
QUELQUES REMARQUES À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Rudolf BKOUCHE
IREM de Lille

"Former une génération nouvelle pour un monde nouveau traduit en fait le désir de refuser aux nouveaux arrivants leurs chances d'innover." (1)

Hannah Arendt

Cet article a été écrit après la lecture du texte "Perspective de l'enseignement de la géométrie au XXI^e siècle", document de travail pour ICME VIII publié dans *Repères-IREM* (2). Ce document présente quelques questions actuelles de l'enseignement de la géométrie parmi lesquelles nous citerons celles posées par l'impact des "nouvelles technologies" sur l'enseignement, problème que nous aborderons ci-dessous. Il me semble cependant que ce texte néglige une dimension, celle de la

construction de l'intelligibilité du monde ; la géométrie y semble réduite à son seul aspect instrumental (au sens où l'entend Jean-Pierre Le Goff dans son ouvrage *Le Mythe de l'Entreprise* (3)), autant sur le plan de ses rapports avec les divers domaines de la connaissance que sur le plan de sa place dans l'enseignement scientifique ; c'est une telle réduction, me semble-t-il, qui conduit à poser la question de l'impact dans l'enseignement des nouveaux instruments offerts par les techniques modernes, sans poser la question de leur pertinence, comme si la seule existence d'un instrument suffisait à imposer son usage ; c'est aussi cette réduc-

(1) Hannah Arendt, "La crise de l'éducation" (traduction de Chantal Vezin) in *La crise de la culture*, Gallimard, Paris 1972, réédition 1990, p. 228.

(2) "Perspective de l'enseignement de la géométrie au XXI^e siècle" document de travail pour ICME VIII, *Repères-IREM* n°18, janvier 1995.

(3) Jean-Pierre Le Goff, *Le Mythe de l'Entreprise*, La Découverte, Paris 1992.

 QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
 L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

tion qui conduit à chercher dans les diverses théories de l'apprentissage les moyens d'obtenir des réponses "objectives" aux divers problèmes posés par l'enseignement de la géométrie.

Nous nous proposons ici de revenir sur quelques uns des points abordés dans le texte ICME, en mettant l'accent sur le rôle de la géométrie dans la construction de l'intelligibilité du monde, ce qui, me semble-t-il, est la raison première de son enseignement ; les raisons techniques, si elles ne sont pas négligeables, me semblent secondes, d'autant qu'une vision purement instrumentale de la connaissance géométrique condui-

rait à réduire l'enseignement d'icelle aux seuls qui auront besoin de l'utiliser dans leur vie professionnelle. En outre il me semble que c'est la prise en compte des divers enjeux d'un domaine de la connaissance qui peut nous permettre d'aborder les problèmes de son enseignement, bien plus que des théories de l'apprentissage qui restent, somme toute, réductrices ; si les diverses théories cognitives peuvent nous apprendre sur les phénomènes de cognition, elles ne sauraient rendre compte d'une activité (l'acte de connaissance) qui relève essentiellement du sens que les hommes donnent, individuellement ou collectivement, à leurs actes.

Les enjeux de la connaissance géométrique

On ne peut mieux poser le problème de la perte de sens de l'enseignement de la géométrie qu'en revenant à cette question récurrente : quelle est la place de la figure dans la démonstration géométrique ? Autant poser la question de la place de la chaleur dans le raisonnement thermodynamique, ou celle de la place des animaux dans l'étude de la zoologie.

On retrouve ici, au mieux une influence cognitiviste, que ce soit celle du piagétisme des années soixante et soixante-dix (4) ou celle des diverses formes du cognitivisme actuel (5), une conception de la connaissance qui, pour la rendre objectivable, la réduit à des processus en interaction ou à

des tâches à effectuer de façon convenablement réglée, au pis le seul souci d'une réussite scolaire indépendante de tout enjeu de connaissance. Dans les deux cas, la construction de la connaissance (l'acte de connaître !) est réduite à une suite de procédures, l'enseignement n'étant plus que l'apprentissage de ces procédures.

On oublie ainsi l'un des enjeux de la connaissance scientifique, celui de comprendre le monde, c'est-à-dire de construire les instruments de l'intelligibilité du monde. C'est ici la tradition des *Lumières* qui est en jeu lorsque l'on sait que dans cette tradition les enjeux de connaissance se définissent à la fois dans le désir

(4) Jean Piaget, "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence" in Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnérowicz, Choquet, Gattegno, *L'Enseignement des mathématiques*, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955.

(5) Pour une introduction aux sciences cognitives nous renvoyons à l'ouvrage de Francisco J. Varela, *Invitation aux sciences cognitives*, traduit de l'anglais par Pierre Lavoie, nouvelle édition, Editions du Seuil, Paris 1996, ainsi qu'à l'ouvrage collectif édité par Daniel Andler, *Introduction aux sciences cognitives*, Gallimard, Paris 1992.

de comprendre le monde et dans la volonté d'agir sur le monde (6).

En ce sens, c'est moins l'invention de l'enseignement du XXI^e siècle qui est en jeu que la prise en compte, dans l'enseignement scientifique, de la construction de l'intelligibilité du monde. Mais peut-être n'est-ce là qu'une forme d'archaïsme ? Il faut alors savoir être archaïque !

*L'enseignement de la géométrie :
un historique*

Dans la tradition française de l'enseignement des mathématiques qui s'est établie depuis le XIX^e siècle, la géométrie a joué un rôle important, s'appuyant sur les deux grands traités publiés au début du XIX^e siècle, celui de Legendre (7) et celui de Lacroix (8). Cette place importante de la géométrie s'appuyait, même lorsque certains aspects en étaient critiqués (9), sur la prégnance du modèle euclidien dans

la construction de la science, et la rigueur du discours démonstratif euclidien faisait de l'enseignement de la géométrie le lieu de la formation de l'esprit rationnel comme cela fut souvent dit et écrit.

Cette place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques sera remise en cause dans les années soixante de notre siècle par le courant dit des *mathématiques modernes*. Se proposant de combler le lien entre les mathématiques enseignées et les mathématiques de la recherche (la science déjà faite et la science qui se fait, comme on disait alors), ce courant s'appuyait sur la méthode axiomatique de Hilbert et le point de vue des structures développé par Bourbaki, et en appelait aux conceptions pédagogiques de Piaget, lequel identifiait, quelque peu abusivement, le développement structural de la reconstruction bourbakiste des mathématiques et le développement de la connaissance géométrique chez l'enfant (10).

Aujourd'hui, après l'abandon de la réforme des *mathématiques modernes*, la géométrie semble reprendre sa place dans l'enseignement des mathématiques bien que l'histoire des dernières réformes montre que cette place reste instable (11). Mais ce retour, même partiel, de la géométrie correspond-il à un retour à la tradition présentée ci-dessus ou, du moins, à un retour à la place du savoir géométrique dans l'enseignement scientifique ? une lecture attentive des programmes et des commentaires les accompagnant ainsi que

(6) La question se pose de l'actualité de cette tradition ; peut-être est-elle condamnée à disparaître ? Cette fin de siècle marquerait ainsi la fin des *Lumières* ; sur le plan de l'enseignement, on peut lire la fin de la tradition des *Lumières*, d'une part avec l'importance prise par ce que l'on appelle en France la *professionnalisation*, d'autre part avec ce que j'appellerai la *conception logicialiste de l'enseignement* sur laquelle je reviendrai ci-dessous.

(7) Adrien-Marie Legendre, *Eléments de géométrie*, Paris 1793, douzième édition 1823. Notons l'existence d'éditions posthumes réécrites par Blanchet au cours du XIX^e siècle.

(8) Sylvestre-François Lacroix, *Elémens de Géométrie*, Paris 1793, quatrième édition 1804. Dans la quatrième édition Lacroix expose, dans un discours préliminaire, ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie.

(9) Les critiques les plus importantes furent celles des réformateurs de 1902/1905 (cf. Rudolf Bkouche, "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert et al, *La France mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences n° 34, Paris 1991).

(10) Rudolf Bkouche, "L'enseignement des mathématiques en France, 1970-1990" in *La Science au Présent* (2 volumes), *Encyclopædia Universalis*, Paris 1992, volume II, pp. 491-493.

(11) Les derniers programmes des lycées nous montrent un reflux de la géométrie.

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

certaines pratiques pédagogiques nous conduisent à poser quelques questions sur la signification d'un tel enseignement : acquisition d'une connaissance de la géométrie élémentaire ou simple prétexte à pédagogie ? quant à l'insistance sur le concret et la méfiance envers toute théorisation, lesquelles se manifestent autant dans les discours sur l'enseignement que dans certaines pratiques pédagogiques, elle pose la question même du sens d'un enseignement scientifique.

*La place de la géométrie dans
la connaissance*

Mais peut-être faut-il, avant de parler de l'enseignement d'un domaine de la connaissance, poser la question de la signification de ce domaine de la connaissance aujourd'hui.

En ce qui concerne la géométrie, il faut prendre en compte ce que nous avons appelé dans un article antérieur (12) une *dé géométrisation* du quotidien dans une société de plus en plus *numérisée* par l'informatisation ; ainsi la lecture numérique du temps via les cadrans à cristaux liquides qui se substitue à la lecture géométrique de la position des aiguilles sur le cadran d'une montre ou d'une horloge, ainsi la pesée numérique qui remplace la pesée géométrique de la balance romaine ou de la balance de Roberval. Ainsi disparaît toute une part d'une culture géométrique "quotidienne" (13), ce qui ne peut être sans influence sur l'enseignement.

Cependant, à côté de cette dé géométrisation, la géométrie réapparaît sous une forme plus sophistiquée dans les domaines les plus avancés de la science et de la technique ; on peut citer, d'une part la géométrisation universelle que l'on rencontre dans divers domaines de la science d'aujourd'hui, d'autre part l'importance de la géométrie dans le nouveau domaine des images de synthèse.

Ainsi se mettent en place de nouvelles pratiques géométriques qui sont moins celles de la géométrie élémentaire (laquelle se fondait sur l'appréhension des situations spatiales et cette notion floue que l'on a appelé l'intuition géométrique) que celles liées à la géométrisation de certains domaines de la connaissance.

Pour préciser ce que nous entendons par cette géométrisation, nous rappellerons les trois aspects de la géométrie développés dans notre article "Enseigner la géométrie, pourquoi ?" cité ci-dessus, d'abord la géométrie comme science autonome, autrement dit la science des *situations spatiales*, ensuite la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance, enfin la géométrie comme langage et comme représentation, ce que l'on peut appeler *l'aspect métaphorique* de la géométrie, lequel constitue le fondement de la géométrisation.

Pour une présentation de ces trois aspects nous renvoyons à notre article cité,

(12) Nous renvoyons ici à notre article "Enseigner la géométrie, pourquoi ?" (*Repères-IREM*, n° 1, octobre 1990) dont nous reprenons une partie.

(13) Sur cette culture géométrique "quotidienne" et

ses rapports avec les mathématiques, nous renvoyons au chapitre I de *L'Archipel des isométries*, publié par le Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve 1982.

revenant essentiellement sur le troisième aspect qui représente un point important des mathématiques contemporaines (14).

En ce qui concerne les deux premiers aspects, disons seulement que l'intervention des situations spatiales dans divers domaines de la connaissance implique que la géométrie ne relève pas du seul domaine mathématique. La géométrie intervient ainsi en géographie, en astronomie, dans les sciences physiques, pour ne citer que quelques uns de ces domaines de la connaissance, et participe à leur développement tout autant que ceux-ci participent au développement de la géométrie.

La géométrie ne relève donc pas du seul domaine mathématique (au sens où on l'entend aujourd'hui) mais participe tout autant du domaine des sciences physiques. La distinction en une *géométrie mathématique* et une *géométrie pratique*, pour reprendre la distinction explicitée par Einstein (15), peut être considérée comme récente. Si la distinction entre les mathématiques et la physique est ancienne (16), la géométrie est une et les objets qu'elle étudie sont liés au monde physique ; que ces objets mathématiques participent des idées platoniciennes ou qu'ils soient des "abstractions" issues de la connaissance sensible, leur existence est antérieure à leur étude et la tâche du géomètre est de découvrir leurs propriétés. La découverte

des géométries non-euclidiennes a conduit à penser la multiplicités des géométries ce qui posera le problème de l'autonomie de la géométrie par rapport au réel et conduira à redéfinir les conditions de la rationalité scientifique ; cela se traduira, quant à la géométrie, par la construction hilbertienne (17) ; une géométrie est alors, du point de vue mathématique, définie par une axiomatique formelle et la physique se donne pour tâche de déterminer parmi les géométries mathématiques celle qui représente au mieux le donné empirique. Le lien entre mathématiques et physique n'est plus qu'un rapport de convenance, c'est cela que dit Reichenbach écrivant :

"Mathematics reveals the possible spaces ; physics decides which among them corresponds to physical space" (18)

Qu'elle soit une et ainsi apte à représenter le monde de la nature, ou qu'elle soit multiple permettant ainsi de chercher parmi ses constructions celles qui représentent au mieux le monde empirique, la géométrie apparaît ainsi comme un lieu essentiel ou se construit l'intelligibilité du monde ; c'est cela qui nous permet de définir (ou de redéfinir) sa place dans l'enseignement scientifique, en précisant

(14) On peut lire à ce sujet l'article de Jean Dieudonné, "The universal domination of the geometry", *International Congress of Mathematical Education*, Berkeley 1980.

(15) Albert Einstein, "La géométrie et l'expérience" (1921) (traduction Solovine) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Gauthier-Villars, Paris 1972.

(16) Aristote, *Physique*, texte établi et traduit par Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1973, 193b-194a.

(17) David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971.

(18) Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1927), translated by Maria Reichenbach and John Freund, with introductory remarks by Rudolf Carnap, Dover, New York 1957, p. 6. Notons la double interprétation du terme "decides" ; soit l'espace physique a une structure géométrique déterminée et le physicien doit découvrir cette structure parmi les structures possibles, soit la structure est déterminée par le physicien pour rendre compte des phénomènes ; la préface de Carnap montre que c'est la seconde interprétation qu'il faut lire.

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

le lien entre l'enseignement de la géométrie (voire plus généralement des mathématiques) et l'enseignement des autres disciplines scientifiques. Cela implique que les divers domaines du savoir où la géométrie intervient soient abordés dans l'enseignement de la géométrie, non comme de simples applications, mais comme une part constitutive de la connaissance géométrique. Cela implique aussi que la géométrie apparaisse dans l'enseignement des disciplines où elle intervient, non comme un simple outil technique à utiliser en cas de besoin, mais comme une part de ces disciplines.

Nous abordons maintenant ce troisième aspect de la géométrie que j'ai appelé l'aspect *métaphorique*, savoir, la géométrisation considérée comme *mode de représentation* de phénomènes qui, *a priori*, ne relèvent pas de la géométrie (au sens où celle-ci est l'étude des situations spatiales) ou comme *mode d'expression langagière* de ces mêmes phénomènes ; qu'elle renvoie à des images ou qu'elle renvoie à un langage, la géométrisation permet une nouvelle approche et par conséquent une compréhension nouvelle des phénomènes étudiés, à la fois sur le plan de la rationalité (c'est-à-dire des modes de raisonnement) et sur le plan de l'intuition (un enrichissement de l'intuition, et c'est là le point le plus important de la géométrisation). Mais cette nouvelle approche ne prend sens (aussi bien pour ceux qui la construisent que pour ceux qui sont amenés à l'étudier) que parce qu'elle renvoie à cette connaissance première qu'est la géométrie élémentaire, celle des situations spatiales dont nous avons déjà parlé ; sans cette connaissance première, les métaphores géométriques perdent leur sens et l'on est renvoyé à la simple utilisation formelle de langages et de représentations pour laquelle la seule prise est le respect des règles et des

procédures. Ce double aspect de la géométrisation, méthode de construction rationnelle de la connaissance d'une part et d'autre part lieu d'élaboration de nouvelles formes d'intuition, s'est développé ces dernières années dans des domaines aussi divers que la théorie des équations avec la géométrie algébrique et la géométrie différentielle, la théorie des fonctions avec l'analyse fonctionnelle (l'étude des *espaces* de fonctions, et il faut souligner ici la charge intuitive du mot *espace*), la physique contemporaine dont nous soulignerons les liens étroits avec la géométrie qui se sont tissés autour des travaux de Riemann et d'Einstein (19) ; nous pouvons aussi rappeler l'importance des représentations géométriques dans la théorie des probabilités et les statistiques.

Il faut alors chercher les conditions de la géométrisation à l'intérieur même des problématiques qui y conduisent et peut-être faut-il voir d'abord dans cette géométrisation la mise en place de nouvelles formes d'intuition, si l'on considère que la connaissance intuitive est la seule véritable connaissance et que *le détour rationnel*, s'il est une étape essentielle de la construction de la connaissance, n'en est qu'une étape ; on ne possède la connaissance d'une chose que *via* cette appréhension globale que constitue la connaissance intuitive. Ainsi Felix Klein écrit dans l'une des notes qui terminent le *Programme d'Erlangen* :

"Il ne faut toutefois pas se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuiti-

(19) Christian Houzel, "Géométrie et Physique" in *Universalia* 1991, supplément annuel à *Encyclopædia Universalis*.

vement évidente ; découvrir au moyen de l'analyse, c'est faire un pas très important, mais ce n'est que faire le premier pas." (20)

Si l'un des objectifs du mathématicien est la construction de cet *intuitivement évident* qui seul assure la connaissance, l'enseignement des mathématiques a, parmi ses objectifs, d'amener chaque élève à construire ses propres formes d'intuition, la géométrie étant l'un des lieux privilégiés de cette construction. Mais cela suppose que l'enseignement de la géométrie repose sur l'étude des situations spatiales autant pour leur intérêt propre que dans les divers lieux où elles interviennent, rappelant que c'est à travers leur étude que se constitue l'intuition géométrique si l'on considère que celle-ci ne se réduit pas aux seules intuitions premières ; elle comprend l'ensemble des connaissances que le sujet connaissant a intériorisées à un moment donné, connaissances sur lesquelles il a une prise directe sans qu'il lui soit nécessaire de revenir, chaque fois qu'il en use, à

la définition analytique d'icelles. Une telle connaissance intuitive, qu'elle soit première ou construite, peut-être remise en question lorsqu'on en atteint les limites. On retrouve ici la conception gonséthienne de la connaissance intuitive (21).

La question se pose alors de savoir dans quelle mesure le retour de la géométrie dans l'enseignement, tel qu'il apparaît aujourd'hui, permet la construction de cette intuition géométrique, d'une part l'intuition géométrique des situations spatiales, d'autre part celle de la géométrisation, prenant en compte ce que Dieudonné a appelé les *transferts d'intuition* (22).

Cette question nous conduit à revenir sur deux points aujourd'hui à la mode, les théories de l'apprentissage d'une part et l'usage des "nouvelles technologies" dans l'enseignement, nous proposant ici de montrer comment une approche non critique peut conduire à occulter les enjeux de connaissance de l'enseignement.

(20) Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872), Gauthier-Villars, Paris 1974, p. 38.

(21) Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité* (essai sur la méthode axiologique) (1936), Blanchard, Paris 1974 ; les conceptions gonséthiennes de la connaissance géométrique sont exposées dans notre article, "Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)" in *La Démonstration mathématique dans l'Histoire* (Colloque Inter-

IREM Epistémologie, Besançon 1989), Editions IREM Besançon-Lyon 1990 et dans l'article de Hourya Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth" in *La Figure et l'Espace*, Actes du colloque Inter-IREM Epistémologie, Lyon 1991, IREM de Lyon 1993, pp. 187-206.

(22) Jean Dieudonné, "The universal domination of the geometry" *op.cit.*

De la place des théories de l'apprentissage dans la réflexion sur l'enseignement

“Malgré toutes les «avancées» des neurosciences, des sciences cognitives, ou de la biologie, nous n'en savons peut-être pas plus sur la nature de l'esprit humain qu'avant” (23)

Pascal Engel

La question posée dans le texte préparatoire “Perspectives sur l'enseignement de la géométrie au XXI^e siècle”

“Que nous apprennent déjà les recherches sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la géométrie et qu'attendons-nous des recherches futures ?”

je répondrai simplement “RIEN”.

Non que les sciences cognitives n'aient rien à dire sur ce que l'on peut appeler les *mécanismes de la pensée* ; mais une lecture trop stricte risque d'occulter les enjeux de connaissance ou du moins de les réduire au seul bon usage de quelques procédures dont on ne sait plus (ou ne veut plus savoir) les raisons qui ont conduit à les mettre en place.

Je ne reviendrai pas sur la question naïve posée par J. Kilpatrick à Adelaide (ICME 1984) : “*Que savons-nous sur l'enseignement des mathématiques en 1984 que nous ne savions pas en 1980*” ; elle implique une conception linéaire du progrès de la connaissance, déjà inadéquate lorsqu'il

s'agit des sciences dites dures (les mathématiques et les sciences de la nature), qui dans les sciences humaines ou les sciences sociales me semble plus participer de l'angélisme scientifique que de la construction de l'intelligibilité des phénomènes, ici l'enseignement.

Ce siècle a vu, avec l'émergence des sciences humaines, naître l'idée que l'on pouvait atteindre dans la connaissance du *phénomène humain* une objectivité et une efficacité aussi grande que celles qui se sont mises en place dans les sciences de la nature. L'enseignement et l'apprentissage ont cru bénéficier de ce développement et le recours à Piaget d'abord, à l'intelligence artificielle et aux sciences cognitives aujourd'hui, me semble participer de cette croyance que la connaissance intime des *mécanismes de la pensée* devrait permettre de mieux cerner les phénomènes d'apprentissage et ainsi mieux enseigner (24).

Cet engouement pour les théories de l'apprentissage n'allait pas être sans

(23) Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, Gallimard, Paris 1996, p. 403.

(24) On peut lire à ce sujet le numéro consacré aux relations entre didactique et intelligence artificielle par la revue *Recherches en didactique des mathématiques*, volume 14, 1994.

conséquence sur les choix qui ont présidé aux grandes réformes de l'enseignement, à commencer par la réforme des *mathématiques modernes*, pour laquelle les théories piagésiennes ont joué un rôle important ; ainsi les analogies formelles entre les structures mathématiques définies par Bourbaki et les structures définies par Piaget dans sa tentative de théorisation de la construction de la connaissance (l'épistémologie génétique) allaient conduire pédagogues et psychologues à construire un modèle d'enseignement sur lequel s'appuieront les programmes de l'enseignement des mathématiques (25).

On sait ce qu'il en fut de la réforme, mais une analyse d'icelle devrait, pour être complète, porter aussi sur les contre-réformes qui ont suivi. Ce n'est pas ici le lieu de développer une telle analyse (26), notre référence à la réforme des mathématiques modernes avait pour seul propos de montrer comment un appui trop étroit sur les théories de l'apprentissage dans la réflexion sur l'enseignement pouvait conduire à occulter les enjeux de connaissances des disciplines enseignées ou du moins à les réduire aux seuls aspects *objectivables* d'une question formulée de façon réductrice : "*comment l'enfant apprend ?*".

Formulation réductrice parce que poser la seule question de l'enfant nous éloigne du problème de l'apprentissage de la connaissance en la restreignant à un aspect accidentel (au sens aristotélicien du terme), l'enfant ignorant (ou du moins pensé comme ignorant) prenant le pas sur la connaissance elle-même, ce même enfant devenant, sous la forme de "*l'enfant objectif*", un objet ayant peu à voir avec l'enfant en tant que sujet confronté à la connaissance. Ainsi, avec Piaget, l'enfant devient un ensemble de processus cognitifs strictement organisés suivant des lois (ici la théorie des stades) (27), et les piagésiens s'efforceront de relier l'enfant formel défini par Piaget et l'enfant réel, celui qui se confronte à la connaissance dans l'institution scolaire.

Mais formulation réductrice aussi parce que, en mettant l'accent sur les processus cognitifs en tant que tels, elle oublie les conditions réelles dans lesquelles se construit la connaissance (28) et réduit le rapport au savoir (c'est-à-dire la confrontation entre le sujet connaissant et le savoir qu'il se propose d'acquérir ou de construire (29)) à un *simple* problème

(25) Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnérowicz, Choquet, Gattegno, *L'Enseignement des mathématiques*, op.cit.

(26) Nous renvoyons à notre article "L'enseignement des mathématiques en France, 1970-1990" op.cit. et à l'ouvrage de Bkouche, Charlot, Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitres 1,2,3 ; ainsi qu'à l'ouvrage *Les sciences au lycée, un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulín, Vuibert, Paris 1996.

(27) Outre l'article cité de Piaget (cf. note 4), les conceptions de Piaget sur l'apprentissage sont exposées par leur inventeur dans l'ouvrage collectif, *Théories du langage, Théories de l'apprentissage* (le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky organisé par Massimo Platelli-Palmarini), Le Seuil, Paris, 1979 ; lire en particulier "La psychogenèse des connaissances et sa signification épistémologique", pp. 53-64.

(28) La question se pose de la possibilité d'une connaissance positive de ces "conditions réelles", autrement dit de la possibilité d'une psychologie de la connaissance (qu'il ne faut pas confondre avec la psychologie cognitive).

(29) Contrairement à un certain discours pédagogique d'aujourd'hui qui met en avant la construction du savoir au dépens de l'acquisition du savoir, nous insistons pour distinguer ces deux

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

d'interaction (30). En ce sens l'épistémologie génétique, comme le sera plus tard une certaine façon de penser les sciences cognitives, est une négation de l'épistémologie dans la mesure où le sujet connaissant disparaît derrière le sujet objectivé sous la forme du sujet cognitif ; ainsi se pose le problème premier des théories cognitivistes, dans la mesure où elles s'intéressent au fonctionnement de l'esprit humain, celui du rapport entre le sujet connaissant et le sujet cognitif.

A défaut de poser ce problème on ne peut que substituer le sujet cognitif au sujet connaissant, le seul sujet connaissant restant le savant cognitiviste devenu super-sujet observant et analysant les interactions entre le sujet cognitif et les objets qu'il se propose de connaître. Ainsi se met en place une théorie de la connaissance à deux niveaux, celle que propose Piaget lorsqu'il écrit que l'épistémologie génétique, pour étudier les rapports du sujet avec les objets qu'il est amené à connaître, est conduite "pour expliciter

comment le sujet est affecté par l'objet" à "poser ce sujet et cet objet réunis à titre d'objet de sa propre recherche" (31), le nouveau sujet connaissant étant alors le théoricien de la connaissance, celle aussi que propose Daniel Dennett inventant une méthode expérimentale pour l'étude des phénomènes de l'esprit (au sens positif qu'a pris ce terme dans les sciences cognitives) dans la première partie de *La conscience expliquée* (32).

On rencontre ici le paradoxe incontournable des théories cognitivistes, l'objectivation du sujet connaissant implique un super-sujet, celui du savant cognitiviste observant et analysant le sujet objectivé ; on peut alors continuer la chaîne, un super-super sujet observant le savant cognitiviste et ainsi de suite à l'infini.

La question est alors moins celle de la possibilité d'une théorie positive de la connaissance qui se substituerait à l'épistémologie classique, c'est-à-dire à la réflexion philosophique sur les sciences, que celle de la prise en compte de relations, nécessairement mouvantes et révisables (au sens gonséthien du terme (33)) entre une théorie positive de la cognition et l'épistémologie classique qui participe de la philosophie (34).

aspects de l'acte de connaître, rappelant que l'école est un lieu d'acquisition de savoir. C'est parce qu'elle est ce lieu qu'elle permet à celui qui acquiert ce savoir de construire du savoir ; je ne parle pas ici de savoir original, mais de la reconstruction d'un savoir déjà connu par d'autres que l'on sait retrouver parce que l'on a acquis du savoir. On ne construit pas du savoir *ex nihilo*, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui *a priori* n'est pas le sien et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien ; c'est bien parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire du savoir. Quelle serait l'autonomie d'une personne qui n'aurait pas acquis sa langue maternelle, à laquelle on aurait laissé la liberté de construire sa propre langue ?

(30) Que ce problème d'interaction soit pensé comme complexe en ce qu'il suppose un très grand nombre de variables ne rend pas l'objectivation proposée de la connaissance plus idoine. Mais s'agit-il seulement d'un problème à un grand nombre de variables ?

(31) Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique* (2 tomes), PUF, Paris 1950 ; réédition 1973, tome 1, p. 45.

(32) Daniel Dennett, *La conscience expliquée*, (traduit de l'anglais par Pascal Engel), Editions Odile Jacob, Paris, 1993, première partie, chapitre 3.

(33) Ferdinand Gonseth, *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris, 1939, pp. 36-38. Le principe de révisabilité est présenté par Hourya Sinaceur dans l'article déjà cité, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth", *op.cit.*

(34) Pour une approche de cette question nous renvoyons à l'ouvrage cité de Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*.

Mais c'est encore cette épistémologie classique, de laquelle participe la réflexion didactique, qui nous permet, à défaut d'une transparence impossible des phénomènes de la connaissance et de l'apprentissage, sinon de nous donner les règles de conduite de l'enseignement, du moins de savoir en expliciter, autant que cela est possible, les divers enjeux. En cela, la didactique ne peut être que négative, au sens médiéval du terme (comme on parlait de théologie

négative⁽³⁵⁾), son objet est moins de nous dire le *comment enseigner* que de nous permettre de situer le sens de ce que nous enseignons (c'est-à-dire le sens que nous attribuons à ce que nous enseignons) ; c'est peut-être alors que l'on peut espérer donner force à ce que nous enseignons si l'on accepte avec Francisco Sanchez que "*Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête celui qui est enseigné*"⁽³⁶⁾.

Les nouvelles technologies et l'enseignement

"Les deux grands systèmes d'innovation les plus caractéristiques de l'ère technologique, c'est-à-dire d'une part, les mass-media (transistor ou télévision), d'autre part la cybernétique, s'attachant l'un et l'autre à l'information, à sa transmission immédiate, à son codage, à sa recherche, à son exploitation, sont de ce fait naturellement adaptés aux activités de l'apprentissage, de l'éducation et de la formation."⁽³⁷⁾

Edgar Faure

"Le développement de l'informatique et de l'intelligence artificielle ne peut pas ne pas avoir de conséquence sur l'enseignement". Une telle assertion, proclamée jusqu'à plus soif, marque peut-être les limites d'une modernité non pensée où l'on cherche dans un *nouveau* quelque peu mythique les conditions générales de toute

activité d'enseignement, quête d'autant plus forte que l'activité en question pose de nombreux problèmes pour lesquels il y a peu de solutions.

Ce n'est pas remettre en cause l'importance de l'informatique que de poser la question de sa pertinence dans l'enseignement des mathématiques, c'est au

(35) La théologie négative se propose moins de connaître Dieu par ce qu'il est que de l'approcher en cernant ce qu'il n'est pas. Ainsi pourrait-on penser une *didactique négative* (cf. Rudolf Bkouche, "Variations sur nécessité et suffisance", *Repères-IREM* n°18, janvier 1995).

(36) Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984.

(37) Edgar Faure *et al*, *Apprendre à être*, Unesco-Fayard, Paris 1972, p. xxxviii.

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

contraire essayer d'en déterminer l'apport réel et quitter le terrain ambigu de ce que j'ai appelé ailleurs la *modernolâtrie* (38).

Quel est l'apport de l'informatique à l'enseignement de la géométrie ?

La question peut être entendue de deux façons.

La première, résolument moderniste, suppose que l'informatique va changer le cadre traditionnel de l'enseignement de la géométrie parce qu'elle va changer la géométrie en tant que science. C'est un tel point de vue que développe par exemple Colette Laborde dans un article récent (39).

La seconde pose moins le problème d'une transformation de la géométrie que celui de la place de l'informatique dans la géométrie d'abord, dans son enseignement ensuite.

Ces deux façons de penser l'apport de l'informatique nous renvoie à deux questions, celle de l'impact de l'informatique sur le développement de la science géométrique, celle de ses conséquences sur l'enseignement de la géométrie.

Ces deux dernières questions, si elles sont liées, doivent être distinguées si l'on ne veut pas retomber dans des errements analogues à ceux de la réforme des *mathématiques modernes*. Celle-ci, en proposant la modernité mathématique aux élèves, a construit un écran entre les élèves et cette modernité, tant l'accès à la modernité

implique des cheminements qui s'appuient sur une problématisation de cette modernité, problématisation qui s'appuie elle-même sur des connaissances plus anciennes, ce qui suppose une mise en perspective historique de cette modernité, moins pour construire un enseignement historisé que pour faire ressortir le sens de la modernité, c'est-à-dire les raisons qui ont amené à la construire.

L'usage mathématique de l'informatique n'implique nullement que cet usage intervienne dès les débuts de l'enseignement si cet usage implique des connaissances élaborées ; on peut seulement considérer que cet usage a sa place lorsqu'il est relié aux problèmes étudiés, moins comme outil d'apprentissage que comme outil mathématique (40). C'est parce qu'il est outil mathématique qu'il est aussi outil d'apprentissage.

Je donnerai comme premier exemple l'usage de la calculatrice. C'est justement son usage mathématique qui lui donne sa valeur dans l'enseignement, qui en fait moins un substitut à l'apprentissage de connaissances dites traditionnelles qu'un ajout à ces connaissances permettant à la fois de les mieux utiliser et de les mieux comprendre. La calculatrice ne se substitue pas à la table de multiplication et plus généralement à la connaissance des diverses règles du calcul numérique, elle en constitue au contraire un complément efficace à la fois sur le plan du calcul proprement dit et sur la connaissance des nombres, à condition d'en voir aussi les limites. Rappelons, par exemple, le calcul du nombre e comme limite de la suite $u_n = (1 + 1/n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$, le

(38) Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *Repères-IREM* n° 9, octobre 1992.

(39) Colette Laborde, "Enseigner la géométrie", *Bulletin de l'APMEP* n°396, Décembre 1994.

(40) De même qu'en son temps, la règle à calcul.

nombre u_n indiqué sur l'écran restant désespérément égal à 1 pour n suffisamment grand (41). Ainsi l'usage de la machine dans les problèmes d'approximation, autant par son efficacité que par ses aspects paradoxaux (42), renvoie à une réflexion théorique sur la notion d'approximation.

On pourrait en dire autant avec les calculatrices permettant le calcul formel. Ainsi, en ce qui concerne les *identités remarquables* ; ou bien l'on considère celles-ci comme de simples outils techniques de calcul et la machine permettra de les utiliser sans avoir besoin de les comprendre, ou bien l'on considère que la connaissance des identités remarquables participe de la connaissance intime du calcul littéral, auquel cas leur usage à *la main* participe de cette connaissance intime, et c'est seulement dans ce cadre que l'usage de la machine prend tout son sens. On peut faire des remarques analogues en ce qui concerne le calcul différentiel et intégral, ce qui nous renvoie à la question : les aspects techniques du calcul ne sont-ils que techniques ? (43)

Le cas des calculatrices graphiques est intéressant dans la mesure où leur usage pose la question de la lecture d'un graphique, lecture qui, comme dans les sciences

expérimentales, relève de l'ordre théorique : que lit-on et comment lit-on ? Je renverrai ici à un article de Luc Trouche sur les calculatrices graphiques (44) qui nous rappelle que la lecture d'un graphique s'apprend et que cet apprentissage relève de l'apprentissage des mathématiques. En donnant l'exemple de l'équation $\tan(x) = 100x$ dont une lecture graphique trop rapide incline à penser qu'elle n'a pas d'autres solutions que la solution nulle, l'article de Trouche nous rappelle la place du théorique dans l'usage d'un instrument. C'est d'ailleurs ce lien entre le théorique et l'expérimental qui constitue les mathématiques comme science expérimentale (45).

Ce caractère expérimental des mathématiques est bien antérieur aux ordinateurs ; il apparaît avec l'usage de divers instruments mathématiques, depuis la règle et le compas et les diverses machines à construire des courbes inventées par les géomètres grecs (46) jusqu'aux instruments astronomiques et divers instruments de mesure et de dessin (47). On pourrait

(41) Je dois cet exemple à Jean-Pierre Friedelmeyer.

(42) On rencontre de tels paradoxes lorsqu'on travaille aux limites de la machine ; ainsi si l'on construit le plus grand nombre possible avec une TI 57 et si on lui applique successivement les opérations *ln* et *exp*, on obtient un nombre plus petit ; en itérant l'opération on obtient une magnifique suite décroissante. Belle occasion de réfléchir sur les rapports de l'expérimental et du théorique.

(43) Nous développerons cette question dans un article à venir "Aspects techniques et aspects conceptuels dans l'enseignement de l'analyse".

(44) Luc Trouche, "Calculatrices graphiques : la grande illusion", *Repères-IREM* n°14 janvier 1994.

(45) Nous nous appuyons ici sur les conceptions développées par Gonsseth tout au long de son œuvre dont nous citerons ici trois ouvrages qui développent l'articulation entre les trois aspects de la connaissance géométrique : l'aspect intuitif, l'aspect expérimental et l'aspect théorique ; d'abord *Les Mathématiques et la Réalité*, Blanchard, Paris, 1936, ensuite *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris, 1939 et enfin *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel, 1945/1955.

(46) Eutocius, "Commentaires de la sphère et du cylindre" in Archimède, *Œuvres*, tome IV, Les Belles Lettres, Paris 1972.

(47) Pour une étude de ces instruments, nous renvoyons à l'ouvrage d'Emile Fourrey, *Curiosités géométriques* (1907), réédition augmentée d'une étude d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994, deuxième partie, chapitre premier.

 QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
 L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

rappeler, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, que Borel proposait en 1904 la mise en place de travaux pratiques de mathématiques dans les lycées (48) et que Hadamard n'hésitait pas à consacrer une partie de ses *Leçons de Géométrie* à la topographie (49).

On pourrait multiplier les exemples où l'ordinateur permet de mieux aborder l'aspect expérimental des mathématiques et en particulier de la géométrie (50). Mais ici encore, il faut souligner le lien entre l'image sur l'écran de l'ordinateur et le caractère théorique de la lecture de cette image.

Ainsi l'exemple développé par Luc Trouche (51) du graphe de la fonction

$$f(x) = -121011 - 1490,1989x + 5601,73023x^2 - 300,56003x^3 + 0,03x^4$$

Dans les limites imposées par l'écran de la machine, la fonction f est décroissante lorsque x parcourt les valeurs supérieures représentées sur l'écran ; que peut-on en déduire ? faut-il y voir une contradiction entre le phénomène observé (qui devrait conduire à conjecturer la décroissance de la fonction lorsque la variable tend vers $+\infty$) et le comportement théorique. Mais de

quelle contradiction s'agit-il ? le problème est moins celui d'une contradiction que celui du rôle du raisonnement dans la lecture d'un graphe : c'est le raisonnement qui nous apprend que c'est le signe du coefficient de x^4 qui détermine le comportement de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$. C'est donc la théorie qui guide l'observation et qui permet de prendre conscience des limites d'icelle. En ce sens, et c'est la part de notre héritage grec, c'est la connaissance rationnelle (c'est-à-dire la connaissance par le raisonnement) qui fonde la certitude non seulement parce qu'elle dit le vrai, mais aussi parce qu'elle l'explique au sens qu'elle dit les raisons du vrai (52). On peut ainsi imaginer, pour répondre à ceux qui disent que l'usage des calculatrices rend caduc l'apprentissage de la classique construction du graphe d'une fonction, un problème de baccalauréat qui, une fonction et son graphe étant donnés (53), demanderait aux candidats d'expliquer le lien entre la fonction donnée et son graphe ; cela ne dispenserait pas les élèves d'effectuer des calculs, mais la question serait alors celle de leur interprétation, la rôle de la calculatrice étant alors moins de faire les calculs à la place des élèves que de permettre aux élèves de contrôler ces calculs.

Si l'ordinateur se révèle un instrument puissant pour qui sait en user (et le *savoir en user* relève autant de l'aspect purement

(48) Emile Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire" (1904), in *Œuvres*, tome 4, CNRS, Paris 1972, pp. 2225-2256.

(49) Jacques Hadamard, *Leçons de géométrie* (deux volumes), Armand Colin, Paris 1898/1949, réédition Gabay 1989, volume II, Livre X, Topographie.

(50) Citons par exemple le rôle que peut apporter l'informatique dans l'étude du mouvement des figures géométriques, cf. Jean-Claude Daniel, "Géométrie en mouvement" *Repères-IREM* n°18, janvier 1995.

(51) Luc Trouche, "Masques", *Repères-IREM* n°24, juillet 1996.

(52) Sur le rôle explicatif de la connaissance rationnelle, nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin Géométrique, de la main à l'ordinateur*, Actes du colloque Inter-IREM Géométrie (Le Quesnoy, juin 1994), IREM de Lille, 1996, pp. 189-232.

(53) Que le graphe soit effectivement donné ou que l'on demande aux élèves de le trouver à partir de leurs calculatrices graphiques est ici de peu d'importance, sauf à vouloir tester l'usage de la calculatrice graphique par les élèves.

manipulatoire que de la part théorique de la lecture de ce qui est *montré* par la machine), la question se pose de déterminer en quoi il bouleverse la science géométrique, et en particulier, en quoi il bouleverse l'enseignement de cette science ? Ici encore, c'est une réflexion de l'intérieur de la géométrie qui peut nous donner des éléments de réponse, réflexion qui s'inscrit nécessairement dans le caractère problématique des notions mises en jeu. À défaut de la prise en compte de ce caractère problématique, l'usage de l'ordinateur dans l'enseignement peut s'avérer pur *gadget* occultant la nécessité de la théorisation derrière un spontanéisme de l'image. À moins que l'on ne résume l'apprentissage de la science au seul discours descriptif, ce qui serait la mise au rancart, dans l'enseignement des mathématiques, de toute rationalité, autant dire des mathématiques elles-mêmes (54).

C'est donc en replaçant l'usage de l'outil informatique dans un cadre mathématique que l'on peut penser son intervention dans l'enseignement. Nous citerons, à titre d'exemple, deux ouvrages consacrés à l'étude graphique des équations différentielles, celui d'Artigues et Gautheron (55) et celui de Bouligand et Devisme (56). Si la construction à *la main* des éléments de

contact dans l'ouvrage de Bouligand-Devisme se veut la traduction figurale de la définition, la détermination effective des lignes intégrales demande un travail fastidieux (il faut construire suffisamment d'éléments de contact) et les lignes ne deviennent visibles que parce que l'on sait que l'on peut les voir ; au contraire, l'usage de la machine proposé par Michèle Artigues et Véronique Gautheron montrent d'emblée les lignes intégrales, permettant la découverte de phénomènes non forcément prévus par l'expérimentateur (par exemple le comportement des courbes intégrales au voisinage d'un point singulier), reste alors le travail théorique, celui de l'explication du comportement des lignes intégrales, c'est-à-dire l'explicitation du lien entre la représentation graphique lue sur l'écran et l'équation différentielle ; mais tout cela, autant la lecture de l'image sur l'écran que le travail théorique, suppose que l'on connaisse déjà la notion d'élément de contact. On voit ainsi l'apport de l'outil informatique, la visualisation globale des lignes intégrales permettant une étude empirique que les procédés à *la main* ne permettraient pas, mais l'étude empirique n'a de signification que parce qu'un problème a été posé et c'est l'étude de celui-ci qui permet de construire des relations qui *a priori* ne signifient rien. En ce sens, l'usage de l'outil informatique, tout autant que l'usage des outils théoriques, ne prend sens que dans le cadre d'une problématique (57).

(54) Le physicien n'est pas celui qui dit que le ciel est bleu, il est celui qui veut comprendre pourquoi le ciel est bleu ; enseigner la physique ne consiste pas à dire que le ciel est bleu, mais à expliquer les raisons qui font que le ciel est bleu ; apprendre la physique, ce n'est donc pas apprendre que le ciel est bleu, c'est vouloir connaître les raisons qui font que le ciel est bleu.

(55) Michèle Artigues, Véronique Gautheron, *Systèmes différentiels. Etude graphique*, Cedic/Nathan, Paris 1983.

(56) Georges Bouligand, Jacques Devisme, *Lignes de niveau, lignes intégrales. Introduction à leur étude graphique*, Vulbert, Paris 1937.

(57) À défaut de l'explicitation des problématiques, l'usage de l'outil informatique peut se révéler aussi nuisible que les *mathématiques modernes* des années soixante-dix ; les mathématiques y perdent toutes signification et les élèves ne sont plus que les logiciels programmés pour faire ce qu'on leur demande de faire, la forme moderne de l'activisme pédagogique.

 QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
 L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Le problème cité ci-dessus relève de l'enseignement supérieur. La question se pose alors de savoir dans quelle mesure l'intervention de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques exige une première pratique mathématique et à partir de quel niveau d'enseignement cet usage devient pertinent. Si la calculatrice numérique à montré ses possibilités, et aussi ses limites, qu'en est-il des calculatrices graphiques ou de calcul formel ? L'importance de plus en plus grande de l'outil informatique implique-t-elle qu'on l'utilise de façon volontariste dans l'enseignement en inventant de fausses pertinences qui présentent les outils de la modernité technique comme participant moins de l'usage raisonné que de la magie (58) ? Dans quelle mesure cet usage magique de l'outil informatique permet-il aux élèves de prendre en charge la pertinence de ces outils ?

Si l'on compare l'engouement pour l'informatique avec celui qui présida à la réforme des *mathématiques modernes*, il semble que l'on retrouve la même idéologie de la modernité qu'il imaginait que l'axiomatique allait faciliter l'enseignement des mathématiques, encore plus prégnante avec l'informatique par la fascination qu'exerce un objet dont certains disent qu'il est plus concret qu'un discours.

C'est qu'effectivement l'usage de l'outil informatique est performant, ce que l'on ne saurait nier. Se pose alors la question de la

signification de cette performance dans l'enseignement (59) ; le *désir de performance* n'implique-t-il pas une confusion sur les objectifs (60) ? autrement dit la performance de la machine est-elle pertinente pour la compréhension d'un phénomène mathématique (61) ? La question pose alors le problème de la lecture telle que nous l'avons rencontré ci-dessus et la réponse est multiple. Ou bien l'utilisateur connaît le contexte, dans ce cas il sait pourquoi et comment la machine lui a évité un travail fastidieux, un calcul qu'il sait *théoriquement* faire, même si ce calcul est *pratiquement* hors de sa portée (62), ou la construction du graphe d'une fonction par exemple ; on peut aussi concevoir le cas où

(59) Il s'agit autant de la signification pour le professeur qui voit l'élève "réussir" que de la signification pour l'élève qui "réussit". De quelle réussite s'agit-il ?

(60) N'oublions pas que la question de la performance se pose dans un contexte, contexte déterminé par des objectifs spécifiques, et c'est dans ce contexte qu'on peut en juger. A l'époque des *mathématiques modernes* on invoquait déjà, au nom de la modernité, la puissance des méthodes analytiques pour fonder l'enseignement de la géométrie sur le calcul algébrique ; on ratait ainsi à la fois la géométrie et la compréhension du lien entre les équations et les figures géométriques.

(61) L'article cité de Tasso et Vogel montre les limites de ce *désir de performance* lorsque l'on voit les résistances de certains élèves devant des "performances" qu'ils ne comprennent pas.

(62) Sur cette distinction entre la connaissance théorique d'une opération et l'impossibilité pratique de la faire et l'apport des machines, nous renvoyons à l'article de Marie-Françoise Coste-Roy, "Démonstration automatique en géométrie : une approche par l'algèbre" in *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du colloque Inter-IREM Epistémologie, Besançon 1989, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1990, pp. 251-259. Si l'on ne peut suivre les détails du calcul, c'est la connaissance des principes mis en jeu qui nous permet de parler de démonstration ; sans la connaissance de ses principes, la propriété "démontrée" ne signifie rien, même empiriquement.

(58) Ainsi l'approche informatique (!) du théorème de Thalès dans la brochure *Apports de l'outil Informatique à l'Enseignement de la Géométrie*, Commission Inter-IREM Mathématiques et Informatique, IREM de Montpellier, 1994, p. 89, ou l'article de Denis Tasso et Nicole Vogel, "Quelques semaines du cours d'analyse de Première S avec DERIVE, logiciel de calcul symbolique" *Reperes-IREM* n°25, octobre 1996.

l'utilisateur découvre un phénomène inattendu, c'est donc qu'il attendait quelque chose, il sait qu'il ne comprend pas mais il sait aussi qu'il y a quelque chose à comprendre. Ou bien l'utilisateur ne connaît pas le contexte, auquel cas il est devant un phénomène qui lui est étranger et sur lequel il n'a aucune prise (comme quelqu'un qui est devant un texte écrit dans une langue qu'il ne connaît pas ou qui, même écrit dans sa langue, lui parle de choses qui lui sont étrangères ⁽⁶³⁾). Un usage inconsidéré de l'outil informatique place ainsi l'élève dans les plus mauvaises conditions du contrat didactique, celui où il s'efforce de deviner ce que le professeur attend de lui ⁽⁶⁴⁾.

Le problème est donc moins celui d'un hypothétique bouleversement de l'enseignement de la géométrie (et plus généralement des mathématiques) par l'usage de l'informatique que celui de cet usage à l'intérieur du domaine géométrique, et nous parlons ici du domaine géométrique classique, celui de l'étude raisonnée des phénomènes géométriques, lequel commence avec l'étude des propriétés des figures et la mise en uvre de leur construction.

Cela nous renvoie à la première partie de cet article et c'est sur de telles considérations que nous terminerons.

De la géométrie des figures

Si la géométrie élémentaire est d'abord l'étude des grandeurs géométriques, c'est à travers les figures que l'on accède à ces grandeurs géométriques ⁽⁶⁵⁾. En ce sens, la question de la place des figures dans la géométrie est de peu d'intérêt, si ce n'est qu'elle nous rappelle que l'on a oublié de quoi l'on parle lorsque l'on parle de géométrie. Peut-être un résidu de la réforme des *mathématiques modernes*, mais de *mathématiques modernes* qui auraient oublié de quoi elles parlent.

La figure est là parce qu'elle est objet d'étude. Précisons.

On relie souvent l'enseignement de la géométrie à ce que l'on appelle l'appren-

tissage de la démonstration ⁽⁶⁶⁾. A supposer, ce qui me semble loin d'*aller de soi*, qu'une telle conception de l'enseignement de la géométrie soit pertinente, la question se pose aussitôt des obstacles posés par l'usage de la figure à la mise en place du processus démonstratif, soit que l'évidence des propriétés à démontrer rendent inutiles, aux yeux de l'élève, la recherche d'une démonstration, soit que le décryptage nécessaire de la figure occulte, pour le commençant, les moyens de mettre en œuvre la démonstration.

Dans le premier cas, la démonstration risque d'apparaître comme une simple nécessité réglementaire du cours de mathématiques, renforcée par des assertions autoritaires du type "*en mathéma-*

(63) On n'enseigne pas à lire, à qui ne sait pas lire, avec un texte de Kant ou de Cavallès.

(64) C'est le cas du travail de Tasso et Vogel cité ci-dessus.

(65) Rudolf Bkouche, "De la démonstration en géométrie" *op.cit.*

(66) Nicolas Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*, Université Joseph Fourier, Grenoble 1988.

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

tiques, on ne s'appuie pas sur l'évidence, il faut démontrer"; la conséquence en est que les mathématiques apparaissent sous un angle purement juridique où la démonstration tient lieu de règle, moins pour des raisons de savoir que pour des raisons d'autorité institutionnelle, le professeur devenant le garant de cette autorité. Il est vrai que la question de l'évidence est souvent posée par de jeunes professeurs qui y voient un obstacle à l'apprentissage de la démonstration. Ces remarques nous amènent à nous demander si ce n'est pas l'idée d'un apprentissage de la démonstration en tant que tel qui constitue le principal obstacle à l'usage de la démonstration dans l'enseignement de la géométrie ? si l'on considère que l'apprentissage de la démonstration, en mettant l'accent sur les procédures, oublie les enjeux de la démonstration, c'est-à-dire sa signification (67).

Dans le second cas, l'obstacle se situe dans la figure elle-même, dans la difficulté de son décryptage, ce qui conduit d'abord à remettre en cause la figure comme objet didactique, ensuite à la reconstituer sous une forme prête à son emploi démonstratif. La figure n'est plus l'enjeu de la démonstration, tout au plus et sous la condition d'une mise en forme favorable, un outil qui peut avoir son utilité dans la mise en place du processus démonstratif.

Dans les deux cas, la figure apparaît comme un obstacle à la démonstration. Une façon de répondre à cet obstacle consiste à regarder comment fonctionne la

figure dans la mise en place du processus démonstratif, la question n'est plus : à quoi sert la figure ? l'utilité n'étant plus mise en question, mais comment ça sert ? C'est ce qu'explique Raymond Duval lorsque, après avoir explicité les deux obstacles définis ci-dessus, celui de l'évidence et celui de l'appréhension de la figure, il propose de reconsidérer la question sous la forme : comment fonctionne effectivement une figure dans une démarche géométrique ? (68)

Il semble que l'on soit ici plus proche d'une démarche mathématique, mais l'angle sous lequel se place Duval, s'il nous apporte un éclairage sur les problèmes que pose l'appréhension d'une figure, occulte les aspects proprement mathématiques (69). C'est que la question, posée *a priori*, du fonctionnement de la figure dans une démarche géométrique suppose que l'on ait défini ce qu'est une démarche géométrique avant même d'avoir défini sur quels objets elle porte et à quelles questions elle se propose de répondre ; la figure, avant que d'être la représentation figurale d'un objet au sens que dit Duval,

(68) Raymond Duval, "Les différents fonctionnements de la figure dans la démonstration", *Repères-IREM* n°17 octobre 1994.

(69) Notons cependant que le seul regard mathématique n'épuise pas la question de l'appréhension de la figure et nous renvoyons ici à la notion de registre étudiée par Raymond Duval, (cf. Raymond Duval, *Semiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Lausanne, 1996) ; cela pose encore une fois la question des relations entre cognition et connaissance, et plus généralement celle des relations entre psychologie et épistémologie (cf. Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, *op.cit.*). En ce qui concerne la géométrie, on pourrait alors parler des aspects non proprement mathématiques de l'appréhension d'une figure et de leur place dans l'activité géométrique. Mais il reste que ces aspects non proprement mathématiques sont à prendre en compte dans le cadre problématique dans lequel se développe l'activité mathématique.

(67) Notons qu'une telle critique pose de façon générale les limites des théories de l'apprentissage dans la mesure où celles-ci mettent en avant les procédures de la cognition aux dépens des enjeux de connaissances, point sur lequel nous reviendrons ci-dessous.

est objet d'étude et c'est l'étude de cet objet qui conduit à définir un nouvel objet (une idéalité mathématique !) dont la figure devient une représentation (70).

Au point de vue de Duval, j'opposerai le point de vue gonséthien (71), plus proche de l'activité scientifique, qui dit que les démarches se constituent, non comme un préalable à l'activité scientifique, mais dans l'activité scientifique elle-même. Cela nous renvoie à ce que j'ai appelé par ailleurs une épistémologie des problématiques (72) : une science se constitue sur un ensemble de questions, un *champ de problèmes* pour reprendre l'heureuse expression de Nicolas Rouche (73). Dans le cas de la géométrie, lorsque nous disons que la géométrie est d'abord l'étude des figures, cela signifie que c'est à travers l'étude des figures que se constitue la science géométrique, ses concepts et ses méthodes. La question n'est plus celle du rôle des figures dans la démonstration, que ce soit celle de l'utilité de la figure ou celle, qui semble plus en prise sur l'activité mathématique, du fonctionnement de la

figure dans la pratique de la démonstration géométrique, la question est celle du rôle joué par la démonstration dans l'étude des figures, question qui est celle de la construction de la rationalité géométrique (74).

Si nous sommes revenus sur ce point particulier de la démonstration géométrique, c'est pour mettre en avant la nécessité d'une approche épistémologique de l'enseignement, approche épistémologique qui se constitue sur la pratique scientifique elle-même. Les approches didactiques ou psychologiques ne viennent qu'après et, pour être pertinentes, ne se peuvent constituer qu'en regard de l'approche épistémologique dans la mesure où, si une science se construit sur un ensemble de problématiques au sens où on l'a dit plus haut, c'est sur de telles problématiques que se construit l'enseignement de cette science, que ces problématiques soient les problématiques originales ou non. La question première de l'enseignement d'une science est donc sa problématisation, il se trouve que la problématique des figures est au cœur de la construction géométrique, même et surtout si l'on sait aujourd'hui que le développement de la géométrie a conduit au dépassement de la géométrie des figures (75) ; l'enseignement ne peut alors dépasser la géométrie des figures que s'il l'a rencontrée.

(70) Sur le problème de la construction des idéalités mathématiques à partir des problèmes nous renvoyons à notre article cité "De la démonstration géométrique" ; sur le problème de la représentation, nous renvoyons à notre intervention au colloque Inter-IREM Géométrie (Bayonne, juin 1996) "La figure comme objet et représentation" (à paraître).

(71) Ferdinand Gonsseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, op.cit. première partie : *La doctrine préalable*.

(72) Rudolf Bkouche, "La place de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement d'icelles", Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques, Montpellier juillet 1993. Le texte de cette intervention paraîtra ultérieurement.

(73) Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, op.cit. chapitre XII.

(74) Cf. les interventions de Evelyne Barbin, Rudolf Bkouche et Nicolas Rouche au colloque Inter-IREM de Géométrie, Le Quesnoy, juin 1994, autour du thème : "Le rôle de la démonstration dans l'étude des figures géométriques". Les textes de ces interventions sont publiés dans les Actes du Colloque *Le Dessin Géométrique, de la main à l'ordinateur*, op.cit., pp. 175-232.

(75) Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" in *La Figure et l'Espace*, op.cit. pp. 33-46.

QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Une remarque pour terminer : lorsque l'on parle de géométrie des figures, nous renvoyons au corpus euclidien dans la mesure où ce corpus nous semble constituer encore aujourd'hui une première approche de cette géométrie, qu'il marque une première construction de la rationalité, construction qui a l'avantage de rester proche des objets sur lesquels elle travaille alors que les constructions modernes marquent une distance par rapport à ces premiers objets de la géométrie ; en ce sens la géométrie euclidienne (au sens de la géométrie développée par Euclide) reste un passage obligé de la construction de la science géométrique (76). Cela n'implique pas que cette géométrie soit reprise à la lettre ; ce qui est à mettre en valeur dans la conception grecque de la géométrie, c'est le lien entre les objets et le discours démonstratif, celui-ci se construit sur les objets eux-mêmes alors que les problèmes posés à la géométrie au cours de son histoire ont amené les géomètres à prendre de la distance par rapport aux objets, voire à les réduire, pour les besoins du discours démonstratif, à leur seul aspect langagier. On peut ainsi distinguer une *mathématique des objets* (telle la géométrie euclidienne) qui met l'accent sur les objets étudiés, se proposant d'explicitier les relations entre ces objets, et une *mathématique des relations* qui étudie essentiellement les relations, les objets se définissant par le réseau des relations dans lequel ils s'insèrent ; si dans la mathématique des objets le langage se constitue en rapport aux objets que l'on se propose d'étudier, dans la mathématique des relations, c'est le langage (la structure du langage) qui prend le pas sur les objets, ce qui permet de parler du primat du langage sur les

objets (77). Il est clair que cet aspect langagier de la géométrie contemporaine (que ce soit le discours à la Hilbert (78) ou le discours de l'algèbre linéaire dont la géométrie, du point de vue structural, ne constitue qu'un chapitre (79)) ne peut être abordé par les commençants. C'est en amenant ces derniers aux limites des conceptions euclidiennes que l'on peut espérer les amener à comprendre les raisons des changements de point de vue des géomètres (80).

Rappelons ici un point de vue qui, tout en critiquant la construction euclidienne, participe d'une même mathématique des objets, je veux parler d'un point de vue développé dans la seconde partie du XIX^e siècle par plusieurs géomètres (on pourrait citer en France Houël (81) et Charles

(76) Rudolf Bkouche, préface in Michel Carral, *Géométrie élémentaire*, Ellipses, Paris 1995.

(77) Rudolf Bkouche, "La pensée géométrique au tournant des XIX^e-XX^e siècles", à paraître dans un ouvrage consacré à l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (édition française), Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, réédition Gabay, Paris 1991.

(78) David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971. Il faudrait alors noter l'abondance des figures dans l'ouvrage de Hilbert ce qui conduit à une nouvelle réflexion sur le statut de la figure, problème que nous ne pouvons aborder ici, renvoyant à un article ultérieur "Axiomatique euclidienne et axiomatique hilbertienne" (à paraître in *Mnemosyne*).

(79) Nicolas Bourbaki, *Algèbre, chapitre IX : Formes sesquilineaires et formes quadratiques*, Hermann, Paris 1959 ; Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.

(80) Evelyne Barbin, "Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie" *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7^e Colloque Inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" (Besançon 1989), IREM de Besançon et IREM de Lyon 1990.

(81) Jules Houël, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867.

Méray⁽⁸²⁾), lesquels s'appuient sur le rôle du mouvement dans la constitution de la géométrie, rôle du mouvement mis en avant dans la réforme de l'enseignement des mathématiques du début de ce siècle⁽⁸³⁾. Ce rôle du mouvement ne saurait être ignoré dans la mesure où, d'une part il participe des principes de la géométrie, à commencer par le principe euclidien de l'égalité par superposition. C'est alors *via* le mouvement que se constitue le lien entre les aspects expérimentaux et les aspects théoriques de la géométrie euclidienne, comme le montre la démonstration de la proposition 4 du

premier Livre des *Eléments* d'Euclide, proposition qui n'est autre que le second cas d'égalité des triangles. C'est alors bien plus dans cette prise en compte du mouvement que dans des modernisations *à-tout-va* que peut se renouveler l'enseignement de la géométrie, les techniques modernes peuvent y jouer un rôle comme le montre par exemple l'article de Jean-Claude Daniel cité ci-dessus⁽⁸⁴⁾, mais ce rôle ne peut être défini qu'en fonction des objectifs généraux de l'enseignement de la géométrie. C'est alors la fonction de l'enseignement de la géométrie qui est en question.

La question de la modernité

On lit dans le texte "Perspective de l'enseignement de la géométrie au XXI^e siècle", la phrase suivante :

"Le fossé entre la conception de la géométrie comme champ de recherche et comme objet d'enseignement semble se creuser ; mais jusqu'à ce jour, aucun consensus n'a été trouvé pour savoir comment franchir ce fossé, ni même s'il pourrait être franchi par l'introduction de sujets plus avancés dans les programmes scolaires au niveau élémentaire."

C'est la question même de l'accès à la modernité scientifique qui est posée, mais elle est ici posée d'une façon formelle, même si les rédacteurs semblent avoir retenu de l'échec de la réforme des *mathé-*

matiques modernes que l'accès à la modernité est difficile.

Il ne suffit en effet ni de raconter le dernier état de la science, ni de proposer aux élèves des activités "modernes" pour que la science d'aujourd'hui soit appréhendée et comprise. Tout au plus les élèves retiendront-ils des bribes de discours ou des types d'activités qui, non seulement ne les auront pas éclairés, mais risquent, comme nous l'avons déjà remarqué à propos de la réforme des *mathématiques modernes* ou de certains usages aberrants des techniques modernes, de faire écran à la compréhension de la science d'aujourd'hui.

S'il nous semble clair que l'une des finalités de l'enseignement est d'amener les nouvelles générations à comprendre le monde contemporain, il faut prendre en

(82) Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Savy, Paris 1874 ; nouvelle édition, Jobard, Dijon 1903.

(83) Rudolf Bkouche, "Variations autour de la réforme de 1902/1905" *op.cit.*

(84) Cf. note 50.

 QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE
 L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

compte le fait que la modernité n'est jamais transparente, ce qui implique que l'accès à la modernité passe par l'explicitation des raisons qui ont conduit à cette modernité. Ces raisons sont essentiellement d'ordre problématique au sens qu'elles se définissent à travers les problèmes (les champs de problèmes) auxquels se sont confrontés les inventeurs de la modernité, la question est alors celle de la signification de ces raisons, autant pour ceux qui enseignent que pour ceux qui sont enseignés. La question de la modernité se pose ainsi moins en terme de fossé à combler que de problématiques à expliciter.

Pour préciser cette question, nous reviendrons sur un point particulier qui nous semble impossible à résoudre si l'on se place dans le cadre de la classique dichotomie tradition-modernité, nous voulons parler du concept de transformation en géométrie. Il est bien connu, depuis le *Programme d'Erlangen*, que la géométrie est l'étude des propriétés invariantes par l'action d'un groupe de transformations opérant sur un ensemble ; d'où la tendance moderniste à mettre en avant le point de vue des transformations dans l'enseignement élémentaire de la géométrie⁽⁸⁵⁾ ; une telle conception de l'enseignement se heurte alors à deux problèmes.

Premier problème : on élimine ainsi l'aspect relationnel de l'égalité ou de la similitude entre figures, mettant en avant les isométries et les similitudes comme transformations. La figure disparaît

comme objet d'étude de la géométrie, n'étant plus que prétexte à "activités géométriques", et la géométrie y perd de son épaisseur, n'apparaissant plus que comme un ensemble plus ou moins disparate d'activités, sans que l'on sache très bien ce que signifie de telles activités ; c'est cela que j'ai appelé *l'activisme pédagogique*⁽⁸⁶⁾. Les théories de l'apprentissage et l'usage *à-tout-va* des machines de la modernité peuvent alors apparaître comme le moyen de (re)donner un sens (!) à ce qui est enseigné.

Second problème : les "transformations" de la géométrie élémentaire ne transforment rien, elles ne font que déplacer les objets sur lesquelles elles agissent et c'est seulement dans le cadre général de la géométrie projective qu'elles acquièrent le statut de transformations. Les "transformations" de la géométrie élémentaire sont d'abord liées au mouvement et c'est le mouvement qui définit la relation d'égalité via le *principe de l'égalité par superposition*⁽⁸⁷⁾ ; l'aspect transformationnel apparaît ainsi comme second et c'est le résultat d'une pratique mathématique que de passer de la notion de mouvement (avec toute la part d'empirisme que cela implique) au concept de transformation. Evidemment, du point de vue de la construction logique des mathématiques, on peut partir de la notion de transformation et le *Programme d'Erlangen* nous

(85) C'est ainsi que les derniers programmes de collège ont été constitués. Pour une critique de ce point de vue, nous renvoyons à notre article "De la géométrie et des transformations", *Reperes-IREM* n°4 juillet 1991.

(86) Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *op.cit.*

(87) C'est l'axiome 7 des *Eléments* d'Euclide dans l'édition de Bernard Vitrac (Euclide, *Les Eléments*, vol. 1, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990, p. 178). Sur le rôle du mouvement en géométrie, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Jules Hoüel.

donne un exemple remarquable d'une telle construction ; la question se pose alors de la signification d'une telle construction pour qui s'initie à la géométrie élémentaire. Nous avons dit plus haut le rôle du mouvement dans l'appréhension des premières propriétés géométriques ; la question se pose alors, moins d'une modernisation des programmes qui s'appuierait sur le *Programme d'Erlangen*, que de la mise en place d'un enseignement qui, partant d'un point de vue prenant en compte le mouvement, conduirait, via un cheminement convenable, à comprendre la signification d'une reconstruction de la géométrie *via* les groupes de transformations. C'est cela qui nous conduit à proposer que l'on revienne aux cas d'égalité des triangles dans l'enseignement élémentaire (88).

Ces remarques sur l'enseignement de la

(88) Sur la signification des cas d'égalité des triangles comme fondateurs de la géométrie rationnelle, nous renvoyons à notre article cité "De la géométrie et des transformations".

géométrie élémentaire mettent l'accent sur un certain caractère conservateur de l'enseignement, moins pour se complaire dans la tradition que pour comprendre les raisons de la modernité ; plus que la présentation formelle d'icelle, l'enseignement a pour objectif d'amener les nouvelles générations à comprendre la modernité.

La mise en place de l'enseignement d'un domaine donné de la connaissance ne relève ni de l'innovation continue comme le demande la mode, ni d'une entrée mythique dans le XXI^e siècle comme l'exige le discours millénariste de cette fin de siècle ; il s'agit de décider s'il faut maintenir, dans l'enseignement du collège et du lycée, ce caractère d'accès à la rationalité scientifique que constitue l'étude de la géométrie élémentaire, autrement dit, si la construction de l'intelligibilité du monde participe encore de l'enseignement d'aujourd'hui. Nous avons dit au début de cet article en quoi cela nous semblait archaïque, mais c'est peut-être cet "archaïque" qui est fondateur d'avenir.