous dans un entretien de recherche. De plus, questionner les élèves en les accompagnant dans leur pensée permet de faire évoluer leurs connaissances réfléchies et préréfléchies [16] et les comportements associés ce qui est le but d'un entretien d'aide au changement. Les analyses des philosophes phénoménologues suggèrent que "nous sommes normalement non conscients de beaucoup de choses que nous faisons pourtant de façon adaptée" et que "dans toute action, même la plus abstraite... il y a une part de connaissances, de pensée privée, qui n'est pas formalisée et conscientisée" [17]. Nous pensons donc que le sujet est la seule personne capable de se donner et de nous donner des informations sur son activité mentale, à condition bien sûr de l'installer dans ce travail de *réfléchissement* du *vécu singulier* [18] qui lui permet de verbaliser ses connaissances en actes.

Ce questionnement d'explicitation nous permet de *recueillir des données dans les entretiens de recherche* pour vérifier certaines parties de notre travail théorique, ou de proposer une *aide au changement dans les entretiens de rattrapage*. Les entretiens de recherche sont préparés en fonction de nos buts de chercheurs, les entretiens d'aide au changement, eux, permettent de poser un diagnostic et de guider le sujet vers un changement d'orientation dans l'évolution ou la reconstruction de ses connaissances locales. C'est pourquoi notre méthodologie de recherche offre une place importante à ces techniques d'entretien qui sont contre-intuitives et transparentes dans les protocoles [19]. A la lecture chacun peut penser que ce mode de questionnement est spontané et naturel. Au GECO, nous sommes tous formés à leur utilisation qui vise un guidage du sujet dans la verbalisation de ses actions. La formation de l'apprenti questionneur, qui est expérientielle [20], comprend un travail sur ses présupposés, ses croyances et ses représentations. Le questionneur apprend à les mettre de côté et à laisser le sujet exprimer sa propre réalité. Nous recueillons les verbalisations du sujet dans une

(15) Vermersch (1994).
(16) Vermersch *op. cit.*
(17) Vermersch *op. cit.*
(18) Vermersch *op. cit.*
(19) La lecture d'un entretien ne permet pas à une personne non experte de prendre la mesure de toutes les techniques utilisées et des effets qu'elles produisent.
(20) Ce néologisme désigne le fait de faire l'expérience d'une activité et suppose un savoir faire qui s'acquiert en s'exerçant.

phase antérieure au travail d'interprétation du chercheur et/ou de l'enseignant. Dans tous les cas, ce qui guide l'entretien, ce sont les objectifs qui lui sont assignés, objectifs de recherche ou objectifs d'aide au changement.

II.4.2. L'entretien Faire Faux

Les entretiens que nous utilisons dans cet article sont des entretiens en cours de tâche, qui permettent de recueillir les verbalisations par le sujet de son activité et de le guider dans l'une ou l'autre des trois orientations. Ce sont des entretiens Faire Faux [21] ; l'idée de ces entretiens nous est venue de l'étude des thérapies par prescription du symptôme de Watzlawick : à un des ses patients qui affirme avoir une certaine attitude "parce qu'il ne peut pas faire autrement", c'est-à-dire parce que cette attitude ne dépend pas de sa volonté, Watzlavick [22] demande d'adopter cette attitude. De ce fait l'attitude cesse d'être non contrôlée et le patient commence à observer son comportement. Ainsi aux élèves qui nous demandent de l'aide sous prétexte qu'en algèbre ils font toujours faux, nous demandons de produire quelque chose de faux. Dans un premier temps, ceci a deux effets : d'une part l'élève doit trouver quelque chose dont il est sûr que c'est faux, ce qui l'oblige à s'interroger sur ses connaissances ; d'autre part en termes d'orientations nous le plaçons dans une situation nouvelle pour lui. Si l'élève est un calculateur aveugle qui produit des réponses en utilisant des règles de conformité, il a à sa disposition des règles pour écrire des choses qu'il croit être justes, mais comme il n'existe pas de règles de conformité pour écrire des choses toujours fausses (ou du moins, s'il en existe, il ne les a jamais apprises), il est tôt ou tard obligé de changer d'orientation. Nous constatons que très souvent la première réponse produite est une réponse qui modifie de façon formelle des règles de conformité connues par l'élève (changement d'un signe d'opération, d'un coefficient numérique...). Quand nous demandons ensuite à l'élève si ce qu'il a écrit est toujours faux il n'a d'autre solution pour répondre que de passer à un fonctionnement en compréhension ; c'est ce phénomène que nous allons maintenant étudier de plus près.

Nous avons commencé tous les entretiens présentés dans cet article de la même façon :

"Je vous demande d'écrire une égalité fausse pour $\frac{7x}{7+x} =$ "

L'élève propose quelque chose et nous lui demandons alors :

"Comment savez-vous que c'est faux ?"

Et dès que possible, nous posons la question :

"Est-ce que c'est toujours faux ?"

Le questionnement tel que nous le menons ne place le dialogue ni sur le plan de la compréhension : "tu n'as pas compris...", ni sur le plan de la conformité "ce n'est pas la bonne formule...", mais sur le plan de la réalité mathématique : "ça ne marche pas mathématiquement, c'est contradictoire sur le plan mathématique...". Nous en verrons dans les entretiens aux paragraphes IV et V différents exemples ; pour la clarté de l'exposé ici

(21) GECO (1994).

(22) Watzlawick, Beavin et Jackson (1972).

nous pouvons citer un exemple de réponse d'élève :

"$\frac{7+x}{7x}$ ce n'est pas égal à "$\frac{7x}{7x}$, parce que $\frac{7x}{7x}$ ça fait 1 et pour x égale 1, $\frac{7+x}{7x}$ ça fait $\frac{8}{7}$ et ça, c'est pas égal à 1."

Nous pensons qu'ici l'élève est confronté à la réalité mathématique qui est que les énoncés ne peuvent pas être contradictoires. Face à un élève qui travaille en conformité, l'entretien tente de lui renvoyer une preuve de la non-efficacité de sa démarche. C'est ce que nous voulons dire en écrivant que l'entretien joue sur la performance (*cf.* § II.3). L'entretien est un levier de "changement d'orientation" que nous proposons à l'élève. Il n'est pas certain qu'il s'en saisisse et d'autre part l'effet n'est pas immédiat ; certains élèves refusent d'entrer dans le jeu et peuvent continuer un certain temps à travailler en conformité. Pour ceux qui acceptent de faire face à la nécessité mathématique de la non contradiction nous observons tôt ou tard un changement d'orientation et par conséquent une évolution des connaissances locales.

Les entretiens ont presque toujours un effet rapide et direct sur le plan mathématique et pas seulement sur l'orientation privilégiée du travail de l'élève : la question "Est-ce que c'est toujours faux ?" amène à regarder les lettres comme des variables et (le plus souvent) à résoudre des équations ; nous pouvons alors observer la dénotation en acte.

Les entretiens Faire Faux sont une façon d'agir parmi d'autres. Pour certains élèves, ainsi que nous l'avons dit, il n'est pas possible d'entrer dans ce type d'entretien. Nous adoptons alors une autre stratégie qui consiste principalement, dans un premier temps à les aider à découvrir quel est leur rapport aux mathématiques et à expliciter ce qu'ils attendent du travail avec nous.

Notre stratégie en matière de conduite d'entretien est déterminée par des choix que nous pouvons résumer ainsi : d'une part opposer aux connaissances locales d'un élève des paradoxes et des voies d'attaque obliques plutôt que frontales, dont nous pensons qu'elles sont plus à même de l'inciter à abandonner la conformité (tout ceci se faisant de façon inconsciente pour lui bien sûr), d'autre part le laisser penser et l'accompagner pour qu'il apprenne à s'observer quand il pense et agit. Il peut alors, s'il le souhaite, continuer tout seul à se poser des questions et à aller vers une plus grande autonomie de pensée (mathématique).

III. ENTRETIEN AVEC VANESSA

III.1. Vanessa en classe

Vanessa a été élève pendant son année de seconde d'un des auteurs de l'article. Vanessa était une très bonne élève de collège. Elle a l'habitude de travailler et d'apprendre.

Elle arrive en seconde avec des connaissances plutôt solides en algèbre ; en jargon de professeur, on dirait "une bonne habileté de calcul". En début de seconde, elle est un peu en difficulté. Elle semble travailler beaucoup ; ses résultats sont moyens et elle paraît être lente à comprendre. Elle s'inquiète parce que "tout le monde comprend sauf moi". Pendant l'année, le travail à la maison est très bon, mais les devoirs surveillés n'arrivent pas à la hauteur de ce qu'elle fait chez elle (les notes sont autour de 12-13 pour une moyenne de classe de 10 et des notes qui peuvent aller à 17 et même au delà). Vanessa souhaite aller en première scientifique et ses résultats chiffrés le lui permettent, avec un doute dans l'esprit de son professeur.

Vanessa paraît toujours un peu en retard. Ses difficultés, relatives, en seconde après un très bon travail au collège, peuvent faire craindre que ses connaissances en algèbre soient essentiellement des connaissances conformes, à savoir une bonne panoplie de règles, qui bien rodées par un travail consciencieux ont de bons déclencheurs. C'est-à-dire que Vanessa sait bien trouver les indices qui permettent de savoir quelle règle il convient d'appliquer. Dans ces conditions, on peut se demander si elle tiendra le coup en 1reS. Sa lenteur peut s'expliquer par le fait qu'il lui faut mémoriser toutes les règles et leurs déclencheurs. Cela représente un gros travail de mémoire et beaucoup d'entraînement qui est encore possible en seconde mais qui devient de plus en plus difficile à faire s'il n'est pas associé à un travail de coordination et de mise en relation des connaissances locales. En quelque sorte, le catalogue devient trop gros à mémoriser et Vanessa pourrait en être réduite à "piocher" au hasard.

Voyons maintenant ce que nous apprend l'entretien réalisé avec Vanessa. L'entretien a été fait en fin d'année, par un autre auteur de cet article qui ne savait rien d'elle.

III.2. L'entretien avec VANESSA

III.2.1.

Ce qui frappe dans l'entretien c'est que Vanessa ne prend comme référent qu'elle même. Elle utilise des expressions comme "ça me paraît", "pour moi", "pour moi, je suis sûre", "je pense pas".

III.2.2.

On peut trouver des membres de phrases qui font penser à des actions en conformité, mais elles sont contredites par une auto-référence qui montre que Vanessa ne se résout pas à ne pas comprendre. Elle dit par exemple "je sais le faire mais si on doit se le représenter... j'ai du mal" à propos de la division par un nombre négatif. Sur cette question elle revient plusieurs fois en insistant qu'elle sait faire, qu'elle a appris mais qu'elle n'a pas compris. Mais elle le fait "parce que j'ai appris comme ça...", et puis "des moins par des moins, ça donne des plus, donc là dans une division c'est parce que, je sais pas pourquoi mais bon *(rires)*". Et quand le questionneur lui demande "vous ne savez pas pourquoi", elle lui répond "non, si vous savez dites-le moi".

III.2.3.

Après avoir affirmé qu'une équation a toujours une solution, elle amène d'elle-même la question de savoir s'il peut y avoir plusieurs solutions.

Q il y a toujours une solution et est-ce que, alors vous avez dit il y a toujours une solution
V non, y a des fois où il y a deux solutions
Q alors, tiens par exemple, dans quel cas il peut y avoir deux solutions ?

V quand c'est égal à, euh... quand il y a un x carré

Elle se met alors à travailler sur ce problème et elle y travaille seule. Elle a des connaissances :

V si x carré est égal à 3 vous avez deux solutions automatiquement, donc si on a un x carré qui est égal à un nombre
Q mm
V y a automatiquement deux solutions, y aura toujours racine carrée de x , enfin y aura toujours, enfin, je veux dire racine carrée de 3, oui, racine carrée de 3
Q je sais pas
V oui y aura racine carrée de 3 ou racine carrée de –3 non ou moins racine carrée de 3 je veux dire, moins racine carrée de 3

mais elle ne s'en contente pas, elle les reconstruit pour elle jusqu'à parvenir à une reformulation qui la satisfasse, même si ceci lui donne du tracas :

V voilà, on a x carré qui est égal à 9 ; bon, on cherche x donc on fait racine carrée de, bon on fait racine carrée de 9 donc x va être égal à racine carrée de 9, c'est égal à 3, ou x va être égal à moins racine carrée de 9, c'est égal à 3 aussi, donc il y a deux solutions, mais disons qu'en fait y en a qu'une parce que c'est la même, oh là là *(soupir)* ben en fait y a, oui y a deux solutions, oui y a deux solutions, y a qu'un résultat mais y a deux solutions, y a racine carrée de 9 et y a moins racine carré de 9 non oh non ! ça fait –3 c'est horrible ! oh mais je le sais je le sais mais bon, euh...

Elle conclut :

V si on prend 3 et qu'on l'élève au carré, ça va nous donner 9 et si on prend –3 et qu'on l'élève au carré, ça va aussi nous donner 9, donc dans ce cas-là il y a deux solutions, c'est sûr

Elle reformulera cette connaissance un moment plus tard :

V du moment que je mets un nombre, enfin que je mets deux nombres qui ont la même valeur absolue, au carré, ça va toujours me donner le même nombre

On voit donc que pendant environ onze minutes (montre en main), Vanessa travaille ce problème jusqu'à parvenir à quelque chose dont elle est sûre et qu'elle sait exprimer de plusieurs façons différentes.

Voici un autre exemple des difficultés qu'elle a à coordonner ses connaissances locales mais qu'elle essaie néanmoins de résoudre :

V bon déjà alors quand c'est deux rapports positifs, bon c'est sûr que si on multiplie un nombre par un nombre positif, ça va nous augmenter encore plus le nombre, donc il ne peut être que encore plus positif, enfin disons plus vers plus l'infini
Q mm mm
V sauf si *(rires)* sauf si c'est inférieur à 1, mais bon *(rires)*
Q ah bon, parce que quand c'est inférieur à 1, ça
V bon ben, quand c'est inférieur à 1 euh, ça donne un nombre qui est inférieur à, enfin *(gros soupir)* c'est compliqué dis donc, si on fait un demi multiplié par 1
Q mm
V ça va pas nous donner un nombre qui est supérieur à 1

Pour résoudre ses difficultés, elle sait faire appel à de multiples connaissances locales : la règle des signes de la multiplication, la valeur absolue, le signe d'un carré, la notion de solution d'une équation, l'invariance de la dénotation d'une lettre ("c'est toujours le même x", dit-elle) qu'elle coordonne quelquefois difficilement, mais elle y parvient. Pas une fois dans l'entretien elle n'arrête son travail sur une formule typique de la conformité "parce que j'ai appris comme çà", "on me l'a dit", "j'ai toujours fait comme çà".

III.2.4.

Vanessa est consciente qu'il existe en mathématique un certain type de nécessité. Cela illustre ce que nous appelons "la réalité" conceptuelle. Pour elle, dire que $\frac{x}{x}$ est égal à 13, c'est incohérent. Ceci est la conclusion d'explications sur le fait que $\frac{x}{x}$ est égal à 1 quel que soit x.

Q ce que vous voulez dire c'est que n'importe quel nombre divisé par n'importe quel nombre ça va toujours donner 1 (dans le contexte il est clair qu'il s'agit de x/x)
V sauf 0

De même, elle explique la procédure de résolution des équations en précisant que "je peux pas rajouter 3 ici si j'en ai envie" et que "il faut toujours que l'égalité soit juste". Ainsi si elle sait que certaines choses ne sont pas possibles, ce n'est pas parce que des règles l'interdisent mais parce qu'il y a une explication même si elle ne la connaît pas.

A propos de la règle des signes de la multiplication :

V enfin il y a sûrement, enfin je pense que, si je réfléchis bien bien bien longtemps au problème, je trouverai pourquoi, peut-être, je sais pas
Q vous pensez qu'il y a une raison
V oui, c'est sûr qu'il y a une raison, ça c'est sûr qu'il y a une raison ! *(rires)* j'ai oublié la raison mais c'est sûr qu'elle existe

III.3. Conclusions

L'étude précise de l'entretien avec Vanessa nous apporte quelques enseignements :

On peut avoir des connaissances construites en conformité dont on sait qu'elles ont été construites ainsi et néanmoins travailler avec elles en compréhension. C'est une étape importante et quasiment obligée de construction de l'algèbre par un individu. On construit les nouvelles connaissances en compréhension en coordonnant des connaissances déjà construites pour l'usage desquelles la conformité suffit.

D'autre part, l'entretien avec Vanessa nous permet de poser un diagnostic sur ses connaissances et sa façon de travailler. Vanessa a de bonnes connaissances locales, bien solides (ce que son professeur avait déjà identifié). Elle sait les coordonner même si c'est parfois difficile. Il est sûr qu'elle n'accepte pas de ne pas comprendre. Pour en revenir à la phrase qu'elle avait prononcée en début d'année "tout le monde comprend sauf moi", nous serions tentés de dire que dans cette classe "presque tout le monde accepte de ne pas comprendre sauf Vanessa".

IV. ENTRETIENS AVEC LESLIE

IV.1. Description des trois entretiens

Avec Leslie, nous avons mené trois entretiens successifs. Le premier a commencé selon le Faire Faux, le deuxième et le troisième ont été préparés à partir de la transcription et de l'analyse des précédents.

IV.1.1. Premier entretien

A partir de $\frac{7x}{7+x}$, Leslie écrit :

$$\frac{7x}{7+x}=\frac{7x}{7x}$$

ce qui pour elle est faux, d'une part parce qu'on a changé un signe d'opération, d'autre part parce que $\frac{7x}{7x}$ vaut 1 et $\frac{7x}{7+x}$ ne vaut pas 1. Cette dernière affirmation est justifiée à l'aide des deux valeurs $x = 1$, $x = 2$, pour lesquelles on trouve respectivement $\frac{7}{8}$ et $\frac{14}{9}$ qui sont tous deux différents de 1.

En essayant de répondre à la question "est-ce toujours faux" Leslie se trouve très rapidement en situation de conflit interne entre deux connaissances locales :

1) quand on change une opération en une autre dans une expression algébrique, l'expression change, c'est à dire que ses valeurs numériques pour des valeurs numériques de x sont différentes. C'est l'aspect formel de l'expression qui change, et cela suffit à la changer. Nous pouvons tout de même remarquer ici que Leslie possède une idée de la dénotation qu'elle utilise dans les vérifications avec des valeurs particulières de x.

2) un signe " = " entre deux expressions algébriques contenant la lettre x signifie qu'on est en présence d'une équation et que "normalement" des calculs permettent de trouver x.

L'apparition de la première de ces connaissances locales est une réponse en conformité à l'injonction paradoxale du Faire Faux. L'élève connaît une règle ; pour écrire quelque chose de faux, il la modifie d'une façon ou d'une autre et toujours formellement si l'élève est en conformité.

La conduite de l'entretien ne permettant pas à l'élève de travailler en conformité, il évolue vers un travail en compréhension ou en performance. Il est amené à utiliser d'autres connaissances locales que la première à laquelle il a fait appel. Dans le cas de Leslie ces connaissances entrent en conflit. Ce n'est pas toujours le cas ; certains élèves font alors appel à des connaissances locales qui permettent de dire que c'est toujours faux (ceci est très rare en début d'entretien) soit que ce n'est pas toujours faux et ils proposent alors autre chose.

Chez Leslie le conflit est flagrant dans ses propos :

P1 : "il faudrait avoir $7x = 7 + x$ et ça, on sait que ce n'est pas vrai"
P2 : "normalement, si on continue, on doit pouvoir trouver x"

Ces deux types de phrase sont repérés à plusieurs reprises dans l'entretien. Elle parle d'équation et de "trouver x" mais on peut constater qu'elle n'y parvient pas. Elle perd ses outils de conformité qui auraient dû lui permettre de résoudre l'équation

$$7x = 7 + x$$

(Leslie est en fin de seconde, elle est moyenne en mathématiques – au sens scolaire du terme – et on peut donc penser qu'elle sait le faire. D'ailleurs nous l'avons vérifié dans le troisième entretien avec elle).

Notre hypothèse est que si Leslie ne peut résoudre cette équation c'est qu'un conflit très fort entre les deux connaissances locales citées plus haut l'en empêche. Nous ne savons pas encore ce qui, pour elle, est différent dans les deux expressions, et nous aurons un certain mal à le lui faire préciser dans le deuxième entretien.

A ce point de l'entretien, on peut penser à l'analyse que nous pourrions faire si nous avions Leslie dans notre classe. Pour savoir si $\frac{7x}{7+x}$ est ou non égal à 1, on résout l'équation et on conclut. Leslie ne le faisant pas, nous pourrions trouver son comportement illogique et juger que les calculs qu'elle essaie de faire ensuite mettent en évidence de grosses lacunes. Cependant, au GECO nous préferons dire que Leslie n'est pas illogique mais qu'elle est en contradiction avec elle même.

Dans la suite de cet entretien, Leslie ne parvient pas à sortir de cette contradiction : elle ne résout pas l'équation ; les calculs qu'elle tente la conduisent à un échec sur ce plan. Elle ne parvient pas non plus à affirmer que l'égalité écrite

$$\frac{7x}{7+x} = 1$$

est toujours fausse. Leslie vérifie à nouveau à la fin de l'entretien pour quelques valeurs simples de x mais sa voix est incertaine quand elle dit c'est "toujours faux". Plusieurs indices non verbaux nous permettent de penser qu'elle n'est pas sûre du "toujours".

À travers les nombreux calculs qu'elle fait pour essayer de résoudre cette équation, nous parvenons à mettre en évidence quelques connaissances locales très stables :

- $\frac{a}{a} = 1$
- quand on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on peut faire un produit en croix et $ad = bc$.
- on ne peut pas mettre 0 en dénominateur.

Pour justifier cette dernière connaissance, Leslie a deux explications dont l'une illustre très bien la construction en conformité : "on ne peut pas mettre 0 en dénominateur parce que, en classe, quand il y a des tableaux de signes avec des quotients, on cherche la valeur interdite et on met une double barre". L'autre explication est mathématiquement valable, ce qui n'est pas une preuve de sa construction dans une autre orientation que la conformité : "on ne peut pas diviser par 0 parce qu'on ne peut pas avoir $\frac{3}{0}$ égale quelque chose. En effet si on faisait le produit en croix on aurait $0 \times a = 3$, et $0 \times a$ cela fait toujours 0").

Cet entretien a deux effets :

1) on peut faire un diagnostic sur la façon dont Leslie travaille les mathématiques, et on peut alors envisager une aide au changement.

2) il casse les outils de conformité, ce qui est un préalable à tout changement.

Le diagnostic et l'aide au changement seront discutés dans les parties IV-2 et IV-3.

IV.1.2. Deuxième entretien

Le deuxième entretien a lieu douze jours plus tard. Leslie se replace dans la situation sur laquelle nous avions travaillé la première fois. On retrouve l'affirmation de la différence formelle entre "$7x$" et "$7 + x$".

Citons :

Le ...fallait savoir si vraiment $\frac{7x}{7+x}$ était vraiment égal à 1
Q alors qu'est-ce-que vous pensez de ça ?
Le non, on sait que c'est différent...
Q quand vous dites, "c'est différent", c'est quoi qui est différent ?
Le là, on a un "+" et à l'autre... on a un signe "×", ce qui fait que, une addition et une multiplication c'est différent.

Un peu plus loin, nous retrouvons la justification déjà entendue :

Q quand on remplace un "+" par un "×"
Le là avec 0, on aura toujours $7 + 0$ ça fera 7, et 7×0 ça fera 0.

Nous nous préoccupons alors de savoir s'il peut se faire qu'une addition quelconque et une multiplication quelconque donnent le même résultat. Leslie trouve que c'est possible pour "$3 + x$" et "$4x$" avec $x = 1$ et réaffirme avec force que si le nombre est le même et le x est le même ("$4 + x$" et "$4x$" comme "$7 + x$" et "$7x$") les résultats diffèrent, ce qu'elle "démontre" (c'est son mot) avec x égal à 0 et x égal à 1. Nous observons à quel point cette connaissance locale de nature formelle est forte et stable.

Il s'agit maintenant d'ébranler cette connaissance locale. Nous prenons appui sur le résultat $3 + x = 4x$ si $x = 1$, sans le dire mais en demandant à Leslie de produire quelque chose de faux pour $\frac{3+x}{4x}$. Fidèle à sa connaissance locale elle modifie "$3 + x$" en "$3x$", mais tout de suite la certitude est ébranlée.

Le quelque chose qui est faux euh... mais si là je mets 3, $3x$, si on prend,
Q alors vous mettez $3x$, vous mettez $\frac{3x}{4x}$ parce que vous dites
Le que on pourrait... je sais pas si... et là, je veux dire cette opération $\frac{3+x}{4x}$ = opération $\frac{3x}{4x}$ elle peut être juste...

Leslie essaye avec différentes valeurs de x, et réaffirme que si on change le signe de l'opération ("on pourrait mettre un " – "") on voit tout de suite que c'est différent. Nous l'interrogeons alors sur le rôle des valeurs de x qu'elle remplace dans les expressions :

Q bon alors ça, on le voit tout de suite... ce que vous faites quand vous prenez des valeurs de x, ça vous sert à quoi ?
Le on nous donne une égalité et on ne sait pas si elle est fausse ou pas... et on va essayer de trouver le x de $3 + x$ divisé par $4x$... on va chercher le x de cette opération là, pour savoir si on le remplace dans $\frac{3x}{4x}$, qu'on puisse voir si

c'est égal à $\frac{3+x}{4x}$ ...

Q et on pourrait essayer de le faire ?

Il est intéressant de noter que Leslie crée une sorte de définition d'une équation. Cette définition correspond au problème avec lequel elle se bat depuis le premier entretien : *on ne sait pas si l'égalité est juste ou fausse.* D'autre part nous pouvons voir pointer un aspect de la dénotation qui n'était pas apparu jusqu'ici : *la valeur de vérité d'une expression suivant les valeurs données à x.* Leslie s'oriente alors vers la résolution d'équations qu'elle pose elle-même.

On voit très nettement dans l'entretien comment elle change de contexte et "oublie" la connaissance locale formelle sur la différence entre multiplication et addition pour retrouver petit à petit ses compétences en matière de résolution d'équation.

Elle résout $\frac{3+x}{4x} = 0$ puis $\frac{3+x}{4x} = 1$ puis $\frac{7x}{7+x} = 1$ et parvient à la solution $x = \frac{7}{6}$. Elle affirme alors une nouvelle connaissance locale :

— les solutions de différentes équations sont différentes :

"on peut trouver pour chaque équation des nombres différents"

— une équation a une seule solution et en a toujours une :

"c'est égal à 1 quand x vaut $\frac{7}{6}$ et pour tout nombre différent de $\frac{7}{6}$ c'est différent de 1"

IV.1.3. Troisième entretien

Le troisième entretien a lieu quelques jours après la rentrée en septembre. Nous commençons par tester les compétences de Leslie sur la résolution des équations :

$2x + 1 = 5$

et

$x + 2 = 7x$

La résolution est rapide et sûre. Elle vérifie spontanément que la solution obtenue est exacte, et explique les calculs numériques avec assurance et sans demande de notre part.

Le "x" c'est le "x" qui allait dans "$x + 2 = 7x$" ;

Le on ne sait pas quel est le x qui nous permettra de trouver $x + 2 = 7x$, alors on est obligé d'extraire le x...

Q et on en trouve un ?

Le on en trouve un

Q on en trouve toujours un

Le là on en trouve un, parce que les autres peuvent donner une égalité fausse. De ce fait, on ne peut pas dire que $x + 2 = 7x$ est faux si on n'a pas trouvé le x qui... j'arrive pas à m'exprimer... il faut en fait, pour dire qu'une équation est fausse, savoir s'il y a aucun x qui va avec cette équation... il faut d'abord trouver s'il y a un x ou plusieurs qui pourraient aller dans cette équation ; on a une réponse $x = \frac{1}{3}$. L'équation est juste pour $x = \frac{1}{3}$ et l'équation est fausse pour toutes les autres.

Elle confirme qu'il y a toujours une solution (au moins). L'entretien continue avec une question Faire Faux à propos de :

$$\frac{5a+3}{a+1}=\ldots$$

Le on peut mettre n'importe quoi mais on trouvera toujours en fait une réponse qui pourra nous permettre, peut-être si on exprime... si tout se passe bien

Nous observons ici que Leslie a construit au cours du deuxième entretien une connaissance locale qui, bien qu'étant nouvelle pour elle à ce moment-là, a acquis une très grande stabilité : toute équation possède une solution. L'entretien se développe à la suite de l'écriture :

$$\frac{5a+3}{a+1}=\frac{a+1}{5a+3}$$

que Leslie cherche donc à résoudre avec a comme inconnue.

Le Si on arrive à trouver a...

Cet entretien fait émerger des nouvelles connaissances locales qui n'avaient pas encore été exprimées et sur lesquelles un travail important serait nécessaire. Nous ne souhaitons pas en traiter ici. Nous préférons comparer les entretiens sur le plan de la maîtrise par Leslie de son activité mathématique. Leslie n'est pas devenue experte en calcul algébrique et les erreurs restent nombreuses. Cependant nous constatons un certain nombre de changements.

1) Lors des deux premiers entretiens, l'élocution de Leslie était très incertaine et embrouillée. Les confusions de termes étaient nombreuses : "inéquation" pour "équation", "$7 + x$" énoncé "$7x + 1$" puis rectifié en "$7 + x$"... Il y avait de nombreuses hésitations, des mots répétés, des phrases incomplètes recommencées deux ou trois fois, etc. Dans le troisième entretien, Leslie est beaucoup plus sûre d'elle, elle bafouille moins.

2) Nous remarquons qu'elle justifie spontanément plusieurs des énoncés mathématiques qu'elle donne, que ce soit la vérification de la valeur de la solution d'une équation comme nous l'avons dit ou la formule

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

La justification est parfois inexacte – ainsi l'énoncé *"un carré est toujours positif"* est justifié par la présence du signe "+" devant "b^2" dans la formule

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Il n'empêche qu'elle éprouve le besoin de s'assurer de la cohérence, pour elle, de ses connaissances.

3) Leslie semble avoir pris du recul par rapport à ses différentes activités mathématiques. La fin de l'entretien porte sur l'équation :

$$24a^2 = -8.$$

Après beaucoup d'hésitations (qui mériteraient d'autres entretiens) nous parvenons à la conclusion que cette équation n'a pas de solution.

Quand nous demandons à Leslie ce que lui ont appris ces trois entretiens, elle remarque qu'elle sait désormais qu'il faut se méfier des conclusions générales et qu'il existe des équations sans solution. Elle cite

"$0 . x = 9$" rencontrée le matin même en cours de mathématiques. Le fait qu'elle n'ait pas trouvé ce lien au début de l'entretien sera discuté dans la partie IV.2 lorsque nous parlerons du diagnostic. Ce que nous pouvons affirmer ici c'est que les deux premiers entretiens ont suffi pour que Leslie acquière un début de démarche réflexive sur son activité mathématique.

IV.2. Le Diagnostic

Nous étudions maintenant ce que les trois entretiens avec Leslie permettent de dire quant à ses connaissances et son mode de fonctionnement sur le plan mathématique. Soulignons d'abord que Leslie "aime les maths" et que c'est une matière dans laquelle elle a une certaine réussite scolaire.

IV.2.1. Les connaissances locales

Leslie a des connaissances locales très stables et peu coordonnées. C'est une élève sérieuse qui "apprend bien ses leçons" et retient assez facilement les méthodes. Elle possède une grande liste de connaissances locales qui sont activées si on pose clairement le contexte du travail. Quand il s'agit de résoudre une équation (début du troisième entretien) Leslie sait ce qu'elle doit faire, ce que veut dire résoudre et comment on peut s'assurer qu'on l'a fait.

Revenons sur ses connaissances locales concernant un carré ; celles-ci nous paraissent intéressantes comme exemple typique de ce que nous voulons dire en disant qu'une connaissance locale est cohérente pour le sujet. A l'intérieur de leurs limites les trois connaissances locales de Leslie :

– un nombre positif est précédé d'un signe "+"

– un carré est positif

– $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ne mettent en évidence, pour elle, aucune contradiction. Leslie ne travaille pas, *a priori*, en compréhension. Si nous devions essayer d'agir sur la connaissance : "un nombre positif est précédé d'un signe "+"", les points d'attaque seraient faciles à trouver, à commencer par exemple par :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Sachant que Leslie a de bonnes connaissances construites par conformité nous pouvons penser qu'elle connaît cette formule et sans doute sa justification, obtenue par distributivité. Il faudrait évidemment essayer de travailler en l'obligeant à se mettre en contradiction, dans une contradiction qui ne soit pas seulement de nature formelle.

IV.2.2. Le déplacement dans les connaissances locales

Leslie fait preuve de peu de souplesse dans l'utilisation des connaissances locales. Ceci est visible tout au long des trois entretiens. Dans le premier, elle est dans la confusion à cause de l'injonction Faire Faux et se trouve face à deux connaissances locales contradictoires. Au début du deuxième entretien elle est dans la connaissance locale formelle de différence entre addition et multiplication puis bascule. C'est alors la connaissance locale sur les équations qui s'impose. Il est remarquable que d'une part la contradiction soit complètement occultée et que d'autre part Leslie installe et "ferme" sa connaissance locale sur les équations de façon aussi catégorique. Pour elle, il existe toujours une et une seule solution.

Nous avons indiqué dans l'analyse du troisième entretien que Leslie ne rapproche pas avant la fin de l'entretien l'exercice vu en cours (0 . x = 9) de la question de la non-existence de solution pour certaines équations qui lui est posée dès le début. Ceci ne doit pas nous surprendre compte tenu de ce que nous savons de son fonctionnement. En lui demandant au début de l'entretien, de résoudre deux équations du premier degré, nous l'avons placée dans ce contexte où toute équation possède une solution unique. Il n'y a rien d'autre de disponible pour elle à ce moment-là. Ce n'est que lorsque cette connaissance sera cassée qu'elle pourra aller chercher une autre expérience personnelle et réorganiser partiellement ses connaissances en la prenant en compte.

En tentant une image, nous pouvons penser que les connaissances locales de Leslie sont des blocs solides isolés d'où il lui est difficile de sortir. Elle saute de l'un à l'autre et se dépêche de consolider son assise dès qu'elle le peut. Il n'y a pas de pont, ce qui explique la grande confusion dans laquelle elle se trouve lors du premier entretien. Dans le deuxième, elle passe à un moment d'une connaissance locale à une autre sans établir du tout de lien entre les deux.

IV.3. L'aide au changement

IV.3.1. L'entretien

Les entretiens eux-mêmes, ont été une aide au changement, même s'ils n'ont pas été conçus spécifiquement pour cela. Nous avons déjà indiqué comment Leslie a amélioré ses capacités à conduire l'entretien elle-même et avec calme entre les deux premiers entretiens et le troisième. Elle a commencé à apprendre à se poser des questions sur les mathématiques.

Elle était volontaire pour ce travail et a toujours été enthousiaste à l'idée de nous rencontrer, ses hésitations du premier entretien n'étaient pas dues à l'anxiété, d'autant moins que l'année scolaire était terminée à ce moment-là. La maîtrise de son activité mathématique s'est beaucoup améliorée entre le deuxième et le troisième entretien. On constate que le questionneur intervient beaucoup moins souvent dans le dernier entretien que dans les précédents.

IV.3.2. Les connaissances locales

Les entretiens menés avec Leslie n'avaient pas pour but de corriger des connaissances locales aux limites trop petites. Nous pouvons néanmoins indiquer quelques pistes qui permettraient de faire ce travail.

Certaines des connaissances locales de Leslie ont été très clairement identifiées ; nous en avons évoqué un certain nombre lors de la description des entretiens ; il est inutile d'y revenir. Dans le cadre d'un suivi de rééducation mathématique, il conviendrait évidemment de travailler sur ces connaissances en jouant comme nous l'avons brièvement évoqué sur les possibilités de conflit interne qu'elles peuvent susciter, mais aussi de travailler à lui faire acquérir une certaine mobilité dans leur mise en jeu.

IV.3.3. Les orientations

Leslie travaille principalement en conformité : "on sait les choses parce qu'on les a apprises". Nous pensons que même les justifications qu'elle donne d'un certain nombre de règles sont vraisemblablement des justifications construites en conformité. Le fait de donner des justifications spontanées à des règles de calcul n'indique pas nécessairement un travail en compréhension. Il s'agit peut-être là, tout simplement, d'un effet de contrat dû aux questions posées lors des premiers entretiens.

On peut se poser la question de l'intérêt à modifier l'orientation du travail de Leslie. En ce qui concerne la connaissance évoquée rapidement plus haut sur le signe du carré et sa matérialisation par l'impossibilité d'un signe "–" devant un carré, il nous paraît impossible d'éviter un travail en compréhension à la fois sur le carré, sur l'identité remarquable $(a - b)(a + b)$ et sur les équations sans solutions. Leslie connaît les identités remarquables ; lui faire remarquer qu'il peut y avoir un signe "–" devant un carré est inutile car elle le sait, mais cela n'entre pas en contradiction avec le reste. Elle paraît incapable de faire seule les liens entre ses connaissances.

L'entretien est un outil puissant pour l'obliger à mettre en jeu des connaissances locales contradictoires, mais il n'est qu'un outil. Cela ne peut pas être fait sans réflexion de notre part. Un travail, avec elle, sur cette question ne peut être entrepris qu'après une étude sur le rôle que jouent ces connaissances en mathématiques, sur les formes qu'elles prennent dans différents cadres (graphique, fonctionnel, numérique...), bref après un travail de mathématicien.

V. CONCLUSION

V.1

L'entretien Faire Faux n'est pas, bien sûr, un outil magique et universel. Pour qu'il soit efficace, il faut que le sujet soit suffisamment proche du sujet que nous modélisons dans notre travail théorique. Le pur calculateur aveugle n'existe pas dans nos classes [(23)] ! Il ne s'agit donc pas de faire entrer de force tous nos sujets dans ce modèle, mais de repérer, dès le début de l'entretien, la pertinence de nos outils théoriques et méthodologiques pour comprendre le fonctionnement de ce sujet singulier et de décider, dès cette prise d'information, de choisir éventuellement un autre embranchement dans l'entretien. Cette notion d'embranchement est fondamentale dans la conduite des entretiens. Nous accueillons la pensée de l'élève, nous l'accompagnons mais les relances du questionneur dépendent des réponses de l'élève. Notre fil directeur est d'amener un élève à "contacter" sa pensée, c'est-à-dire à avoir une attitude réflexive sur son activité mathématique.

Quand l'entretien est un entretien de recherche, nous passons un contrat avec l'élève qui est d'accord pour nous aider dans notre travail. C'est le cas des entretiens Leslie et Vanessa, qui ont été faits dans la perspective de cet article. Comme il n'existe pas d'entretien neutre, nous savons que nous induisons un changement

(23) C'est un "type idéal" au sens de Rouche (1995).

et nous accompagnons ce changement par un post-entretien où l'élève peut nous poser des questions, où nous reprenons notre casquette de professeur de mathématiques et où nous remettons les choses en place pour lui, s'il le juge nécessaire.

Si l'entretien est un entretien d'aide au changement, le contrat passé avec l'élève est différent. Cette personne est venue nous demander une aide pour mieux comprendre les mathématiques et nous mettons alors notre travail de recherche et nos compétences d'enseignant à sa disposition pour répondre à cette demande. Il serait trop long d'expliquer comment nous régulons l'échange, mais notre règle est la suivante : c'est la pensée de l'élève, donc l'élève qui guide son entretien, mais c'est nous qui régulons l'échange en fonction du but poursuivi. Notre technique d'entretien nous permet toujours de revenir en arrière et de reprendre, dans un entretien ultérieur, un autre embranchement pour explorer une autre voie. Pour donner un exemple, c'est ce que nous avons fait dans le troisième entretien avec Leslie. Nous voulions vérifier qu'en situation “normale”, en dehors d'un entretien Faire Faux qui bloque volontairement certains automatismes, Leslie pouvait aisément résoudre une équation du premier degré. Nous avions besoin de cette information pour évaluer correctement ses réactions et sa confusion au cours des deux entretiens précédents. Nous sommes revenus en arrière et nous avons proposé à Leslie de résoudre des équations du premier degré, ce qu'elle a fait sans difficulté en dehors du contexte Faire Faux.

Pour ces entretiens d'aide au changement, il peut arriver que le désarroi de l'élève devant ses difficultés soit trop important ou que sa résistance au changement soit trop forte. Alors nous choisissons de travailler avec l'élève sur son désarroi ou sa résistance et nous pouvons même être amenés à faire un travail sur ses “croyances limitantes”, pour opérer un “recadrage” et pour pouvoir ensuite commencer le travail mathématique.

Quand nous pensons qu'il est possible de faire un entretien Faire Faux avec un élève, nous choisissons de lancer ce type de travail. Comme nous suivons la pensée de l'élève, comme nous l'aidons à être attentif à sa propre pensée, c'est l'élève qui guide son entretien et nous observons ainsi des différences notables d'un entretien à l'autre. Les élèves qui acceptent la règle du jeu du Faire Faux commencent presque tous par une transformation formelle de l'écriture algébrique proposée en changeant un signe d'opération. Ils sont sur l'orientation de conformité, puis après la question “Est-ce que c'est toujours faux ?”, les réponses divergent et la suite de l'entretien prend des allures différentes. Les problèmes que se posent alors les élèves et qu'ils résolvent sont très différents d'un élève à l'autre et sont toujours très instructifs, autant pour eux que pour nous. Ce mode de travail leur permet d'expérimenter sur leurs propres idées, bref de faire ce que nous, professeurs de mathématiques demandons souvent à nos élèves de faire : “prenez donc un peu le temps de réfléchir à ce que vous faites !”

V.2.

Cette approche de la pensée privée d'un élève pendant la résolution d'un problème d'algèbre nous amène à affirmer fortement que l'algèbre est une discipline difficile à enseigner et que son apprentissage est, lui aussi, difficile. L'algèbre élémentaire est réputée facile, elle est présentée comme une partie des mathématiques où l'on ne raisonne pas, où l'on ne fait qu'appliquer des règles. Elle est ainsi opposée à la géométrie et à l'analyse. Dans les programmes de l'enseignement secondaire, l'algèbre est gommée, le mot lui-même disparaît, remplacé par l'expression *calcul littéral*. L'algèbre perd sa dignité d'objet enseigné, n'est plus reconnue comme discipline à part entière. L'importance qu'on lui accorde, dès lors, diminue, et ceci d'autant plus qu'on assimile facilement algèbre et calcul formel.

Or, l'algèbre élémentaire est victime d'un malentendu ! Comment peut-on affirmer qu'en algèbre on ne raisonne pas ? C'est confondre "raisonner" et "faire des phrases", et même "écrire des phrases" [24]. On n'explique pas plus souvent à l'écrit qu'à l'oral comment sont choisies les différentes transformations des écritures algébriques. Pourquoi transformer une somme en produit pour résoudre une équation ? Pourquoi se ramener à "écrire qu'un produit de facteurs est nul" ? Pourquoi met-on un trinôme sous forme canonique ? Et pourquoi, comme le dit Marc Legrand, "faut-il tordre la nature tout en la respectant", c'est-à-dire, pour l'algèbre, en conservant la dénotation des expressions algébriques ?

Les calculs algébriques sont souvent présentés comme s'ils se déroulaient tous seuls, de façon quasi inéluctable, alors que pour les raisonnements géométriques, on met en évidence un cheminement depuis le départ (les hypothèses) jusqu'à l'arrivée (la conclusion), avec les impasses, les boucles inutiles, les embranchements où l'on va devoir choisir un chemin. Chaque expression algébrique peut pourtant être transformée de plusieurs façons, entre lesquelles l'expert choisit rapidement selon son but, car il anticipe plusieurs étapes et connaît les avantages de chacune. L'élève attentif, lui, choisit celle qui est classique dans le type d'exercice proposé. Mais il n'est pas habituel d'insister sur les différents types de choix possibles, encore moins de les visualiser, comme c'est par exemple le cas dans le logiciel APLUSIX [25]. La relative simplicité des exercices proposés ("toute virtuosité est exclue" dit le programme) réduit considérablement cette nécessité de choisir. On a, du même coup, perdu les quelques exercices qui permettraient de faire des essais, de valider des choix, autrement dit de faire des mathématiques en faisant de l'algèbre. Certains éthologues définissent l'intelligence comme la faculté de "savoir reculer pour mieux sauter". L'algèbre serait-elle exclue du développement de l'intelligence ?

Certes, les professeurs expliquent les calculs algébriques, mais ces calculs deviennent vite très répétitifs et les élèves finissent par appliquer simplement en conformité des règles syntaxiques, ignorant la dénotation et la dimension compréhension, et perdant même la dimension performance, c'est-à-dire le but des transformations de l'écriture algébrique pour résoudre le problème mathématique posé.

Le travail que nous venons d'esquisser dans cet article nous amène à formuler deux principes pour l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

1) La réalité mathématique repose fonda-

(24) Chevallard (1989,1990).

(25) Nicaud (1987).

mentalement sur le principe de non-contradiction. Or les élèves se font moins mal quand ils rencontrent cette "réalité" que lorsqu'ils se cognent la tête sur un "vrai" mur de pierres. Pour beaucoup d'élèves, ce sont les notes, les professeurs ou les parents qui font mal, pas les mathématiques. Lorsque ces élèves posent des questions en classe, les réponses en termes d'argument d'autorité "on verra cela plus tard", "on n'a pas le droit de...", "il ne faut surtout pas..." leur évitent de rencontrer cette réalité et donc de rencontrer les mathématiques. En étant un peu schématiques, nous pouvons dire que le pur calculateur aveugle, celui qui ne travaillerait qu'en conformité, ne se ferait jamais mal à ses mathématiques. Il aurait seulement de mauvaises notes !

Cela nous amène au second principe :

2) Comprendre le pourquoi des règles est plus important que de connaître ces règles pour savoir les appliquer. Or souvent, on enseigne bien les règles, on enseigne bien l'explication de ces règles, mais on n'enseigne pas le fait qu'on peut savoir qu'on sait d'où vient la règle et que cette règle est nécessaire. Nous opposons donc l'idée que *les élèves doivent faire l'expérience de la nécessité des énoncés mathématiques et que le fruit de cette expérience est un savoir à acquérir "expérientiellement"* à l'idée que l'algèbre ne serait qu'un catalogue de règles à apprendre et à savoir appliquer suivant le bon vieux principe de "J'apprends, j'applique" et nous défendons cette idée.

Nous prétendons qu'il est facile pour un élève d'apprendre des règles, et qu'il lui est relativement facile d'apprendre à les retrouver. Mais si l'élève n'a pas intériorisé le fait qu'il peut lui-même retrouver les règles, s'il ne sait pas qu'il peut le faire, et que s'il le fait, il trouvera nécessairement la même chose que son professeur ou que son copain, il ne pourra pas contrôler son travail algébrique. Il apparaît que beaucoup d'élèves travaillent en conformité, ils émaillent leurs discours d'expressions telles que "on sait que", "on doit", "on ne doit pas", "je l'ai appris comme ça", "le prof l'a dit", ce qui indique que la règle du jeu mathématique n'est pas transmise, ou n'est pas reçue. Nous affirmons que les élèves devraient savoir qu'on n'apprend pas les mathématiques comme la liste des sous-préfectures ou comme la hauteur du Mont Blanc. Or, trop souvent, ce savoir expérientiel, celui qui m'apporte la conviction que je peux refaire le chemin que j'ai déjà fait, en vrai ou en pensée, n'est pas mobilisable, ou bien il est tout simplement inexistant.

Citons par exemple l'émerveillement d'un élève de seconde qui, ayant programmé sur sa calculatrice deux formes différentes d'une écriture algébrique, venait de découvrir que pour toutes les valeurs de x qu'il rentrait dans sa calculatrice, celle-ci lui restituait deux fois la même valeur. Il venait de découvrir la conservation de la dénotation dans un calcul algébrique ! Pour la plupart de nos élèves, les savoirs de l'algèbre sont formés de petits bouts de connaissances, parfois contradictoires, comme un archipel sans pont pour aller d'une île à l'autre, un archipel dont les îles seraient soumises à des lois différentes.

Les observables recueillies grâce aux entretiens et leur analyse, appuyée sur les outils théoriques présentés plus haut, permettent d'ouvrir un accès vers le mode de fonctionnement interne de l'élève pendant la réalisation d'une tâche, plus précisément ici la résolution d'un problème d'algèbre. Il serait donc bien agréable aux professeurs que nous sommes, quel que soit le niveau de notre enseignement, d'utiliser cette technique. Mais, nous l'avons vérifié nous-mêmes avec nos propres élèves, nous avons pu faire émerger dans les entretiens des observables jamais obtenues en classe. Plusieurs paramètres expliquent cela : le contrat n'est pas le même, le nombre d'élèves non plus.

Il est cependant possible, lors de séances de modules ou de soutien, de conduire de courts entretiens se rapprochant de ceux que nous avons présentés ici, et apportant quelques informations sur le fonctionnement de l'élève. Il est surtout possible "d'écouter autrement". Tout professeur convaincu, comme nous le sommes, qu'un élève ne dit jamais n'importe quoi, pourra essayer de ne pas interpréter les réponses, de demander à l'élève "ce qu'il a fait quand il a fait ce qu'il a fait comme il l'a fait", d'utiliser les erreurs produites pour montrer les contradictions, d'utiliser les conflits internes et les conflits socio-cognitifs, à condition bien sûr, de laisser les élèves s'exprimer en classe. Ce qui est important, c'est d'être conscient que nous ne savons pas à l'avance ce qui va émerger d'un entretien avec un élève, que ce n'est pas "n'importe quoi", même si c'est mathématiquement incorrect. Cette position modifie la grille d'observation de l'enseignant et lui évite d'être pris au dépourvu lors d'une séance de problème ouvert ou dans la conduite d'un débat scientifique en classe. Renvoyer l'élève à lui-même et à ses contradictions, et pas seulement à la connaissance mathématique conforme, facilite des changements d'orientation, dont nous avons montré qu'ils sont nécessaires à la réussite de toute activité mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO F., BAZZINI L. et CHIAPPINI GP. (1992) : "Intensional semantics as a tool to analyse algebraic thinking", *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, Vol 52 n°2, 105-126.

BELL A. (1993) : "Draft background paper", *in* R. Sutherland (Dir.) : *Algebraic Processes and the Role of Symbolism, Working Conference of the ESRC Seminar Group,* Institute of Education, Université de Londres.

BOERO P. (1993) : "About the 'Transformation' Function of the Algebraic Code", *in* R. Sutherland (Dir.) : *Algebraic Processes and the Role of Symbolism, Working Conference of the ESRC Seminar Group,* Institute of Education, Université de Londres.
— (1994 *in* 1995) : "Questioni sui temi di SFIDA", *in* J-Ph. Drouhard et M. Maurel (Dir.), *Actes de SFIDA 1-4, Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre* (pp. II.3-II.8). Nice : IUFM de Nice.

CHEVALLARD Y. (1989) : "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", deuxième partie, *Petit x,* n° 19, 43-72.
— (1990) : "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", troisième partie, *Petit x,* n°23, 5-38.

CORTÉS A. (1994) : "Modélisation cognitiviste : invariants opératoires dans la résolution des équations", *in* M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot : *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France,* Collection associée à *Recherches en Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

DROUHARD J.-Ph. (1992) : *Les Ecritures Symboliques de l'Algèbre élémentaire,* Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

DURAND-GUERRIER V. (1996) : "Place et rôle de la logique formelle dans la modélisation du raisonnement mathématique", *in Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques,* Noirfalise R. et Glorian-Perrin M.-J. éd, IREM de Clermont-Ferrand.

FREGE G. (1892, 1971) : *Ecrits logiques et Philosophiques,* Trad. Cl. Imbert, Paris, Seuil.

GECO (1994) : Vers un modèle de l'évolution des connaissances locales : théorie et techniques, *Les débats de Didactique des Mathématiques,* 145-155, La Pensée Sauvage, Grenoble.

GÉLIS J.-M. (1993 *in* 1995) "Éléments d'une théorie cognitive et computationnelle de l'algèbre", *in* J-Ph. Drouhard et M. Maurel (Dir.), *Actes de SFIDA 1-4, Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre* (pp. I.2-I.11). Nice : IUFM de Nice.

KIERAN C. (1991) : "A Procedural-Structural Perspective on Algebra Research", *in* F. Furinghetti (Dir.) : *Actes du congrès international PME XV,* (Assisi), Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, Italie.

MARGOLINAS Cl. (1992) : *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* Grenoble : La Pensée Sauvage.

NGUYEN XUAN A., NICAUD J-F., JOLY F. et GÉLIS J-M. (1993) : "Une méthode de diagnostic automatique des connaissances en algèbre pour un module de modélisation de l'élève", *in* M. Baron, R. Gras et J.-F. Nicaud (Dir.), *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur* (pp. 217-228). Paris, Eyrolles.

NICAUD J-F. (1987) : *APLUSIX un système expert de résolution pédagogique d'exercices d'algèbre*. Thèse de Doctorat. Orsay : Université Paris-Sud.

— (1994) : "Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX", *in* N. Balacheff et M. Viviet (Dir.) *Didactique et Intelligence Artificielle* (pp. 67-112). Grenoble : La Pensée Sauvage.

LÉONARD F. et SACKUR C. (1991) : "Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10/2-3, 205-240.

PIAGET J. (1987) : *Réussir et Comprendre,* Paris, PUF.

ROUCHE N. (1995) : "Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir, Une question de sens", *Bull. APMEP*, 397, 351-367.

VERMERSCH P. (1994) : *L'entretien d'explicitation,* Paris, ESF.

— (1993) : "Pensée privée et représentation pour l'action", *in* A.Weill, P. Rabardel, D. Dubois, (éditeurs), *Représentations pour l'action*, Octarés, Toulouse, p 209-232.

VYGOTSKI L.S. (1985) : *Pensée et Langage*, Paris, Editions Sociales.

WATZLAVICK P., HELMICK BEAVIN J. et JACKSON, DON D. (1967, 1972) : *Une logique de la communication* , Ed. du Seuil (Coll. "Points"), Paris.