
LA GÉOMÉTRIE DES FIGURES ARTICULÉES

Luc SINÈGRE
Thierry HAMEL
IREM de Rouen

A. INTRODUCTION

Ce sont des activités en 1^{re}S portant notamment sur les fonctions irrationnelles et les fonctions trigonométriques qui sont à l'origine de cet article. Thierry Hamel les a développées, alors, en parallèle avec l'enseignement spécifique qu'il donnait en classe de seconde Arts plastiques, au Lycée A. Briand (Evreux).

Les exemples et les applications présentés ici constituent l'essentiel d'une formation délivrée lors d'un stage MAFPEN, en 1993-94. Ils furent présentés la même année au colloque Inter Irem *Géométrie* du Quesnoy, ce qui explique un certain nombre de raccourcis. Le texte qui suit n'a donc pas été écrit pour être exposé, en ces termes, devant une classe de Lycée. L'un des objectifs du stage était de faire découvrir aux participants des idées propres à orienter davantage leur enseignement vers

des situations concrètes non caricaturales; ils ont pu, par exemple, réutiliser ce travail pour rédiger des exercices ou des devoirs libres en fixant, en fonction du niveau de leur classe un certain nombre de paramètres. Mais nous n'avons pas fait rentrer notre propos dans le cadre précis des programmes officiels d'un niveau ou d'une série donnés. Nous ne pensons pas, en effet, que la mission des formateurs soit de délivrer des séances d'activités " clefs en main " mais, au contraire, de susciter la curiosité des stagiaires, et éventuellement la discussion et la confrontation des idées.

Nous commençons d'abord par donner les caractères généraux qui concernent ces exercices de Géométrie articulée, et les points qui nous semblent devoir être remarqués, avant d'en résumer quatre exemples et applications (dans le triangle, dans le quadrilatère, dans le quadrilatère inscrit et dans l'espace).

Mécanique... le retour ?

Le groupe Géométrie de l'IREM de Rouen a commencé à réfléchir, à la fin des années 1980, au rôle que devait tenir le *mouvement* (considéré indépendamment de ses causes) dans l'enseignement de la Géométrie. Certes, le travail ⁽¹⁾ sur les *Equilibres*, et le symbolisme des tableaux d'équilibres se rapproche davantage de l'Algèbre que de la Mécanique. Mais depuis le groupe a progressivement, compris comment le point de vue *Mécanique* était indissociable d'un enseignement complet de la Géométrie et donc devait constituer un axe de ses recherches pédagogiques. Comme le rappelle Chasles [5 p. 243], l'idée d'étudier les *mouvements indépendamment des forces*, fut émise d'abord par Carnot, mais était restée inféconde jusqu'à ce qu'Ampère dans son *Essai sur la philosophie des Sciences*, fasse de l'étude des *mouvements considérés en eux-mêmes* un des chapitres distincts de la *Mécanique* sous le nom de *Cinématique*.

L'évolution des programmes de Lycée et ensuite des premiers cycles d'Université va pourtant vers une suppression presque totale des parties consacrées à la Cinématique et à la Mécanique. Certes nous nous accordons, comme tous, pour reconnaître à la géométrie *synthétique* des qualités pour former à la démonstration. Mais en oubliant les rapports Géométrie-Mécanique, on cantonne la Géométrie dans un rôle sûrement utile mais seulement rhétorique. C'est d'ailleurs ces aspects négatifs qui donnent des armes à tous ceux qui ne veulent pas de bien à la Géométrie (trop sélective-abstraite-formelle...). Nous pensons qu'il faudrait parvenir à dépasser ce cloisonnement et illustrer par des exemples ⁽²⁾

comment la Géométrie fait partie des mathématiques vivantes (contrairement à une idée reçue qui la voit défunte depuis 1960...). Le refus de considérer le mouvement dans la géométrie remonte d'ailleurs à la tradition grecque. Mais à partir de la seconde moitié du dix-neuvième siècle on assiste à un mouvement contraire. Ce changement d'idées s'appuie sur trois points principaux : la mise en place de la *Géométrie du mouvement* (intervention du mouvement dans l'argumentaire et la démonstration), la confrontation (chez Chasles en particulier) entre la géométrie projective et la cinématique, enfin la remise en cause de la tradition euclidienne dans la construction de la géométrie. Ainsi Jules Houël écrivait en 1867 [10] :

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.

L'idée de mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du mouvement géométrique, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur. Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas dépendre d'une autre science que la géométrie pure.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et

(1) Pour mémoire on trouve même dès 1988 une construction *dynamique* de l'icosaèdre dans [11].

(2) Nous avons développé ces rapports dans l'article sur *Le Billard Circulaire* [7].

l'on se retrouve mieux préparer à introduire plus tard dans le mouvement les notions de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de la géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée.

Il nous est apparu d'emblée que les systèmes articulés avaient l'intérêt d'être, en général, facilement modélisables par des figures. Les variables et les conditions de définitions, voire les contraintes, ne sont pas abstraites mais ne font que traduire mathématiquement les situations extrémales des systèmes. La variable implicite naturelle est le temps : l'expérience en classe a mis en évidence que l'introduction du temps tendait à simplifier la vision des problèmes posés, tout particulièrement chez des élèves réputés non scientifiques⁽³⁾. Ainsi a-t-on mis en lumière le va et vient permanent (comme en Physique) entre la modélisation mathématique et l'étude des systèmes. De plus, il est possible d'attaquer le même système avec des moyens, des outils, et donc des ambitions très variés selon les aptitudes du public visé.

Par exemple, pour rechercher l'allure des variations de la courbe figurant l'aire du triangle articulé de l'exemple 1, on peut, de la façon la plus élémentaire qui soit, commencer par une étude point par point (chaque point correspondant à un état précis du système). A l'issue d'une activité de ce type, on observe que les conclusions des élèves, sans doute habitués à ne

rencontrer que des solutions symétriques, sont souvent erronées.

Ces activités expérimentales et d'autres peuvent avantageusement faire appel aux logiciels de dessin (Cabri géomètre par exemple). Madame J. Vanhamme de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française nous a ainsi fait parvenir en Juin 94, après notre exposé du Quesnoy, une série d'exercices pour les élèves du secondaire qui montrent sur la même feuille de calcul à la fois le système articulé et les représentations graphiques des fonctions à étudier.

Ces deux types d'activités peuvent atténuer la difficulté d'ensemble de cette démarche. On y rencontre des paramètres et l'étude analytique des situations n'est ni aisée (on aurait aimé des expressions algébriques plus agréables...) ni simplifiable sans perdre la relation avec le système physique. Cependant si ces écueils montre que la rencontre avec le réel pose problème à tout bon pédagogue, l'apparition de résultats non symétriques, et sûrement non évidents *a priori* peut-elle justifier, par exemple avec des élèves scientifiques, la recherche et le développement des calculs explicites.

Il semblerait utile, d'autre part de mettre en place au collège des activités permettant d'appréhender les *transformations* (i.e. les rotations et les translations) comme des *mouvements*, la distinction mouvement/transformation étant difficile à établir⁽⁴⁾. L'introduction de systèmes

(3) Cette remarque est paradoxale si l'on se souvient que la présence du temps dans le calcul des probabilités (probabilités conditionnelles, *remontées dans le temps*) constitue pour les élèves une difficulté majeure.

(4) Historiquement les translations et les rotations ont acquis leur statut de transformations lorsqu'on les a reconnues comme des transformations projectives particulières, comme le remarque Chasles dans [4].

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES

articulés, parce qu'il pose un problème de transformation de mouvement, paraît utile pour la compréhension de cette distinction.

Des fonctions...

Plusieurs manuels ont essayé ces dernières années de dépasser l'étude *académique* des fonctions pour leur donner un support concret. La *Géométrie articulée* semble fournir un bon terrain pour ce genre d'exercices (les fonctions irrationnelles apparaissent dans les exemples 1 et 2, les fonctions trigonométriques dans les exemples 3 et 4). Les expressions analytiques de ces fonctions ne sont pas toujours faciles à manipuler mais là encore, le réel apporte son concours sinon son secours.

Si l'on ne se donne pas l'objectif du calcul explicite des longueurs, on peut donner aux élèves (de L par exemple) les courbes représentatives de ces fonctions. C'est une des applications possibles de l'exemple 4. En faisant varier une pyramide articulée (à 3, 4, ou 5 faces ⁽⁵⁾) dans une sphère, on cherche ainsi à lire (et l'on découvre) graphiquement s'il est possible de construire le polyèdre régulier correspondant.

Dans le cas du quadrilatère (exemple 2) on rencontre des fonctions (somme de deux racines carrées ⁽⁶⁾) dont l'étude du signe des dérivées n'est pas trivial. L'exemple 3 est directement relié à la Géométrie euclidienne; en travaillant dans ce sens, on peut faire retrouver aux élèves, entre autres résultats classiques, le théorème de *Ptolé-*

mée ⁽⁷⁾. Ces exercices mettent en relief un chapitre important pour les mathématiques appliquées, la technique et l'industrie, celui qui concerne l'optimisation.

Rôle des paramètres

Dans notre article et lors des exposés de stages, nous avons laissé les fonctions avec le maximum de généralité, nous permettant même d'interpréter en termes de surfaces la variation des différents paramètres. Il nous semble aller de soi que le futur utilisateur fixera les longueurs comme il le souhaitera. Nous savons que, depuis une dizaine d'années, l'introduction des paramètres dans le second cycle n'est même plus homéopatique.

Certes il faudrait d'abord séparer l'utilisation "formelle" d'un paramètre (résoudre et discuter l'équation du second degré $(2 + m)x^2 + (3m+1)x - 1 = 0$) et son usage "en situation" (étude de l'intersection d'une droite variable passant par un point fixe et d'une parabole). Même si le premier type ne présente pas beaucoup d'intérêt, il vaut mieux savoir traiter quelques questions de ce style avant d'aborder le second type. Le premier permet de calculer avec plus d'aisance et peut-être de préparer les identifications

$$\mathbf{K}[x,m] = (\mathbf{K}[x])[m] = (\mathbf{K}[m])[x],$$

le second fait véritablement comprendre ce que signifie l'introduction et l'usage des paramètres. Ces deux étapes que la tradition oppose (on avait d'ailleurs fini par

(5) On a exclu les cas du cube et du dodécaèdre *a priori* en ne considérant que des faces équilatérales.

(6) Les lignes de niveau de ces fonctions sont d'ailleurs des ellipses.

(7) Pour l'anecdote, ajoutons qu'une des sources de cette partie développée dans [6] fut un exercice de la revue de Mathématiques Élémentaires de 1892.

occulter la seconde, c'est-à-dire perdu le sens) sont donc complémentaires.

Pour expliquer pourquoi les partis pris officiels nous paraissent regrettables, on peut aussi rappeler que le symbolisme de Viète a pour objet de remplacer les inconnues par des lettres, mais aussi de représenter les coefficients, ouvrant ainsi à la généralité du calcul.

On peut aussi invoquer la physique, puisqu'en premier lieu (on l'a constaté aisément ici), faire de la physique, penser le réel, c'est naturellement étudier des phénomènes en fonction des variations de plusieurs données. Mais au-delà, l'interdiction ou la disparition des paramètres semble dommageable pour les mathématiques elles-mêmes.

Un des objectifs du Lycée ne devrait-il pas être la formation des élèves à l'Algèbre ? Nous n'entendons par ce terme ni la manipulation de quantités indéterminées, ni le retour à un enseignement précoce et scolastique des *Structures*. La formation à l'Algèbre serait plutôt la reconnaissance par l'élève de structures et d'invariants qui dépassent le calcul ou qui le simplifient. Or, il semble bien que l'introduction de paramètres favorise effectivement ces mécanismes. De surcroît, dans les activités proposées, cette introduction s'impose d'elle-même. Ainsi nous pourrions faire nôtre le jugement que Chasles portait à propos des travaux de Monge sur les équations différentielles à plusieurs variables [4 p. 210] :

On conçoit qu'en rapportant ainsi les phrases analytiques à des objets visibles, dont les parties ont entre elles des rapports évidents et palpables, la Géométrie ait pu contribuer puissamment aux progrès de

l'Analyse; et, en un mot, que Monge ait pu faire de l'Algèbre avec de la Géométrie.

Nous n'abordons pas dans ces exemples, la *Géométrie du mouvement*, qui utilise explicitement le mouvement (souvent grâce au centre ou à l'axe instantané de rotation) pour établir une vérité ou justifier une construction géométriques ⁽⁸⁾ (Rudolf Bkouche donne par exemple dans [1] l'histoire de ces méthodes). Or l'une des étapes importantes de cette nouvelle branche de la géométrie fut la présentation par Poincaré d'un mémoire sur la rotations des corps [13]. Mais il est plaisant de rappeler ici que cet événement fut intimentement lié à la naissance du calcul vectoriel. Ce texte est (cf [14]), en effet, à l'origine de l'une des premières applications mécaniques du calcul des quaternions [8]. L'Algèbre au dix-neuvième siècle ⁽⁹⁾, n'avait pas encore *honte* de fréquenter le mouvement et la géométrie !

Espérons modestement que ce texte donnera envie à de nombreux enseignants (comme ce fut le cas lors des stages) de développer des procédures mécaniques analogues (éventuellement très éloignées de ce qui vient d'être présenté).

(8) Nous travaillons actuellement sur les interactions Géométrie-Algèbre-Mécanique dans l'article *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre* [12].

(9) On pourrait aussi rappeler que les objets de la structure d'espace vectoriel, les vecteurs, furent définis par Hamilton en 1843 dans les *Lectures* [9], à la fois sémantiquement et mécaniquement par les expressions *Vector*, *Vehend*, *Vectum*.

LA GEOMETRIE DES
 FIGURES ARTICULEES

B. EXEMPLES

I. Le triangle articulé

Il s'agit de considérer le triangle suivant :

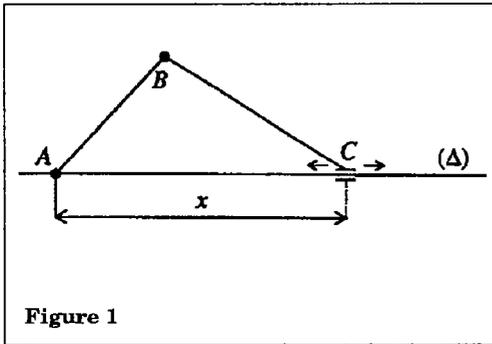


Figure 1

où le point A est fixe sur la droite Δ , le point C, lui est astreint à glisser le long de cette même droite de sorte que les deux "tiges" AB et BC restent de longueur constante. On pourra précisément poser $a = AB$ et $b = BC$ et choisir comme variable principale la longueur AC.

On peut dès lors s'intéresser aux variations de plusieurs autres quantités variables, telles que l'angle BAC ou l'angle ABC, par l'intermédiaire de leur cosinus respectif par exemple ou encore la hauteur issue de B ou tout simplement l'aire du triangle (son périmètre pouvant à l'occasion faire l'objet d'une activité en classe de troisième pour introduire les fonctions affines !)

Avant même de chercher l'expression des variables précitées en fonction de x , épreuve déjà assez délicate qu'on réservera aux classes de S sans doute, on peut faire intervenir dans la mesure des moyens locaux, le logiciel "le Géomètre" qui permet

une excellente visualisation de la (dés)articulation du triangle initial, mesure des longueurs et des angles à l'appui ! En l'absence de ce logiciel, j'ai toutefois moi-même fait l'expérience du plaisir qu'avaient les élèves à construire les figures correspondantes pour des valeurs de x , puis à mesurer hauteurs et angles, à calculer l'aire du triangle et à regrouper les résultats de la communauté dans un tableau de valeurs menant à la courbe recherchée, obtenue de la sorte point par point.

Notons au passage que la variable x se déplace dans l'intervalle $[a - b ; a + b]$, en vertu de l'inégalité triangulaire (on constate, en particulier, que le point C n'atteint jamais le point A sauf dans le cas du triangle isocèle, i.e. $a = b$), et aussi que le point B se déplace sur un arc de cercle de rayon a ...

 1°) Etude de l'aire du triangle $S(x)$:

L'occasion est trop belle de sortir de son écrin très 1^{er} siècle-après-J-C, la formule de Héron :

On obtient aussitôt :

$$S(x) = \frac{1}{4} \sqrt{(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(-x+a+b)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2}$$

Par exemple, pour $a = 10$ et $b = 6$, on a :

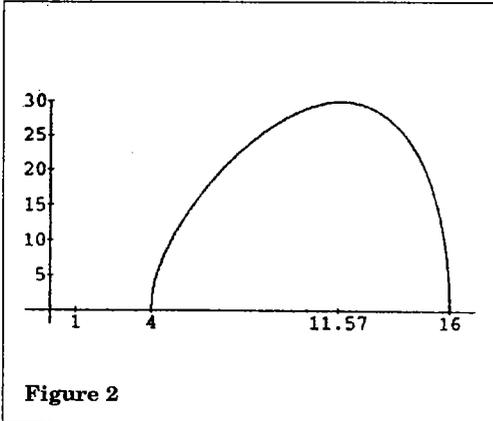
$$S(x) = \frac{1}{4} \sqrt{-x^4 + 272x - 4096}.$$

N.B. : A l'évidence, l'expression ci-dessus est toujours bicarrée et le discriminant du polynôme du second degré associé est : $\Delta' = (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$.

On retrouve ainsi l'intervalle sur lequel étudier l'aire $S(x)$, à savoir l'intervalle "entre les racines" :

$$[(a - b)^2 ; (a + b)^2] \text{ pour } x^2 \text{ et } [|a - b| ; a + b] \text{ pour } x .$$

A ce stade, si on désire seulement chercher la valeur de x optimisant l'aire, on peut oublier la racine carrée ainsi que la fraction $1/4$ qui l'accompagne, pour n'avoir à travailler que sur le polynôme du 4^e degré ci-dessus. Il serait cependant dommage de passer à côté de la jolie courbe pas symétrique (!) qui représente $S(x)$ et dont voici un aperçu avec $a = 10$ et $b = 6$:



On notera que la dérivée de $S(x)$ est du signe de :

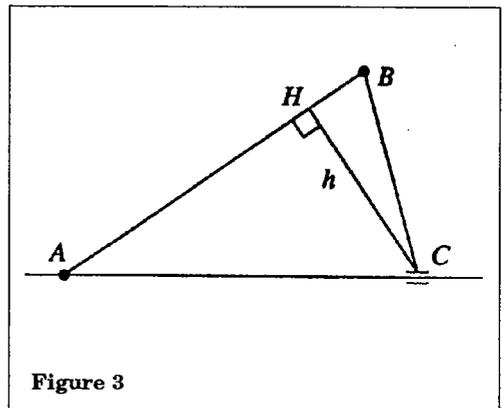
$$-4x^3 + 4(a^2 + b^2)x = 4x(a^2 + b^2 - x^2).$$

On notera également que l'on a toujours $|a - b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ si bien que la dérivée de $S(x)$ est toujours positive sur l'intervalle $[|a - b| ; \sqrt{a^2 + b^2}]$ et négative sur $[\sqrt{a^2 + b^2} ; a + b]$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$ a - b $	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$a + b$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$0 \swarrow \quad \quad \quad \searrow 0$ M		

avec : $M = S(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2} ab$.

Tout ce travail analytique pour arriver à la conclusion que le triangle a une aire maximale quand il est rectangle en B (simple réciproque du bon vieux théorème de Pythagore !). On peut alors le redémontrer, disons géométriquement, en recalculant l'aire à partir de la base AB et la hauteur issue de C . On se rend bien compte que cette fois, l'aire varie linéairement par rapport à cette hauteur; or cette hauteur est maximale quand elle vaut BC !



autrement dit : $S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{a}{2} \cdot h$ et S maximale pour $h = b$, i.e. $H = B$, i.e. ABC rectangle en B , en vertu de cette autre

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES

bonne vieille règle géométrique d'antan qui prétend que le chemin le plus court pour aller d'un point à une droite est la perpendiculaire !

II. Le quadrangle articulé

On pourrait tout autant parler de "double-triangle-articulé" puisqu'on considère la mécanique représentée ci-dessous :

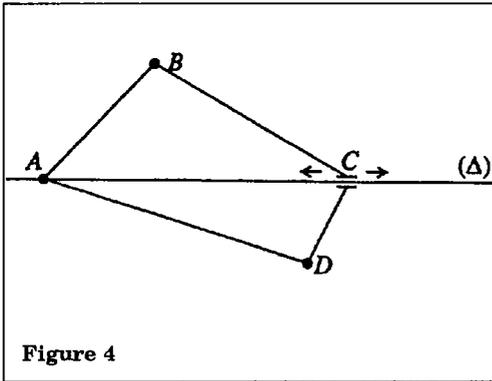


Figure 4

avec A fixe sur la droite Δ, C glissant le long de cette même droite de sorte que les longueurs AB, BC, CD, DA restent constantes. On pose naturellement $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ et $x = AC$.

Encore une fois, on peut faire appel au logiciel "le Géomètre" pour palier les éventuelles défaillances de l'intuition quant aux déformations du quadrangles pendant le déplacement du point C ! On notera que x varie entre $\max(|a - b| ; |c - d|)$ et $\min(a + b ; c + d)$.

On peut suivre les variations de grandeurs telles que la diagonale BD, les

fonctions trigonométriques associées aux angles du quadrangle mais on se rendra vite à l'évidence que les problèmes posés sont franchement plus délicats que dans le cas du triangle simple. Pour s'en convaincre, voilà un aperçu portant sur l'aire du quadrangle ABCD :

Bien sûr, la formule de Héron utilisée au I. ne se généralise pas aussi bien qu'on le voudrait au quadrilatère. Il faut en effet écrire :

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd \cdot [\cos(\beta + \delta) + 1]$$

où selon l'usage p est le demi-périmètre du quadrangle, et β et δ sont les angles ABC et ADC.

On devine qu'il y a difficulté à exprimer simplement $\cos(\beta + \delta)$ en fonction de x.

On peut en revanche penser utiliser ce qui a déjà été calculé précédemment et écrire :

$$S(x) = \sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}$$

$$\text{avec } u(x) = -x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$\text{et } v(x) = -x^4 + 2(c^2 + d^2)x^2 - (c^2 - d^2)^2$$

comme somme des aires des deux triangles ABC et ADC.

Si on restreint le but de l'étude de S(x) à la recherche de son ou de ses extrémum(s), on est obligé de constater qu'ici l'élévation au carré de S ne donne pas de simplification immédiate.

Le calcul de la dérivée de S reste néanmoins un exercice tout à fait abordable, on a en effet, sur le bon intervalle :

$$S'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} + \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

du signe de $u'(x)\sqrt{v(x)} + v'(x)\sqrt{u(x)}$
avec $u'(x) = 4x(a^2 + b^2 - x^2)$
et $v'(x) = 4x(c^2 + d^2 - x^2)$.

L'étude du signe de cette expression est tout à fait fastidieuse dans le cas général ! Une consolation, la recherche des valeurs de x qui pourraient à l'occasion annuler $S'(x)$ mène au calculs suivants :

$$(c^2 + d^2 - x^2) \cdot (-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 + b^2)^2) \\ = (a^2 + b^2 - x^2)^2 \cdot (-x^4 + 2(c^2 + d^2)x^2 - (c^2 + d^2)^2)$$

équation qui semble *a priori* du 8^e degré mais qui après simplification se trouve être une équation bicarrée ! Avec un peu de patience, on finit même par entrevoir les racines évidentes (? !); on se ramène en effet à :

$$x^4(ab + cd)(ab - cd) \\ - 2x^2[(a^2 + b^2)c^2d^2 + (c^2 + d^2)a^2b^2] \\ + 4(ac + bd)(ac - bd)(ad + bc)(ad - bc) \\ = 0$$

qui se factorise en :

$$\left[x^2 - \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \right] \left[x^2 - \frac{(ac - bd)(ad - bc)}{(ab - cd)} \right] = 0$$

Les racines ainsi déterminées coïncident avec les formules que l'on obtient par ailleurs quand, à l'aide de l'identité d'Al-Kashi, on calcule les diagonales d'un quadrangle inscrit dans un cercle. Pas si étonnant que ça, puisqu'il se trouve que l'aire d'un quadrilatère dont les quatre côtés sont donnés, a une aire maximale quand il est inscriptible ! (pour s'en convaincre, revoir la formule de Héron

généralisée au quadrilatère, donnée au début de cette deuxième partie.)

On s'en tiendra là pour l'étude de l'aire du quadrangle articulé, mais on ne quittera pas cette partie sans donner la représentation graphique de S dans un cas particulier, à savoir en prenant :

$$a = 6, b = 10, c = 7 \text{ et } d = 8.$$

$$S^2 = \sqrt{-x^4 + 272x^2 - 4096} \\ + \sqrt{-x^4 + 226x^2 - 225}$$

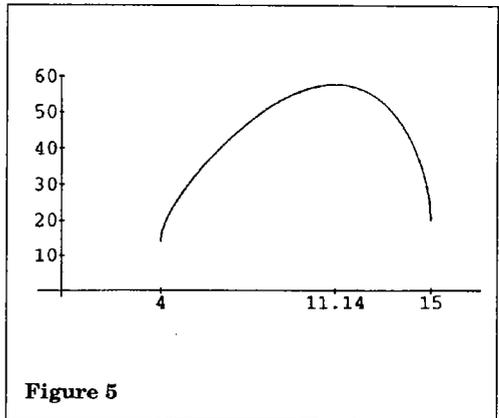


Figure 5

III. Le quadrangle inscrit

Ici, on considère un cercle de rayon unité C centré à l'origine O d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , dans lequel on inscrit un quadrangle $ABCD$ convexe. Les diagonales $[A,C]$ et $[B,D]$ se coupent en un point Ω . On décide alors de fixer le point Ω selon ses coordonnées dans le repère R , disons $(a;h)$ et de faire "tourner" les diagonales autour de ce point ; autrement dit on choisit comme variable principale l'angle (orienté,

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES

pourquoi pas) que font ces deux diagonales : appelons-le ϕ . La généralité du problème que l'on va se poser, ne sera aucunement entamée, on s'en rendra très vite compte, si on suppose la diagonale $[A,C]$ parallèle à l'axe des abscisses, d'où la figure ci-dessous :

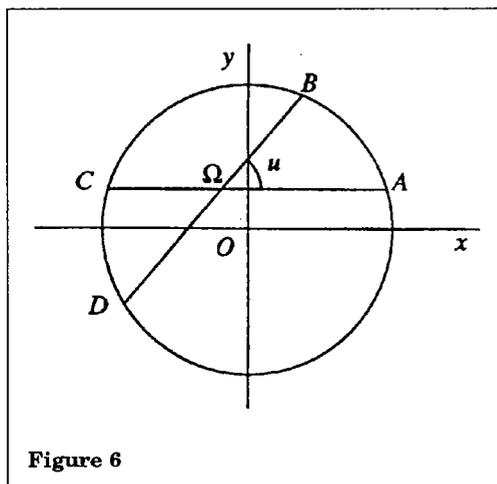


Figure 6

Intéressons-nous une dernière fois aux variations de l'aire du quadrangle $ABCD$.

Quelques remarques préliminaires s'imposent :

(1) L'aire peut être calculée, de façon avantageuse dans les conditions qu'on s'est fixées, grâce à la formule :

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin \phi$$

On établit cette formule de façon assez élémentaire à partir de la figure suivante et qui tient compte notamment du fait que les diagonales se coupent bien *entre B et D* !

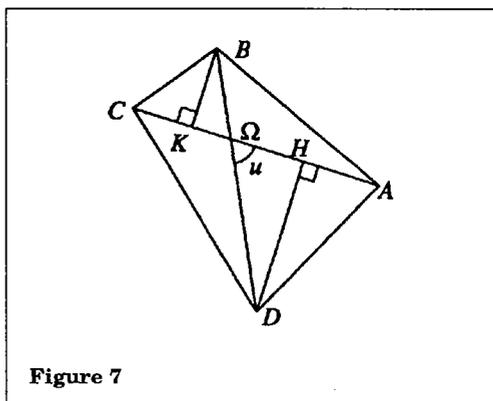


Figure 7

(2) L'équation de la droite (BD) dans le repère donné, est :

$$x \cdot \sin \phi - y \cdot \cos \phi = a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi$$

et par conséquent la distance de Ω à la droite (BD) est :

$$|a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|$$

On en déduit l'égalité

$$BD^2 = 4(1 - |a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|^2).$$

Par ailleurs, on a directement : $AC^2 = 1 - h^2$

(3) En regroupant les résultats du (1) et du (2), on obtient :

$$\frac{1}{16} \cdot S^2 = (1 - h^2) \cdot \sin \phi \cdot (1 - |a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|^2)$$

Dès lors, on peut voir S comme une fonction de la variable ϕ dépendant de deux paramètres a et h . Une fois encore, l'étude dans le cas général s'avère assez ardue, aussi s'en tiendra-t-on présentement au cas $h = 0$, c'est-à-dire au cas où la diagonale $[A,C]$ est confondue avec l'axe des abscisses.

On se ramène de la sorte à l'étude de la fonction :

$$f(\phi) = \sin^2 \phi \cdot (1 - a^2 \cdot \sin^2 \phi) \text{ avec } a \in [0;1] \text{ et } \phi \in [0; \pi].$$

On peut même restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ puisque la fonction est paire (en fait le problème des variations de l'aire est symétrique par rapport aux deux axes du père)

La dérivée de f est :

$$f'(\phi) = \sin 2\phi \cdot (1 - 2a^2 \cdot \sin^2 \phi)$$

Curiosité, la fonction f se comporte différemment selon que a se situe dans l'intervalle $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ou dans l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$.

1^{er} cas : $0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; ici, la dérivée de f est toujours positive sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, autrement dit, la fonction f croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour atteindre alors un maximum qui vaut $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - a^2$ puis décroît de $\frac{\pi}{2}$ à π , symétriquement.

2^e cas : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$; ici, on peut dresser le tableau de variations suivant :

ϕ	0	α	$\pi/2$
$f(\phi)$	+	0	-
$f(\phi)$			
	0		m

avec $\alpha = \arcsin \frac{1}{a\sqrt{2}}$, et $m = 1 - a^2$.

Il apparaît ainsi clairement que, dans le premier cas le maximum de l'aire est atteint quand les diagonales sont perpendiculaires mais qu'il en est tout à fait différemment dans le deuxième cas. Si on s'interroge sur ces directions "privilégiées" que prennent les diagonales $[B;D]$ dans le deuxième cas, pour rendre l'aire maximale, on s'aperçoit qu'il s'agit des tangentes au cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, passant par le point Ω .

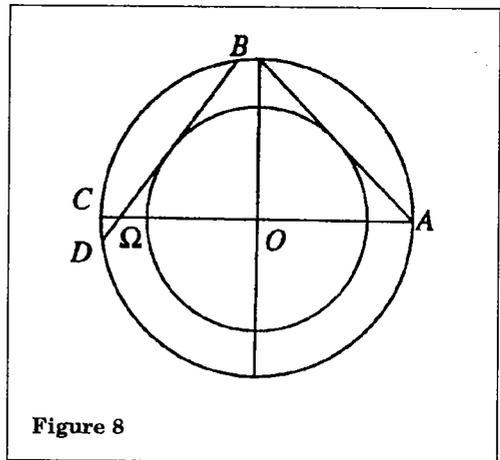


Figure 8

En effet, quand $\sin \phi = \frac{1}{a\sqrt{2}}$, alors $\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{1}{2a^2}}$, ϕ étant dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que l'équation de la droite (BD) est (cf remarque (2) ci-dessus) :

$$x - y\sqrt{2a^2 - 1} + a = 0 \text{ et par suite } d(0; (BD)) = \frac{|a|}{\sqrt{1^2 + (2a^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES

On peut resituer les extrémums de la fonction aire du quadrangle inscrit dans un autre contexte, celui de la surface d'équation $z = S(\alpha, \phi)$, l'aire étant considérée alors comme une fonction de deux variables α et ϕ , qu'on peut représenter de la façon suivante :

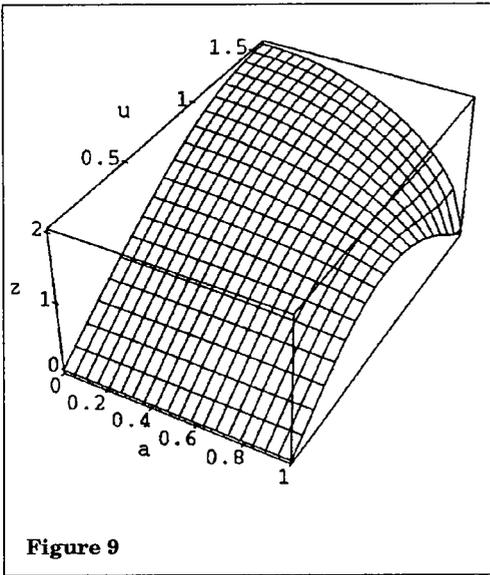


Figure 9

IV. La pyramide articulée

Un peu de géométrie dans l'espace... On se place dans une sphère de rayon r , centrée sur un repère $R = (O; x, y, z)$; Du pôle nord N situé en $(0, 0, r)$ au pôle sud situé en $(0, 0, -r)$, on déplace un plan "horizontal" H , ou plus précisément d'équation $z = r - h$, avec h égal à la distance du pôle nord à ce plan, distance qui dans la suite sera choisie comme variable principale. On construit alors une pyramide inscrite dans la sphère, de sommet N , en traçant un polygone régulier B sur le cercle intersection de cette sphère avec le plan variable.

C'est à partir de cette construction pour le moins élémentaire que l'on essaie ensuite de faire naître analytiquement les polyèdres réguliers tels que, par exemple, l'octaèdre ou l'icosaèdre.

Quelques rappels ne sembleront pas forcément inutiles :

(1) A propos, qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ? Ici, on considérera les polyèdres inscrits dans une sphère, dont toutes les faces sont des polygones réguliers et tels que chaque sommet est entouré par la même configuration.

(2) Appelons n le nombre de faces latérales de la pyramide ci-dessus ; c'est aussi le nombre de côtés de la base B (n est donc un entier supérieur à 3). Appelons α l'angle au sommet d'une des faces latérales et θ l'angle au centre de la base B , projeté orthogonal de α sur le plan H . De façon triviale, on a $\theta = 2\pi/n$ et en utilisant par exemple la croissance de la fonction tangente sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on prouve que $\alpha < \theta$. On en déduit :

$$3 \leq n < \frac{2\pi}{\alpha} \quad (*)$$

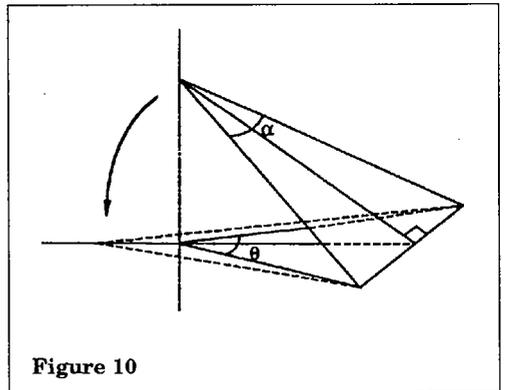


Figure 10

Si on considère que la pyramide initiale correspond à un sommet de polyèdre régulier, il faut donc admettre que α est un angle au sommet de polygone régulier. Or, le plus petit angle au sommet de polygone régulier est évidemment celui du triangle équilatéral, c'est-à-dire $\pi / 3$. On obtient finalement, en remplaçant dans (*) :

$$3 \leq n < \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \text{ donc } 3 \leq n < 6 \text{ i.e. } 3 \leq n \leq 5 .$$

Si on cherche à construire de la sorte des polyèdres réguliers, il faudra naturellement se restreindre à des pyramides régulières dont les bases auront 3, 4, ou 5 côtés au plus !

Intéressons-nous maintenant aux grandeurs variables (en fonction de h), que sont :

- a) le côté de la base, qu'on appellera c .
- b) l'arête latérale, qu'on appellera a .
- c) le rayon du cercle circonscrit à B , qu'on pourrait appelé $\dots b$.

Un calcul rapide nous amène à écrire :

$$a = \sqrt{2rh} ; \quad b = \sqrt{2rh - h^2} ;$$

$$c = 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{2rh - h^2} ;$$

soit en choisissant $r = \frac{1}{2}$, $a = \sqrt{h}$;

$$b = \sqrt{h - h^2} ; \quad c = 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{h - h^2} .$$

Une condition nécessaire pour que le polyèdre que l'on cherche à construire soit régulier et à faces triangulaires équilatérales est évidemment $a = c$! Les trois équations (du second degré !) associées aux valeurs 3,4,5 du paramètre n donnent les solutions :

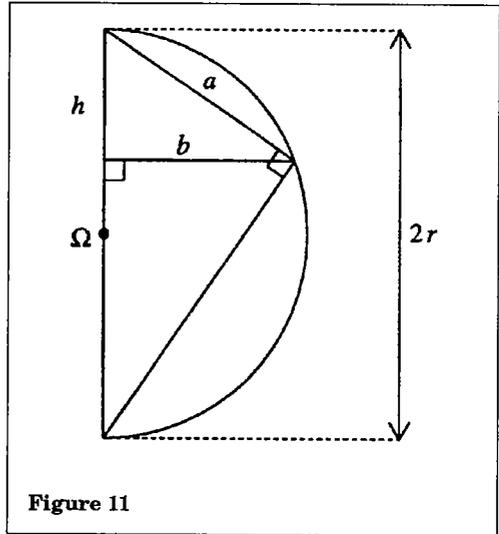


Figure 11

$$h_1 = \frac{2}{3} ; \quad h_2 = \frac{1}{2} ;$$

$$h_3 = 1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \approx 0,2764 .$$

Solutions que l'on retrouve directement par lecture graphique.

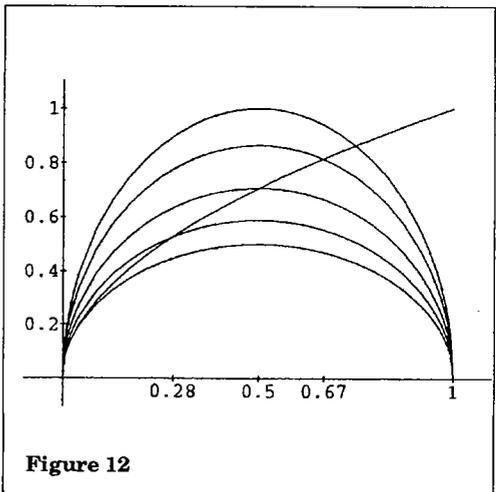
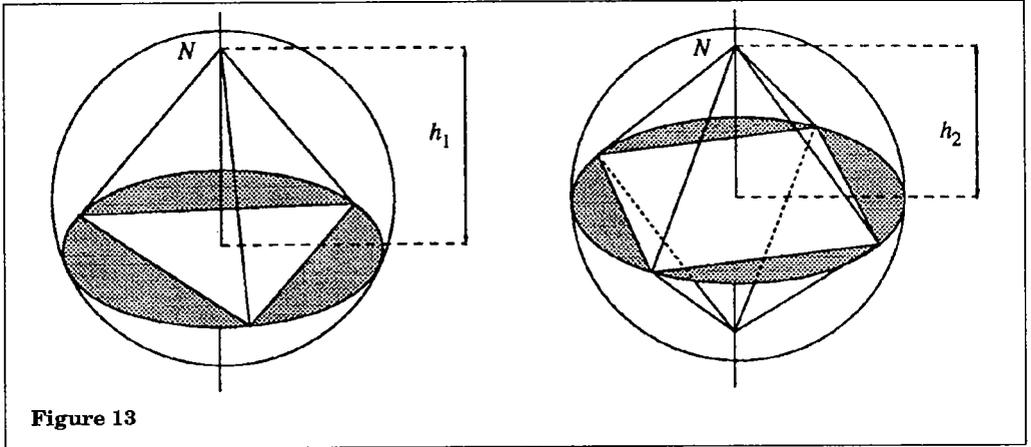


Figure 12

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES



Si les deux premières solutions conduisent rapidement au tétraèdre pour la première et à l'octaèdre pour la seconde, il n'en va pas du tout de même pour la troisième (figure 13).

qu'on pourrait appeler ...*d*. Après une âpre lutte sur les lignes trigonométriques adverses, on doit aboutir à la formule :

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2} h^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} h + 1}$$

On peut alors faire agir la symétrie de centre, le centre de la sphère initiale, sur la pyramide à base pentagonale, puis mesurer, toujours en fonction de *h*, la distance la plus courte qui sépare les sommets des deux bases pentagonales,

Il nous reste à vérifier graphiquement, ce que l'on espérait bien observer, c'est-à-dire que les trois courbes : $y = a(h)$, $y = c(h)$ et $y = d(h)$ sont concourantes...

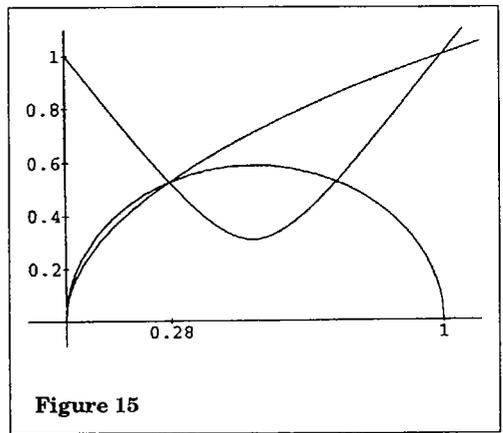
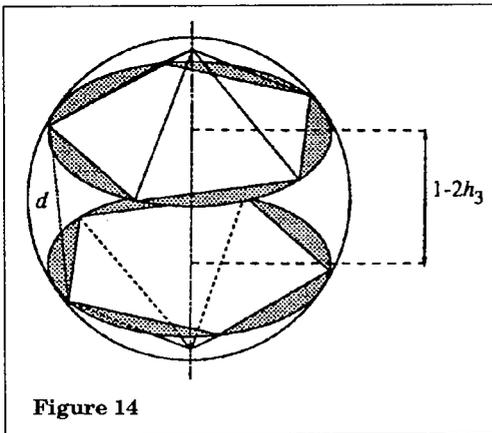


Figure 14

Figure 15

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BKOUCHE (Rudolf) : *Variations autour de la réforme de 1902/1905*, in Hélène Gispert et als, *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, n°34, Paris, 1991.
- [2] CHASLES (Michel) : *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1878, 6.
- [3] CHASLES (Michel) : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861, t. LII.
- [4] CHASLES (Michel) : *Aperçu historique des méthodes en Géométrie*, Paris, Gauthiers Villars, 1889.
- [5] CHASLES (Michel) : *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Paris, Hachette, 1870.
- [6] HAMEL (Thierry) : "Autour du théorème de Ptolémée", dans *Aimer faire des mathématiques*, t. 1, Rouen (Irem), Juin 1994.
- [7] HAMEL (Thierry) : "Le Billard Circulaire", dans *Aimer faire des mathématiques*, t. 2, Rouen (Irem), Juin 1995.
- [8] HAMILTON (William Rowan) : "On quaternions and the rotation of a solid body", *Proceedings of the Royal Irish Academy*, t. IV (1850), pp. 38-56, *MP3*, pp. 381-391.
- [9] HAMILTON (William Rowan) : *Lectures on Quaternions*, Dublin, Hodges & Smith, 1853.
- [10] HOUEL (Jules) : *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1867.
- [11] LE HIR (Gildas), LACHAUX (François), SINEGRE (Luc) : *Petite Géométrie Dédéiste*, Rouen (Irem), 1988.
- [12] HAMEL (Thierry) SINEGRE (Luc) VIVIEN (Frédéric) : *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre*, Rouen (Irem), (à paraître).
- [13] POINSOT (Louis) : "Théorie nouvelle de la rotation des corps", Paris, 1834, *Journal de Mathématiques Pures et appliquées*, t. XVI, 1851, pp. 9-72, 73-129, 289-336.
- [14] SINEGRE (Luc) : "Les quaternions et le mouvement du solide autour d'un point fixe chez Hamilton", *Revue d'histoire des mathématiques*, I (1995), pp. 83-109.