
LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

**Un lieu de débat pour les
enseignants de Mathématiques**

La rubrique « POINT DE VUE » est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.

Dans ce numéro, Philippe LOMBARD revient sur les points de vue de R. BKOUCHE et A. DOUADY des numéros 24 et 25.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages.

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine (*)

Cela commence à se savoir : quelqu'un a inventé un jour le mot "*noosphère*" pour désigner (paraît-il) l'ensemble des personnes qui s'intéressent aux problèmes de la *transposition didactique*. C'est-à-dire à la bonne manière de prendre le savoir avant de l'inculquer aux élèves...

Ne s'agit-il que de parler des quelques boucs émissaires chargés de mettre un point final aux programmes ? Faut-il aller jusqu'à y inclure aussi les diverses commissions qui ont la redoutable tâche de tirer au sort, tous les quatre ou cinq ans, les chapitres qui seront permutés à l'intérieur des classes du collège ou supprimés des classes du lycée ? Doit-on prendre l'expression au sens le plus large et considérer que la *Noosphère* désigne tous ceux qui participent à "l'air du temps" en matière d'idées sur les contenus enseignés ? Irons-nous jusqu'à y inclure tous les professeurs qui, livrés à eux-mêmes, sont naturellement obligés d'avoir une position sur cette fameuse *transposition didactique* qu'ils transposent didactiquement tous les jours ? S'il faut considérer le sens le plus restreint ou, au

contraire, le plus large, on voit mal l'intérêt de créer un mot nouveau pour baptiser une notion qui ne recouvrirait pas grand chose de bien neuf. Mais s'il faut décider de ce qui constitue l'ensemble de "ceux qui participent à la genèse de l'air du temps en matière d'enseignement des mathématiques" nous voilà au défi de préciser notre pensée... Qu'à cela ne tienne, nous appellerons pour notre part *Noosphère* l'ensemble de tous ceux qui lisent un tant soit peu la revue *Repères*... en laissant le soin à chacun de se convaincre par raison raisonnée — analyse et synthèse — que cette sphère-ci n'est autre que ce lieu-là...

Bien, me direz-vous, nous voici enfin fixés, mais à quoi cela va-t-il nous servir de savoir que nous sommes les constituants de votre *Noosphère* ?

Patience ! Je vous ferai d'abord remarquer que le mot "*noosphère*" se rapporte étymologiquement à la "sphère de l'esprit" et qu'il n'y a donc aucune insulte particulière à chercher en la matière. Et puis j'ajouterai que "l'ensemble des lecteurs de

(*) Le présent texte reprend (paragraphe en italiques) une partie de la conférence de l'auteur intitulée "*Existe-t-il une didactique des mathématiques ?*", parue dans les Actes du colloque Inter-Irem Premier Cycle de Saint-Nazaire (1993)

Repères est une compagnie qui n'a rien de dévalorisant puisqu'il suffit de noter que cet ensemble contient, au minimum, tous les gens très bien qui y écrivent ! et que cela va des professeurs particulièrement motivés par leur métier à quelque grand mathématicien qui nous fait parfois l'honneur de nous confier quelque page, en passant évidemment par tout ce que la "didactique des mathématiques" compte comme porte-parole éclairé... Mais à dire vrai ce n'est pas exactement là que je veux en venir : je voudrais surtout vous faire observer que le mot "noosphère" est beaucoup plus qu'un de ces mots comme "contrat didactique", "institutionnalisation", "dévolution", "transposition didactique", etc., qui se traduisent immédiatement dans le langage courant par un synonyme ayant pour seul défaut d'être aisément compréhensible par tout un chacun. Non. Le mot "noosphère" est d'abord une de ces trouvailles qui défient les définitions simples, frappent les imaginations, suscitent les curiosités, déclenchent les questionnements en se jouant des perplexités et en brisant tous les consensus. C'est aussi, de surcroît, beaucoup plus que tout cela. Le mot "noosphère" est en réalité à la Noosphère ce que le papier tournesol, la liqueur d'hélianthine, le bleu de thymol, le jaune d'alizarine ou le rouge de méthyle sont à la chimie analytique : c'est un véritable *indicateur coloré* particulièrement idoine pour repérer le moindre des sujets sensibles, le plus petit des thèmes à hauts risques ou le moins rebattu des catalyseurs de conflits. Bref : c'est le détecteur privilégié des "transpositions didactiques" maudites, susceptibles, par leur seule évocation, de déclencher subitement des passions incontrôlables.

Je m'explique... Considérons par exemple un sujet qui pourrait paraître ano-

din à tous ceux qui ne font pas partie de la Noosphère, à ceux qui ne lisent pas vraiment leur exemplaire de *Repères* ou même à ceux qui négligent tout simplement de renouveler leur abonnement... Intéressons-nous à l'*enseignement des limites et de la continuité* en première et terminale des lycées. Déjà dans le numéro 11, on pouvait lire dans un article consacré à ce sujet : « Il est difficile de lire cette modification [du programme] [...] autrement que comme un désaveu au moins partiel du processus de transposition didactique qui s'était développé autour de l'objet "fonction de référence" et la marque de la volonté de la noosphère de profiter de l'adaptation nécessaire des programmes pour infléchir ce processus transpositif »... L'on trouvera aisément l'équivalent dans le "Point de vue" de Rudolf Bkouche du numéro 24... Peut-on soupçonner ces auteurs d'utiliser le mot "noosphère" dans un sens où il ne désignerait plus que les quelques personnes dites "responsables" des programmes (voir plus haut) et dont il faudrait dénoncer les manigances ou fustiger l'incompétence ? Bien sûr que non puisque, nous l'avons déjà vu, le vocable deviendrait alors un simple mot quelque peu original ou pédant pour désigner ce que tout un chacun appelle communément le "système" ou la "commission des programmes"... La seule explication raisonnable est la suivante : nous sommes en face d'un phénomène particulièrement intéressant où l'on peut observer des membres de la Noosphère critiquer celle-ci sans se rendre compte que leur discours doit nécessairement s'appliquer à eux-mêmes... Un peu comme si quelqu'un, lisant ces lignes, venait tout de go nous dire que l'ensemble des lecteurs de *Repères* est constitué de "guignols", sans se rendre compte qu'il en fait nécessairement partie... C'est l'effet "indicateur coloré"

dont je voulais parler. Ce n'est rien d'autre qu'un symptôme marquant un sujet difficile, un de ces sujets où, par une sorte de schizophrénie structurale, la Noosphère ne peut que se déchirer, et ceci à travers un phénomène d'inclusion-exclusion : celui qui parle est dans la Noosphère mais il nous en parle comme s'il n'y appartenait pas...

Comme par un fait exprès (mais que ne dirait-on pas si la Noosphère se mettait à la psychanalyse des profondeurs...), comme par un fait exprès, donc, la dernière manifestation en date du phénomène met en avant le problème de l'inclusion-exclusion dans le passage à la limite : « Faut-il, lorsque l'on formalise " x tend vers a ", mettre ou ne pas mettre la condition " $x \neq a$ " ? ». Comme Bkouche s'avançait quelque peu en invoquant les positions de la communauté mathématique pour assurer que " $x \neq a$ " était la meilleure solution, Adrien Douady nous informe, dans le numéro 25, du point de vue de la grande majorité de cette communauté-là.

Il nous confirme que, malgré leur habitude de couper les cheveux en quatre, les mathématiciens n'ont guère de solution idéale et qu'il leur faut bien moyenner : choisir de privilégier la continuité pour l'amender lorsqu'il faut n'envisager que la limite "stricte", ou choisir la "limite stricte" en l'amendant lorsqu'il est besoin de se centrer sur la continuité. Alors les mathématiciens ont soigneusement pesé le pour et le contre (du moins j'imagine) et il ont retenu l'option qui leur paraissait — c'est une idée à prendre — la plus propice à éviter les pièges... Tant et si bien que les mathématiciens "modernes" penchent désormais pour une façon de présenter les choses qui n'a rien à voir avec celle qui était défendue par Rudolf Bkouche...

Je dois dire que cela ne me surprend qu'à demi... Mais chacun le sait depuis belle lurette : bien qu'un peu dépassé aujourd'hui par l'introduction du mot "noosphère", le mot "moderne" fut lui aussi, en son temps, au même titre que le tournesol et l'hélianthine (et j'en passe), l'un des rares indicateurs colorés dont disposait la balbutiante Noosphère pour détecter les sujets difficiles ! Il faut nous rendre à l'évidence : le thème des limites et de la continuité réagit positivement à tous les tests analytiques auquel on peut le confronter. Il s'agit indéniablement d'un sujet ultrasensible, d'un sujet qu'il nous faut bien qualifier de "maudit"...

N'existerait-il donc pas, dans quelque recoin de la Noosphère, voire à portée de la main — comme c'est souvent le cas lorsque les passions prennent le pas sur la raison et nous aveuglent au point de ne plus apercevoir ce qui, pourtant, nous crève les yeux... —, n'existerait-il donc pas, disions-nous, dans quelque recoin de la Noosphère, un moyen de sortir de ce genre de débat ? Chacun l'aura compris, c'est cette œuvre pie qui est précisément le but du présent "Point de vue"...

Mais permettez-moi auparavant d'ouvrir une parenthèse, car il me faut pour cela tenter tout d'abord de donner un aperçu aussi simple que possible d'un sujet difficile : la *Dialectique outil-objet*... Je pense que chacun pourra dès lors parfaitement se faire une opinion. *Introduite il y a bientôt une dizaine d'années par Régine Douady, la notion de "dialectique outil-objet" repose sur une idée relativement simple à expliquer parce que tout à fait universelle. On pourrait dire qu'elle date de bien avant que le monde ne soit monde, et qu'elle a pris naissance le jour où le premier animal s'est*

servi d'une pierre pour briser une noisette ou, plus probablement, le crâne d'un congénère. Il venait d'inventer "l'outil" et par là-même le rapport "dialectique" entre l'objet et la fonction qu'il venait de lui assigner. Inutile de préciser que, d'énormes progrès technologiques ayant été accomplis, ce rapport dialectique s'est considérablement enrichi depuis cette époque ! Non pas qu'il ne soit plus question d'attenter aux boîtes crâniennes ; mais on en vint, comme l'on sait, à créer de toute pièce des objets destinés à remplir de telles fonctions. On apprit même à détourner des outils pour en créer d'autres, voire à transformer des outils en simples objets à caractère plus ou moins inutile. Ainsi une innocente bouteille (objet dont la fonction d'outil passe pour naturelle) peut très bien achever une carrière bien remplie (si l'on peut dire !), pour devenir le plus magnifique des supports de lampe (nouvel outil d'usage courant), tout en servant au passage d'objet d'ornement du plus bel effet... et accessoirement — pourquoi pas ? — d'instrument contondant dans le cadre d'une délicieuse intrigue policière !

On aura compris que l'idée originale de Régine Douady est d'avoir transposé au domaine des objets mathématiques l'étude des rapports dialectiques qu'ils sont susceptibles d'entretenir avec leurs possibilités d'utilisation comme outils dans la résolution de problèmes...

C'est en premier lieu un important positionnement épistémologique que d'avoir rappelé cette "utilité" des concepts mathématiques, à une époque où l'influence des "maths modernes" avait laissé croire que les objets forgés par les mathématiciens s'apparentaient à de transcendantales chimères dont les seules contraintes étaient de s'inscrire dans une construction logique dont,

au fond, personne ne connaîtrait vraiment les finalités.. Or tous les concepts mathématiques ne sont rien si on néglige leur fonction, c'est-à-dire leur nature "d'outil". Qu'il s'agisse de résoudre un problème de mécanique, d'acoustique, de physique des particules, ou qu'il s'agisse "simplement" d'élucider une épineuse énigme d'arithmétique ou de géométrie, ces outils ont pour la plupart demandé des siècles de fréquentation et de mise au point. Et s'il sont devenus peu à peu des sortes d'objets indépendants de leur contexte originel, c'est toujours pour acquérir une puissance plus grande en servant à des problèmes inattendus, et c'est très souvent parce qu'ils se sont mis, à leur tour, à servir de champ d'action à des outils "d'une nouvelle génération" destinés à la résolution de questions plus difficiles.

Le point de vue épistémologique qui consiste à ne considérer qu'un seul schéma disant : «les nombres (ou les fonctions, ou les vecteurs, etc.) ont été inventés d'abord comme outils en vue de résoudre tel ou tel problème, sont devenus ensuite des objets étudiés pour eux-mêmes dans le cadre d'ensembles de nombres (de fonctions, de vecteurs, etc.)», est une approche par trop réductrice. Elle est séduisante uniquement dans l'optique ensembliste où on peut regarder, en effet, l'évolution des nombres — ou des fonctions — sous forme d'une escalade progressive dans l'édification de collections dotées de structures plus ou moins spécifiques. Mais il convient de ne pas négliger de nombreux autres aspects de ces rapports dialectiques entre l'aspect "outil" et l'aspect "objet"... Ainsi un nombre, une fonction, une figure, peuvent être regardés comme des objets intéressants en eux-mêmes, et pas seulement dans les liens qu'ils entretiennent avec d'autres objets analogues, comme c'est surtout le cas dans

le point de vue purement structural. Un nombre peut être fascinant par le mystère qui entoure ses décimales, une fonction peut être étudiée pour la nature particulière de son développement en série, une figure peut receler une foule de phénomènes exceptionnels, etc., etc.

De même, il n'est pas rare qu'un objet découvert dans le cadre algébrique se révèle comme un outil d'un grand intérêt dans le cadre de la géométrie, ou inversement, qu'une théorie géométrique ou analytique permette de résoudre certaines questions d'arithmétique... Enfin il serait faux de croire qu'une règle générale vaille que la naissance d'un objet-outil ait toujours lieu dans le contexte de problèmes qui demandent la création d'outils inconnus jusqu'alors : les nombres négatifs, par exemple, sont d'abord apparus comme des "parasites" donnant de "fausses solutions" aux questions qui étaient posées, et il en va largement ainsi pour les nombres complexes... De même la notion de fonction, qui semble bien être "l'outil par excellence", n'est sans doute rien d'autre que le résultat de la rencontre fortuite, sous les yeux d'un Galilée, de la loi de la chute des corps et des propriétés intéressantes de l'objet géométrique "parabole" étudié antérieurement sans autre finalité que de percer le secret de sa forme...

Régine Douady, sans négliger la complexité du problème épistémologique, se limite surtout à l'éclairage apporté par l'idée de "changement de cadre" à l'intérieur des divers domaines mathématiques, et elle s'attache évidemment au positionnement didactique qui peut résulter de la dialectique outil-objet. C'est en effet une question primordiale pour l'enseignement : « doit-on apprendre un concept donné en le rencontrant plutôt sous son aspect "d'objet", ou

plutôt sous son aspect "d'outil" ? ». Un enfant doit-il d'abord apprendre le mécanisme de l'addition ou de la division par 2, avant d'être confronté à des problèmes de bilans ou de partage, à propos de jeu de billes ou de tirelire ? Doit-il passer par la résolution de tels problèmes pour découvrir le "principe" de l'addition ou de "l'idée" de moitié ? Un élève de collège doit-il pénétrer dans l'univers des équations algébriques à partir de problèmes "concrets", ou doit-il avoir rencontré au préalable des "équations abstraites" afin de n'avoir pas à les découvrir au moment où il est déjà en face d'autres difficultés ? Un lycéen peut-il, ou doit-il, saisir la notion de fonction uniquement à travers l'étude plus ou moins détaillée d'un exemple particulier ?

Comme on le voit, un des premiers mérites de Régine Douady est d'avoir dégagé une problématique particulièrement importante (et difficile) qui est au centre de nombreuses questions de la didactique. On peut notamment considérer que le rappel de l'aspect "d'outil" des notions mathématiques n'est pas pour rien dans les tentatives actuelles pour développer les idées pédagogiques autour de démarches comme celle de "modélisation". Mais, bien que les références à la "dialectique outil-objet" ne manquent pas dans la littérature pédagogique, on en arrive souvent à s'interroger sur les prolongements effectifs apportés à cette théorie depuis bientôt dix ans...

Alors rêvons encore un peu avant de refermer cette parenthèse : ne serait-il pas envisageable que le problème posé par la notion de limite et celle de continuité constitue une nouvelle manifestation de cet aspect "dialectique" entre "outil" et "objet" ? Ne pourrait-on pas raisonnablement penser que si le "passage à la limite" est,

presque par excellence, l'outil du mathématicien, son apprentissage suppose une pédagogie progressive ? Serait-il si déplacé de se demander si le "langage des epsilon", autre outil des mathématiciens, ne devrait pas attendre la familiarisation des élèves avec les objets auxquels il s'applique ? Ne devrait-on pas méditer sur les rapports complexes avec les statuts d'outil ou d'objet entretenus, actuellement et dans l'histoire,

par la notion de fonction continue ? Ne pourrait-on en conclure, enfin, que le choix du mathématicien n'est pas nécessairement, de ce fait, celui qui doit, sans réflexion approfondie, être imité par la Noosphère ?...

Bref : on rêve d'une analyse dépassionnée. Mais, naturellement, je ne suis pas le mieux placé pour m'y coller...