
UN EXEMPLE DE GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE : LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE EN DIMENSION 2

Yves Colin de VERDIÈRE
Université Joseph Fourier
Grenoble I

Introduction

Notre but est la description d'un exemple de géométrie plane non-euclidienne, c'est-à-dire ne satisfaisant pas le *postulat d'Euclide* :

étant donné une droite D et un point A non situé sur cette droite, il passe par ce point une unique droite D' ne rencontrant pas D

Depuis les éléments d'Euclide (300 avant JC), de nombreuses tentatives ont été faites pour prouver le postulat d'Euclide, elles ont toutes avorté, et pour cause, au début du 19^e siècle, l'existence de géométries ne satisfaisant pas ce postulat a été prouvée indépendamment par Bolyai et Lobatchevsky. Gauss lui-même dit qu'il s'était persuadé de l'existence de telles géométries.

Ce que je vais décrire dans cette conférence est un des modèles de la géométrie hyperbolique en dimension 2 introduit par Poincaré et connu sous le nom de demi-plan de Poincaré. Ce modèle est interne à la géométrie euclidienne, en ce sens que les théorèmes qu'on y prouve peuvent être retraduits de façon purement euclidienne.

Autrement dit les droites, angles etc. de cette géométrie sont aussi des objets de la géométrie euclidienne.

Il y a d'autres modèles de cette géométrie hyperbolique de dimension 2 : on peut montrer qu'ils sont tous isomorphes (il y a entre chaque paire de modèle une bijection des ensembles de points qui préserve les droites, la distance, les angles, etc., toutes les notions intrinsèques de ces géométries).

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

La plupart des calculs sont plus simples dans ce modèle de Poincaré, mais on en trouvera d'autres utiles par exemple dans [BR].

Avant de continuer, je ne résiste pas à citer Poincaré ([PO] p. 67) :

Dès lors que doit-on penser de la question : "la géométrie euclidienne est-elle vraie ?"

Elle n'a aucun sens... Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode.

Je ne m'attarde pas plus sur les aspects historiques et philosophiques sur lesquels je suis incompetent, l'auditeur intéressé pourra lire avec plaisir le livre [PO], et aussi [GR].

1. Le demi-plan de Poincaré et son homogénéité

Dans le modèle de Poincaré, les points sont les points du demi-plan $y > 0$ de \mathbf{R}^2 , qu'on pourra identifier à une partie du plan complexe C :

$$H = \{ z = x + iy \mid y > 0 \} .$$

Les droites de H sont les demi-cercles (euclidiens) centrés sur l'axe $y = 0$ et les demi-droites orthogonales à cet axe.

La construction géométrique ci-dessous montre que par deux points distincts de H passe une droite et une seule.

Le postulat d'Euclide n'est évidemment pas satisfait : étant donné un point A de H et une droite D ne contenant pas ce point, il passe par A une infinité de droites ne rencontrant pas D . Ces droites remplissent

un secteur qui est hachuré dans la figure ci-dessous.

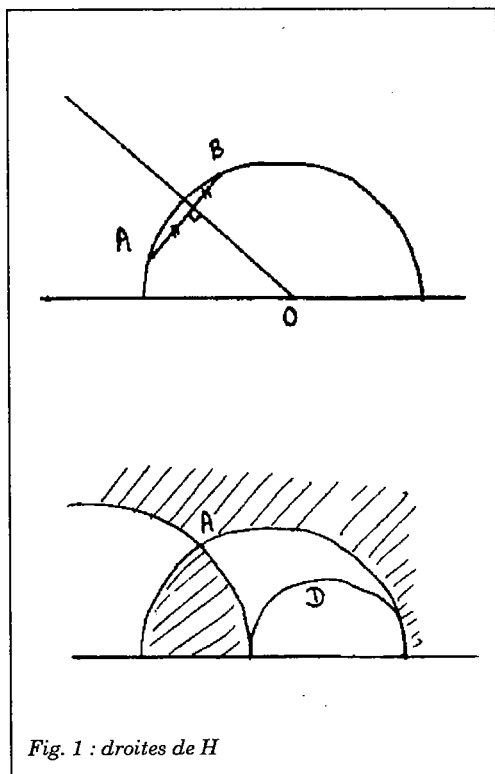


Fig. 1 : droites de H

Une géométrie plane n'est pas uniquement faite de points et de droites, on doit aussi préciser dans quel cas deux figures sont égales : c'est-à-dire qu'on doit avoir un groupe G de déplacements précisant l'homogénéité (lorsqu'on introduira une distance, on demandera que ces déplacements soient des isométries).

Description de G

On considère les transformations de la forme :

$$z \rightarrow T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $ad - bc = 1$.

Ces transformations qui sont des homographies de la droite réelle $y = 0$ (qu'on appellera droite à l'infini de H en lui adjoignant un point noté ∞ , qui sert d'image à $\frac{-d}{c}$ et dont l'image est $\frac{a}{c}$) préserve H : ce sont même des bijections de H sur lui-même. On vérifie en effet la formule :

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

G est un groupe de transformations de H dont on peut décrire la structure : soit $SL_2(\mathbf{R})$ le groupe des matrices 2×2 , à coefficients réels, de déterminant 1. L'application naturelle qui à une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

associe la transformation $T_{a,b,c,d}$ précédente est un homomorphisme surjectif : au

produit usuel des matrices correspond la composition des transformations de G .

En restriction à la droite à l'infini, $T_{a,b,c,d}$ est la transformation projective associée à la transformation linéaire de matrice correspondante, comme le suggère la figure 2 ci-dessous.

Un instrument utile dans la suite est la décomposition de T comme composée de transformations plus simples :

LEMME.— *Tout élément $T \in G$ est composé de translations (euclidiennes) : $z \rightarrow z + A$ avec A réel, d'homothéties (euclidiennes) de centre 0 et de rapport > 0 , et de la transformation $J(z) = \frac{-1}{z}$.*

On déduit de ce lemme que T préserve les droites de H (le seul problème est pour J qui est à peu de choses près une inversion par rapport au cercle de centre 0 et de rayon 1).

A partir de là, on montre que H est isotrope au sens qu'étant donné une droite D et un point $A \in D$, il existe $T \in G$ telle

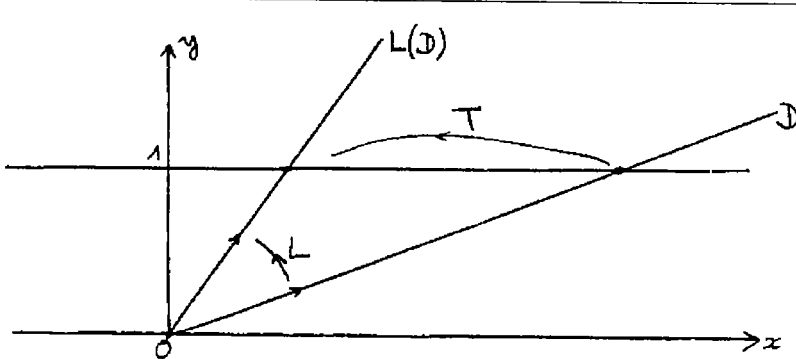


Fig. 2 : transformation linéaire et homographie associée

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

que $T(A) = i$ et $T(D) = \{x = 0\}$. Un tel T est même unique si on a orienté D et qu'on veut que D orientée s'envoie par T sur l'axe Oy orienté positivement.

Pour cela, si α et ω sont les points à l'infini de D , il existe une homographie T_0 telle que $T_0(0) = \alpha$ et $T_0(\infty) = \omega$. T_0^{-1} transforme D en $x = 0$. Pour envoyer A sur i , il suffit de composer avec une homothétie de centre 0 .

2. La distance et les géodésiques

En géométrie euclidienne, on ne se contente pas des points et des droites ; on a aussi la distance pour laquelle les droites sont les géodésiques, au sens suivant : parmi les courbes joignant deux points A et B , il en existe une de longueur minimale, c'est le segment de la droite définie par A et B compris entre A et B .

On va définir une distance, ou plus précisément une famille de distances sur H , pour lesquelles les droites non-euclidiennes introduites précédemment sont géodésiques. Le groupe G est alors le groupe des déplacements (isométries préservant l'orientation de H).

Birapport

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 sont 4 complexes 2 à 2 distincts, on pose :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Si un des points est infini, on prend la convention $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Ce nombre s'appelle *birapport* de z_1, z_2, z_3, z_4 .

Par exemple $[0, \infty, a, b] = \frac{a}{b}$. Si on permute z_1 et z_2 ou z_3 et z_4 , le birapport est changé en son inverse. On a la propriété fondamentale suivante :

PROPOSITION. — Si T est une homographie (à coefficients complexes),

$$[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

La preuve se fait en décomposant l'homographie en transformations élémentaires comme plus haut.

Si z, z' sont deux points de H , et si α et ω sont les extrémités (points à l'infini) de la droite joignant ces points, le birapport $[z, z', \alpha, \omega]$ est réel, car les deux quotients qui interviennent dans sa définition sont imaginaires purs (angles droits). Il est même réel positif.

On pose donc la :

DÉFINITION. — Pour z, z' dans H , et k un réel > 0 ,

$$d_k(z, z') = k \cdot |\log ([z, z', \alpha, \omega])|$$

Remarque :

Dans le cas euclidien, les distances $d_k = k \cdot d_1$, où d_1 est la distance euclidienne définissent des espaces isométriques, l'homothétie h de rapport k vérifie :

$$d_1(h(m), h(m')) = d_k(m, m'),$$

pour tout couple m, m' .

Dans le cas hyperbolique, il n'en est pas du tout de même : les distances d_k définissent des espaces non isométriques, il n'y a pas de dilatations analogues aux homothéties.

Par exemple $d_k(it, it') = k \cdot |\log(\frac{t}{t'})|$ est la distance transportée de la distance euclidienne usuelle sur la droite réelle par l'application $s \rightarrow i.e^s$.

Il n'est pas évident que d_k est une distance : seuls les axiomes de symétrie et de positivité sont évidents. L'inégalité triangulaire ne l'est pas.

Il est clair que, si $T \in G$, $d_k(T(z), T(z')) = d_k(z, z')$ à cause de l'invariance du birapport par homographie.

On va en fait montrer que cette distance peut être définie à partir de la longueur des courbes, c'est ce que Gromov (un des plus grands géomètres contemporains) appelle une *espace de longueurs*.

Pour cela, commençons par calculer un équivalent de $d_k(z, z')$ lorsque $z' \rightarrow z$. Posons $z' = z + u$ (u petit), on a :

$$\begin{aligned} & [z + u, z, \alpha, \omega] \\ &= 1 + \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\omega}\right) u + o(u) \\ &= 1 + \frac{\alpha-\omega}{(z-\alpha)(z-\omega)} u + o(u) . \end{aligned}$$

Prenant le log et se rappelant que le birapport est réel, il vient :

$$d_k(z, z + u) \sim k \cdot \frac{|\alpha-\omega|}{|z-\alpha| \cdot |z-\omega|} |u| ,$$

ou encore, en tenant compte de la relation (triangle rectangle)

$$y \cdot |\alpha-\omega| = |z-\alpha| \cdot |z-\omega| :$$

$$d_k(z, z + u) \sim k \frac{|u|}{y} .$$

La distance d_k est donc infinitésimalement égale à la distance euclidienne multipliée par le facteur $\frac{1}{y}$.

Définissons donc la longueur $L_k(\gamma)$ (non-euclidienne) d'une courbe paramétrée γ de classe C^1 par morceaux de $H : \gamma(t) = (x(t), y(t))$, ($a \leq t \leq b$) par

$$L(\gamma) = k \cdot \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} \cdot dt .$$

Cette longueur est invariante par G , comme on le vérifie à partir de la formule de changement de variable dans l'intégrale.

A partir de cette longueur, on définit une distance δ_k par la formule :

$$\delta_k(z, z') = \inf L_k(\gamma) ,$$

où le inf porte sur toute les courbes de classe C^1 dans H joignant z à z' . Il est clair que δ_k vérifie l'inégalité triangulaire comme on le voit par recollement de courbes joignant z à z' et z' à z'' .

En fait, on va montrer que $d_k = \delta_k$.

A cause de l'invariance par G , on peut se contenter de le montrer pour $z = i$ et $z' = iu$ (u réel).

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ est une courbe joignant i à iu , on a :

$$\begin{aligned} d_k(i, iu) &= k \cdot \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\ &\leq k \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt , \end{aligned}$$

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

les cas d'égalités sont faciles à traiter : $x(t)$ doit être identiquement 0 et $y(t)$ monotone.

On a donc montré que : $d_k = \delta_k$, et par suite que (H, d_k) est un espace de longueurs. Si on appelle *géodésique* toute courbe de H telle que la distance de deux points quelconque de celle-ci, soit donnée par la longueur du segment qu'ils délimitent, on a en fait prouvé que les géodésiques de (H, d_k) sont les droites définies au § 1.

Remarque :

L'espace hyperbolique (H, d_k) a donc les deux propriétés suivantes :

(i) la distance est infinitésimalement euclidienne ;

(ii) c'est un espace de longueurs ;

(ii) n'est pas conséquence de (i), il suffit de penser à la restriction de la distance euclidienne sur \mathbf{R}^3 à une surface non plane (la distance riemannienne intrinsèque est différente (plus grande) que la distance induite).

La conjonction de ces deux propriétés définit une métrique riemannienne.

Notons quelques propriétés qualitatives de cette distance qui la distingue fortement de la distance euclidienne.

Si deux géodésiques ont une extrémité commune à l'infini, elles se rapprochent exponentiellement l'une de l'autre, par exemple si $M(t) = it$ et $P(t) = 1 + it$, on a $d_k(M(t), P(t)) \sim \frac{k}{t}$, qui est à décroissance exponentielle par rapport à $d_k(i, M(t))$.

Au contraire deux droites issues d'un même point divergent exponentiellement.

En résumé, deux droites peuvent être sécantes, asymptotes à une extrémité ou être divergentes aux deux extrémités auquel cas, il y a un couple de points sur celles-ci qui réalise le minimum de la distance.

On peut aussi noter qu'étant donné deux points distincts à l'infini, il existe une droite qui joint ceux-ci : en géométrie euclidienne ceci est notoirement faux. La situation est moins souple !

G est le groupe des déplacements pour d_k .

Il est clair par construction que les transformations T de G sont des isométries pour les distances d_k . De plus elles préservent l'orientation car les homographies de G ont un jacobien qui vaut :

$$\text{jacobien } (T)(z) = \frac{1}{|cz + d|^2},$$

qui est > 0 .

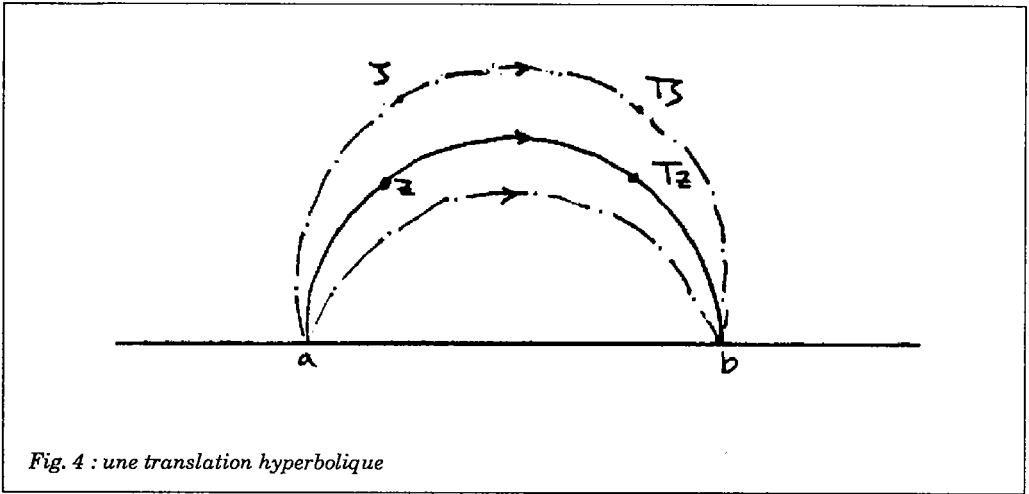
On peut démontrer sans trop de mal qu'il n'y a pas d'autres déplacements.

Classification des déplacements

Les éléments de G peuvent être classés suivant leurs points fixes dans l'action sur $H \cup$ la droite à l'infini.

a. Rotations

Si $|a + d| < 2$, T admet un point fixe dans H , c'est une rotation autour de ce point, analogue aux rotations euclidiennes.



b. Translations hyperboliques

Si $|a + d| > 2$, T admet deux points fixes distincts sur la droite à l'infini. Alors T préserve la géodésique joignant ces deux points, opère sur celle-ci par translation et préserve les courbes situées à distance constante de celle-ci (qui ne sont pas des géodésiques, contrairement au cas euclidien). Cette géodésique est l'ensemble des points qui minimisent $d_k(z, T(z))$ (fig. 4).

c. Translations paraboliques

Si $|a + d| = 2$, T admet un seul point fixe à l'infini. T est conjuguée à $z \rightarrow z + 1$ dans G .

3. Angles et triangles ; aire

Les déplacements $T \in G$ préservent les angles euclidiens : ce sont des transformations conformes. Cela résulte du fait que la différentielle $T'(z_0)$ de T en un point z_0 est la similitude associée au nombre complexe $\frac{1}{(cz_0 + d)^2}$.

On définit donc l'angle en un point z_0 de H de deux courbes passant par ce point comme l'angle euclidien des vecteurs tangents à ces courbes en ce point. Cette notion d'angle est raisonnable car invariante par G .

On peut aussi définir une notion d'aire, la distance infinitésimale calculée plus haut donne envie d'attribuer aux petits carrés euclidiens proches du point z comme aire non-euclidienne, leur aire euclidienne multipliée par $\frac{k^2}{y^2}$. Autrement dit, on va poser, pour une région bornée D (au sens de d_k) de H :

$$\text{aire}_k(D) = k^2 \iint_D \frac{dx dy}{y^2}$$

On s'intéresse maintenant à l'aire des triangles hyperboliques. On considérera aussi des triangles dont un ou plusieurs des sommets sont sur la droite à l'infini, comme sur la figure 5 ci-dessous :

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

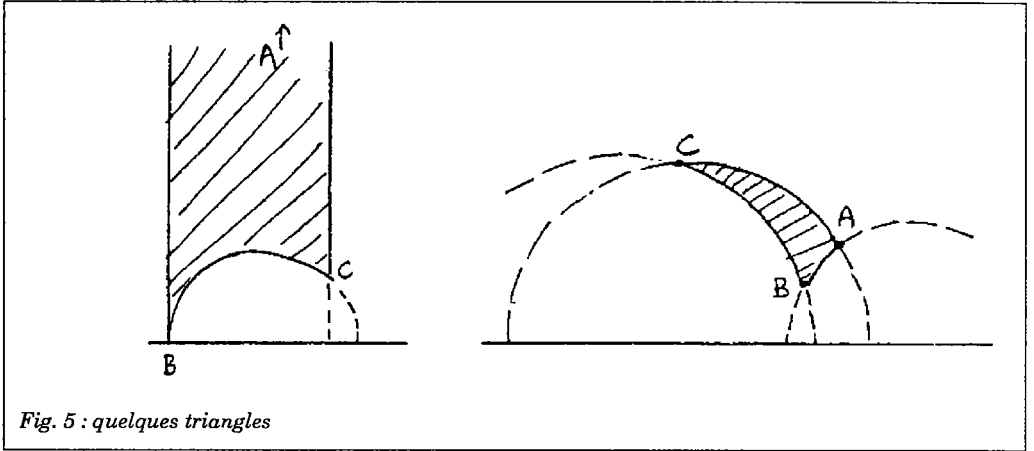


Fig. 5 : quelques triangles

On a en vue le

THÉOREME.— L'aire d'un triangle hyperbolique est donnée par :

$$\text{aire}_k(T) = k^2 \cdot (\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

où α, β, γ sont les angles de T (éventuellement nuls pour les sommets à l'infini).

Preuve. — 1. L'aire des triangles ayant des sommets à l'infini est finie.

Il suffit de le montrer pour un seul sommet et donc que la bande $B = [0, 1] \times [1, +\infty[$ est d'aire finie :

$$\iint_B \frac{dx dy}{y^2} < \infty,$$

ce qui est évidemment vrai.

2. L'aire des triangles ayant leurs trois sommets à l'infini est $\pi \cdot k^2$.

Par homogénéité, il suffit de la prouver pour le triangle T_0 ayant pour sommets

$(-1, +1, \infty)$, c'est-à-dire de calculer l'intégrale double :

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2},$$

ce qui ne pose pas de problème particulier.

3. Preuve purement géométrique de la formule (on suppose ici $k = 1$).

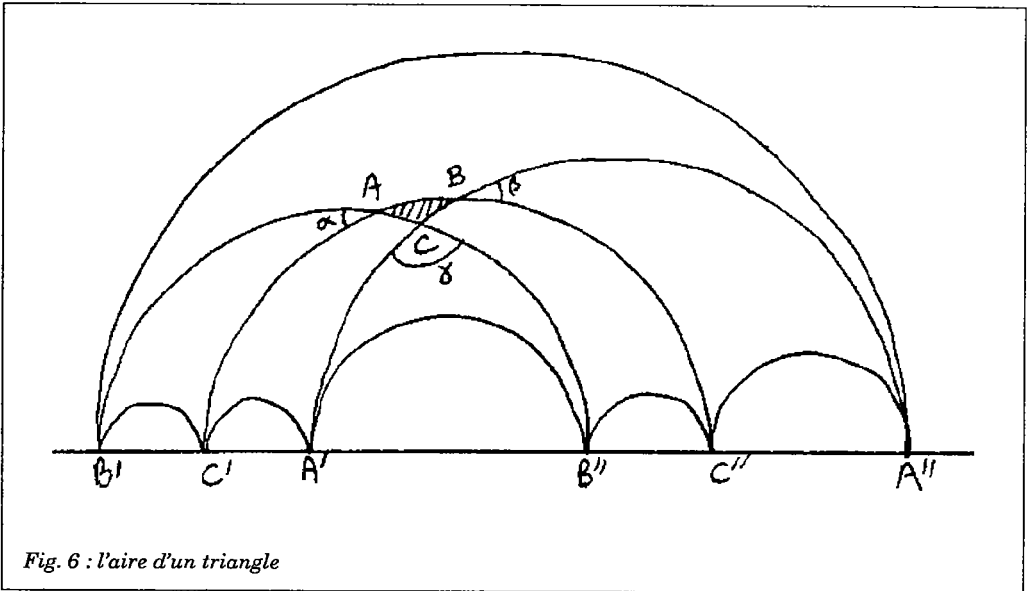
Il est clair, par homogénéité que tous les triangles de sommet z , ayant deux sommets à l'infini et d'ouverture α ont même aire A_α .

On voit facilement (figure) que, si $\alpha + \beta \leq \pi$,

$$A_\alpha + A_\beta = A_{\alpha + \beta} + \pi.$$

Donc $\alpha \rightarrow A_\alpha - \pi$ est additive sur $]0, \pi[$ et bornée, ce qui entraîne $A_\alpha = \pi + C\alpha$. Mais $A_\pi = 0$ (ce qui se déduit de $A_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$), donc $A_\alpha = \pi - \alpha$.

On considère les six triangles $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\alpha', S_\beta', S_\gamma'$, qui ont chacun deux sommets à l'infini (figure). Leur réunion est l'hexa-



gone ayant ses six sommets à l'infini : $H = (A' A'' B' B'' C' C'')$, dans lequel T est recouvert trois fois et $H \setminus T$ une seule. On a donc, en notant $|D|$ l'aire de D :

$$|S_\alpha| + |S_\beta| + |S_\gamma| + |S_\alpha| + |S_\beta| + |S_\gamma| = |H| + 2|T|,$$

et $|H| = 4\pi$ (découpage en quatre triangles ayant leurs trois sommets à l'infini). On en déduit le résultat (fig. 6).

Application à la construction de triangles d'angles donnés

A partir de là, on peut montrer qu'étant donné trois réels positifs ou nuls, α, β, γ dont la somme vérifie :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

il existe un triangle géodésique unique à isométrie près ayant ces angles.

L'unicité se montre ainsi : on peut par un déplacement supposer $A = A'$ et que les demi-droites AB et AB' (resp. AC et AC') sont confondues. Si les droites CB et $C'B'$ se coupent en P sans être confondues, le triangle $BB'P$ ou $CC'P$ est non dégénéré et a une somme d'angles $> \pi$.

Si ces deux droites ne se coupent pas, les aires de ABC et de $AB'C'$ sont inégales ; ce qui contredit la relation entre somme des angles et aire.

L'existence se montre par continuité : soient D, D' deux demi-droites faisant en A un angle α . Il existe sur D un point B tel que la droite passant par B et faisant avec D un angle β est asymptote à D' . Soit $M(t)$ le point de la demi-droite D situé entre A et B telle que la distance de A à $M(t)$ soit t . Soit $P(t)$ l'intersection de la droite faisant en $M(t)$ un angle β avec D . Lorsque t varie de 0 à $d(A, B)$, l'angle $\gamma(t)$ en $P(t)$ du triangle

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

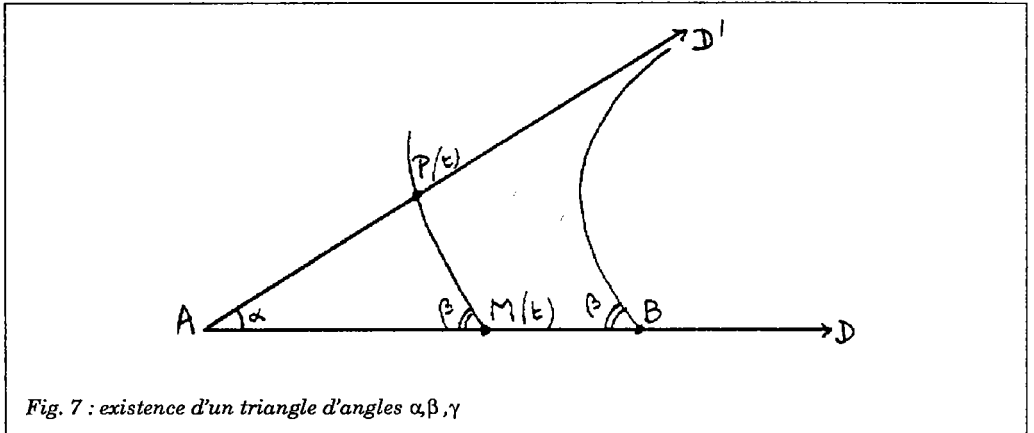


Fig. 7 : existence d'un triangle d'angles α, β, γ

$AM(t)P(t)$ varie de $\pi - \alpha - \beta$ à 0 continûment et donc prend toute valeur γ telle que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ (fig. 7).

Trigonométrie hyperbolique

On a des formules de trigonométrie hyperbolique qui ont un air de famille avec celles de la trigonométrie euclidienne ; si T est un triangle hyperbolique (pour d_k) de sommets A, B, C , de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ , on a les formules suivantes :

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh \frac{a}{k}} = \frac{\sin \beta}{\sinh \frac{b}{k}} = \frac{\sin \gamma}{\sinh \frac{c}{k}}$$

$$\cosh \frac{c}{k} \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma$$

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cdot \cosh \frac{b}{k} - \sinh \frac{a}{k} \cdot \sinh \frac{b}{k} \cdot \cos \gamma,$$

qui permettent de résoudre les triangles hyperboliques.

4. La courbure

La courbure de Gauss d'une surface de \mathbf{R}^3 .

Soit M_0 un point d'une surface S de \mathbf{R}^3 ; si nous coupons S par un plan P normal à S en M_0 , nous obtenons une courbe plane γ_P dont le centre de courbure a pour abscisse r_P sur la normale à S en M_0 en prenant l'origine en M_0 . $k_P = \frac{1}{r_P}$ est la courbure algébrique de cette courbe. Soit $k_+ = \sup k_P$ et $k_- = \inf k_P$. On pose $K(M_0) = k_+ \cdot k_-$. C'est la courbure de Gauss de la surface S en M_0 .

C'est un résultat extraordinaire de Gauss qui si deux surfaces S_1 et S_2 sont isométriques pour la distance géodésique leurs courbures de Gauss sont les mêmes (théorème egregium).

On doit donc pouvoir calculer la courbure de Gauss uniquement à partir de la distance infinitésimale. C'est effectivement ce que Gauss fait. La formule la plus simple est la suivante :

soit $l(r)$ la longueur du cercle géodésique de centre M_0 et de rayon r . On a un développement limité de $l(r)$ lorsque $r \rightarrow 0$:

$$l(r) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(M_0)}{6} \cdot r^2 + O(r^3)\right).$$

Cela donnerait le résultat cherché si on avait une expression explicite de $l(r)$, en fait on peut montrer que : $l(r) = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right)$.

Donc la courbure de (H, d_k) est $\frac{-1}{k^2}$.

On aurait pu préférer trouver une surface de \mathbb{R}^3 isométrique à (H, d_k) . Une telle surface n'existe pas (Hilbert).

On peut seulement trouver une surface isométrique localement à (H, d_k) .

Il suffit évidemment de le faire pour $k = 1$, car une surface homothétique de rapport k de cette surface fera l'affaire pour d_k .

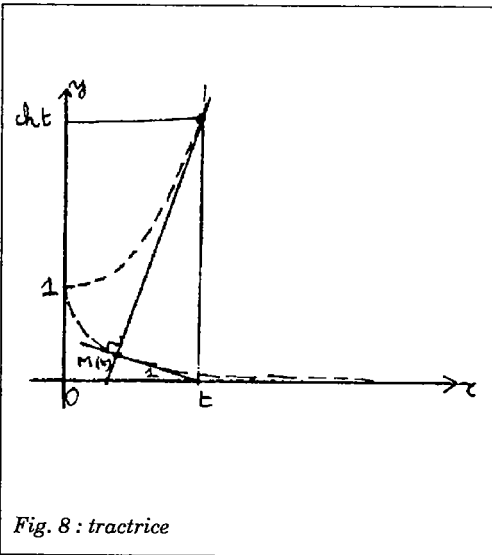


Fig. 8 : tractrice

On considère la surface S obtenue par rotation de la tractrice autour de l'axe

des x . La tractrice admet comme équations paramétriques :

$$x(t) = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t}, (t > 0).$$

On en déduit les équations paramétriques de S :

$$x = t - \tanh t, y = \frac{1}{\cosh t} \cos \theta, z = \frac{1}{\cosh t} \sin \theta.$$

D'où l'expression de la métrique infinitésimale :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tanh^2 t \cdot dt^2 + \frac{1}{\cosh^2 t} d\theta^2.$$

Soit en posant $\xi = \theta, \eta = \cosh t$, $ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$, qui est bien l'expression infinitésimale de d_1 .

Le calcul de la courbure de Gauss résulte des propriétés géométriques de la tractrice : les rayons de courbure R_1 et R_2 indiqués sur la courbure ont un produit égal à -1 .

5 .La géométrie euclidienne comme limite de géométries hyperboliques

Nous avons déjà plusieurs indices de la convergence lorsque $k \rightarrow \infty$ de la géométrie de (H, d_k) vers la géométrie euclidienne du plan. Par exemple la formule de l'aire d'un triangle : un triangle de (H, d_k) dont les côtés ont des longueurs fixées a une aire bornée lorsque $k \rightarrow \infty$, comme cela résulte des formules de l'aire : par exemple l'aire d'un disque de rayon R est $2\pi k^2 (\cosh \frac{R}{k} - 1)$.

On en déduit que la somme des angles tend vers π .

**UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE**

Il y a d'autres indices, si l'on regarde les formules trigonométriques. Par exemple la formule :

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cdot \cosh \frac{b}{k} - \sinh \frac{a}{k} \cdot \sinh \frac{b}{k} \cdot \cos \gamma.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$ avec a, b, c fixés, cette formule devient la formule connue en géométrie euclidienne :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma.$$

On peut donner un sens précis à la notion de suite d'espaces métriques convergent vers un espace métrique, c'est ce qui est fait par exemple dans [GV].

Les espaces étant non bornés, on s'intéresse à la convergence d'espaces pointés, c'est-à-dire avec un point origine marqué. Ici les espaces étant homogènes, on peut choisir ce point arbitrairement. On prendra une origine O dans le plan euclidien et i comme origine dans les demi-plans hyperboliques.

On considère les applications φ_k de \mathbf{R}^2 dans H définies par $\varphi_k(u) = i + \frac{u}{k}$. Pour u fixé, φ_k est définie pour k assez grand et surjective. Si u, u' sont fixés dans le plan \mathbf{R}^2 , on a :

$$\lim d_k(\varphi_k(u), \varphi_k(u')) = d_{eucl}(u, u').$$

Cela résulte du développement limité de d_1 près de i fait plus haut.

6. Pavages hyperboliques

A tout sous-groupe discret Γ (i.e. dont les orbites sont localement finies) du groupe des isométries du demi-plan de Poincaré, on associe des pavages de la façon

suivante. On considère un domaine fondamental D de Γ , c'est-à-dire une région de H telle que la réunion des images $\gamma(D)$ soit H et que deux images quelconques se rencontrent sur un ensemble de mesure nulle (union finie de courbes). Les domaines $D_\gamma = \gamma(D)$ ($\gamma \in \Gamma$) pavent H .

Donnons quelques exemples de tels pavages :

1) Le groupe $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ des matrices à coefficients entiers de déterminant 1 est d'une importance fondamentale en théorie des nombres (voir [SE]). Il est engendré comme groupe par les rotations S d'angle π autour de i et U d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de j , qui sont définies par :

$$S(z) = \frac{-1}{z}, U(z) = \frac{-1}{z+1}.$$

Un domaine fondamental possible est :

$$D = \{ z \in H \mid -1 \leq x \leq +1, |z| \geq 1 \}.$$

(cf. figure 9 page suivante.)

2) Si p, q, r sont trois entiers ≥ 2 tels que la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, il existe un triangle d'angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$. Le groupe engendré par les symétries autour des côtés de ce triangle est un groupe discret noté $\Gamma_{p,q,r}$. Si on prend comme domaine fondamental le triangle en question, on a un pavage par des triangles tous isométriques.

3) Les groupes précédents sont rigides, mais on peut en trouver des familles déformables : les groupes de surfaces.

Ce sont des analogues hyperboliques des groupes engendrés par deux translations

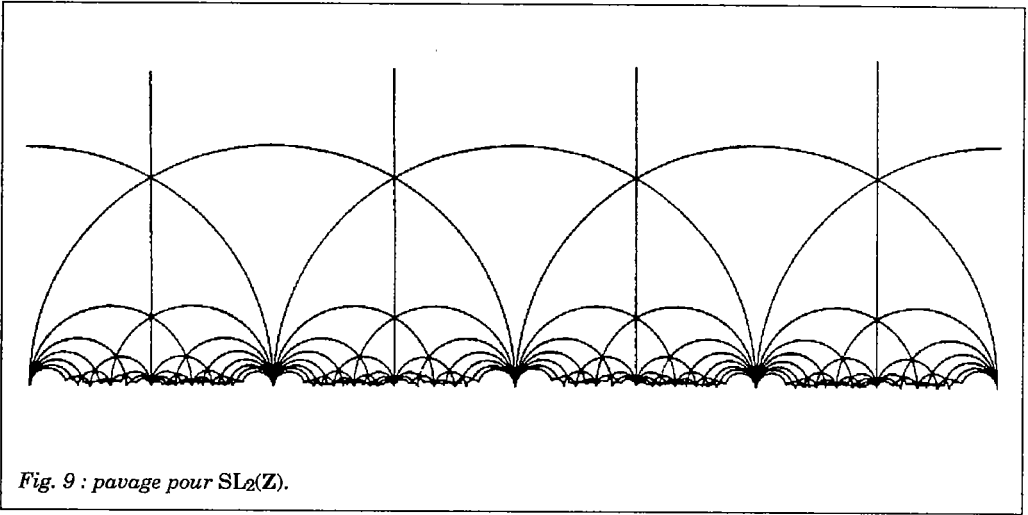


Fig. 9 : pavage pour $SL_2(\mathbb{Z})$.

indépendantes du plan euclidien. Si on prend alors comme domaine fondamental un parallélogramme engendré par ces deux translations, l'identification des bords par le groupe donne lieu à une surface qu'on appelle un tore (fig. 10).

Dans le cas hyperbolique, on obtient des surfaces plus compliquées : les tores à plusieurs trous. L'exemple le plus simple s'obtient à partir d'un octogone $ABCDEFGH$ dont la somme des angles vaut 2π et vérifiant les relations :

$$\begin{aligned} d(A,B) &= d(C,D) ; d(B,C) = d(D,E) ; \\ d(E,F) &= d(G,H) ; d(F,G) = d(H,A), \end{aligned}$$

en identifiant les côtés de même longueurs (orientation deux à deux opposées par rapport au sens trigonométrique sur le bord de l'octogone) par des translations hyperboliques. Il y a une famille à huit paramètres de tels octogones à isométrie près, donnant lieu à une famille à six paramètres de groupes. La surface associée est un tore à deux trous qui admet

donc une métrique riemannienne à courbure -1 .

7. Applications de la géométrie hyperbolique

La géométrie hyperbolique a de nombreuses applications à la fois à l'intérieur des mathématiques et aux autres sciences.

Par exemple, la théorie des pavages hyperboliques et des groupes de ces pavages a des applications à la théorie des équations différentielles, à la théorie analytique des nombres.

Les géodésiques sur les surfaces localement isométriques au plan hyperbolique donne l'exemple le plus simple de système dynamique chaotique.

Les physiciens se sont intéressés à ces modèles pour cette raison et en particulier pour mieux cerner le problème du chaos au niveau de la mécanique quantique.

UN EXEMPLE DE GEOMETRIE
NON EUCLIDIENNE

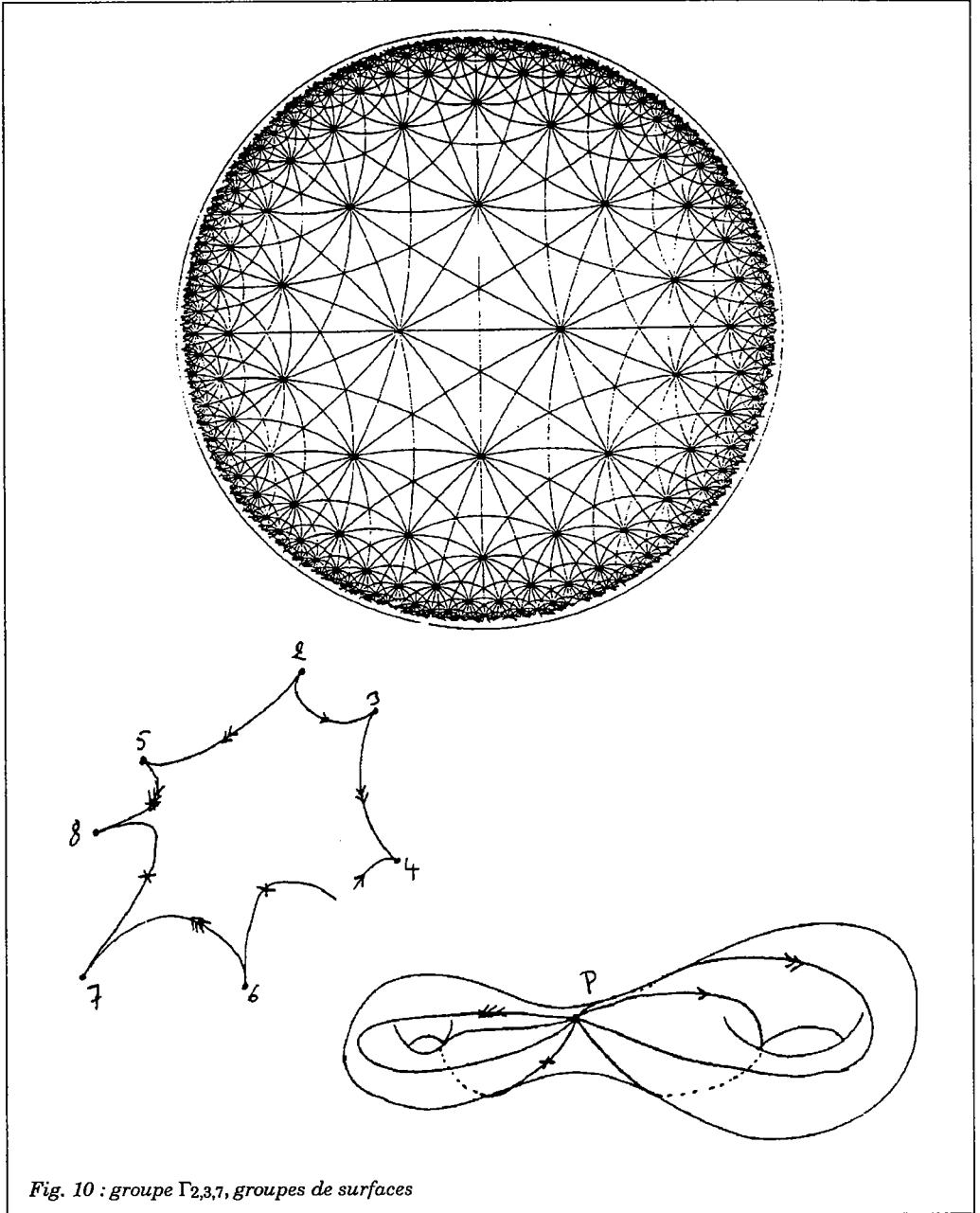


Fig. 10 : groupe $\Gamma_{2,3,7}$, groupes de surfaces

La géométrie hyperbolique n'est qu'un cas particulier des géométries riemanniennes. La relativité généralisée est une théorie géométrique de l'espace-temps, interprétant la gravitation comme un effet de la courbure de l'espace. La géométrie de la relativité est très semblable à la géométrie riemannienne : au lieu d'avoir un espace infinitésimalement euclidien, il est infinitésimalement lorentzien, au sens que le produit scalaire n'est pas défini positif.

Il y a d'autres généralisations plus récentes. Si on s'intéresse non plus aux propriétés à courtes distances mais à longues distances de l'espace hyperbolique. Gromov a introduit une notion très vaste d'hyperbolicité qui permet de traiter

des objets beaucoup plus généraux : par exemple cette notion a des applications à la théorie des groupes discrets infinis définis par générateurs et relations. Cette idée de traiter les groupes comme des objets géométriques est actuellement la source d'une grande activité.

Une autre question intéressante et encore très ouverte est l'étude des pavages de l'espace hyperbolique de dimension 3. Ces questions sont reliées d'une part à des questions de géométrie euclidienne élémentaire comme les empilements de cercles (théorèmes d'existence et de rigidité de Andreev, Thurston, Sullivan et l'auteur), d'autre part à l'étude très active des variétés de dimension 3.

8. Quelques références pour aller plus loin

- [B-G] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*, PUF, 1987.
- [BR] M. BERGER, *Géométrie*, Cedic, 1977.
- [BN] A. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Springer, 1982.
- [CO] H. COXETER, *Non-Euclidean geometry*, U. Toronto Press, 1965.
- [EF] N.W. EFIMOW, *Höhere Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wiss, 1960.
- [ER] M.C. ESCHER, *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.
- [GR] M. GREENBERG, *Euclidean and non-Euclidean geometries : development and history*, Freedman, San-Francisco, 1974.
- [GV] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic, 1981.
- [GY] J. GRAY, *Ideas of space*, Oxford science ed., 1989.
- [MI] J. MILNOR, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. AMS 6, 1982, 9-24.
- [N-S] V.V. NIKULIN, I.R. SHAFAREVITCH, *Geometries and groups*, Springer, 1987.
- [PO] H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1932.
- [SE] J.P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, PUF, 1970.