LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Dans ce numéro, elle donne la parole à René MULET-MARQUIS qui, grâce à un dialogue imaginaire mettant en scène un maître, un élève et un savoir, s'interroge sur le lien entre Mathématiques et réalité.

Nous accueillons aussi une réaction de Adrien DOUADY au point de vue de Rudolf BKOUCHE publié dans le numéro précédent.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages.

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

SI LE DESSIN POUVAIT PARLER

René MULET- MARQUIS

Si le dialogue qui suit n'était pas purement imaginaire, on pourrait le situer dans une classe de quatrième de collège. On y rencontre, un maître, un élève et un savoir. Cette rencontre n'est pas fortuite, elle est le résultat de la volonté d'une institution. Pour pouvoir l'observer il faut être fixé, au jour et à l'heure dite. La cloche sonne, les acteurs sont en place.

– *Le maître :* "Accusé levez-vous."
– *Le dessin :* "D'habitude on me couche sur la feuille."
– *L'élève :* "Pour une fois que ce n'est pas mon procès qui est fait ça m'intéresse !"
– *Le maître :* "Dessin vous n'êtes plus accepté comme un outil de preuve."
– *Le dessin :* "Voilà que ça recommence."
– *L'élève :* "Chic si on n'a plus besoin du dessin ça m'arrange. J'en avais marre de ces parallèles à... qui par passaient par..."
– *Le maître :* "En conséquence de quoi, dessin, vous allez être exécuté."
– *Le dessin :* "Etre exécuté la peine est douce pour un dessin."
– *Le maître :* "Comme nous l'avons VU le dessin ne montre rien. Je vais donc vous MONTRER comment faire une démonstration. Prenons un exemple :
Soient deux cercles de centre O et O' qui se coupent en A et B.
a) Faire un dessin propre, soigné, précis, exact."
– *Le dessin :* "Coucou me revoilà !"
– *L'élève :* "L'histoire est un éternel recommencement."
– *Le maître :* "b) Démontrer que (OO') est perpendiculaire à (AB)."
– *L'élève :* "???..."
– *Le maître :* "Allez-y !"
– *L'élève :* "Monsieur y faut faire un dessin ?"
– *Le maître :* "Relis la question a)."
– *L'élève (insistant) :* "Je croyais que le dessin n'était plus utile."
– *Le maître :* "Relis la question a)."
– *Le dessin :* "Je suis béat !"

L'élève s'attaque à sa tâche, le dessin frémit d'aise, le professeur se promène dans la classe..Trois minutes vingt six secondes s'écoulent.

– *Le maître :* "Bon, nous allons passer à la correction. Elève tu vas au tableau."
– *L'élève :* "Monsieur j'ai pas su."
– *Le maître :* "Tu feras toujours le dessin."
– *L'élève (à part lui) :* "Ca sert plus à rien mais il faut le faire même au tableau."

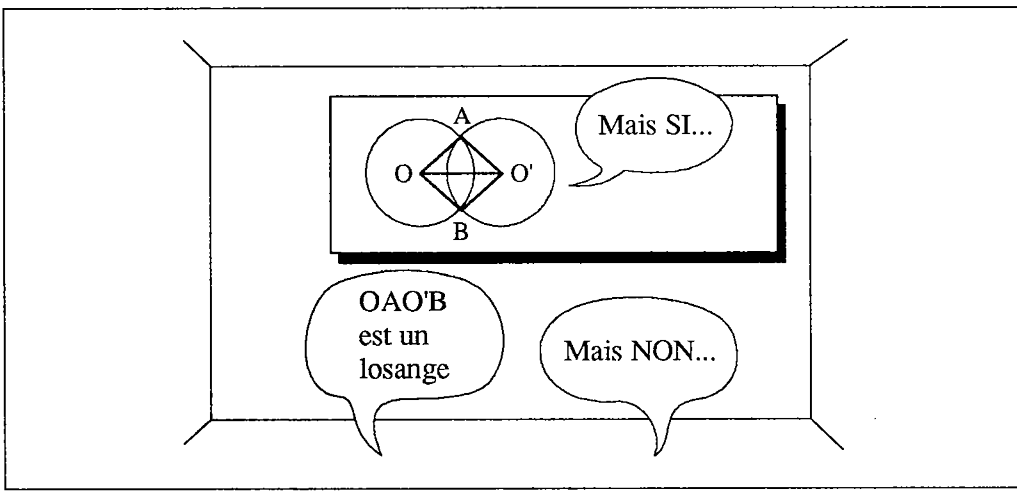
L'élève se dirige vers le tableau et il fait son

Un élève rappelle la question.

– *L'élève :* "Monsieur on voit bien sur le dessin que les droites elles sont perpendiculaires."

Le maître se tourne vers la classe et prend la position du chef d'orchestre.

– *La classe (en chœur) :* "Un dessin ne prouve rien."



tracé (avec des cercles de même rayon).

– *Le dessin :* "Me revoilà occupant tout l'espace."
– *Le maître :* "Bien ; question b)"
– *L'élève :* "???..."
– *Le maître :* "Qu'est ce qu'on demande à la question b) ?"

L'élève observe le tableau l'air absorbé.

– *Le maître :* "La question, il faut la lire dans le texte."
– *L'élève (à part lui) :* "Le texte il n'est pas au tableau."

– *Un élève (au fond, vaguement ironique) :* "Ben ouais le dessin on ne le voit pas."
– *L'élève (pour lui) :* "La galère, c'est glauque."
– *Le maître :* "Tu sais bien, il faut donner une propriété du cours."
– *L'élève (avec une lueur d'espoir) :* "J'ai compris parce que (OAO'B) est un losange alors il a ses diagonales perpendiculaires."
– *Le maître :* "Mais NON ! "
– *L'élève (incrédule) :* "Un losange n'a pas ses diagonales perpendiculaires ?"
– *Le maître :* "Mais (OAO'B) n'est pas un losange !"

– *L'élève (de plus en plus incrédule) :* "Pourtant sur le dessin..."

Le maître se tourne vers la classe.

– *La classe :* "Un dessin ne prouve rien !"
– *Le maître :* "Tu as fait un dessin dans un cas particulier. Rien ne dit dans le texte que les cercles ont le même rayon, on n'a pas forcément un losange."
– *L'élève :* "Ah oui dans le texte". *(A part lui)* : au tableau il n'y a que le dessin, pas le texte." *(Plus fort)* : "Pourtant on veut montrer que les diagonales sont perpendiculaires alors il faut un losange."
– *Le maître :* "Mais non REGARDE !". Il dessine alors un quadrilatère à diagonales perpendiculaires qui n'est pas un losange. Tu VOIS bien... les diagonales... ce n'est pas un losange."
– *Un élève (au fond, toujours vaguement ironique) :* "Ben ouais c'est comme le carré."
– *L'élève :* Ah oui ! J'ai compris le dessin ça sert seulement à prouver quand c'est faux ! Monsieur vous devriez juste nous demander de prouver des choses fausses ça serait plus pratique on pourrait faire un dessin."
– *Le dessin :* "Quoi de plus normal, je me gondole, je me courbe, en un mot je me gausse."
– *Le maître (à part lui, en grommelant) :* "Je me refuse à entrer dans cette discussion, de tels élèves n'existent pas, ça ne peut être que l'invention de l'auteur du texte, tout le monde sait bien que les élèves ne discutent jamais sur une preuve par le dessin. *(A la classe :)* Qui a une idée à proposer ?"
– *La classe :* " Le cercle inscrit... par symétrie... ça va sonner... la médiatrice..."
– *Le maître :* "Oui c'est ça, très bien la médiatrice !"
– *L'élève (désabusé) :* "Alors si il faut la médiatrice, ça fait au moins trois semaines qu'on ne l'a pas vue."
– *Le maître :* "Trois semaines ou trois mois c'est pareil il faut apprendre le cours."

La cloche sonne à cette instant.

– *Le maître :* "Bon vous finissez pour la prochaine fois."

Tout le monde sort dans le couloir.

– *Un autre maître :* "Alors tu fais quoi en ce moment ?"
– *Le maître :* "J'ai introduit les démonstrations, la classe a bien participé, ils y en a qui commencent à mordre."
– *L'élève (à "l'inventeur" de la médiatrice) :* "J'y comprends rien comment tu as trouvé ?"
– *L'inventeur :* Ben y suffit de regarder le dessin."
– *L'élève :* "Et qu'est ce qu'il veut qu'on fasse pour la prochaine fois ?"
– *L'inventeur :* "Faudra écrire."
– *L'élève :* "Bon ; le beurre et l'argent du beurre, enfin la prochaine fois, en plus du dessin, je mettrai un brin de commentaire."

Dans la pénombre de la salle redevenue silencieuse un dessin solitaire et philosophe médite sur les liens entre Mathématiques et réalité.

Point de vue

REMARQUE SUR LE "POINT DE VUE" DE R. BKOUCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE LIMITE

Adrien DOUADY

Souvent les notions mathématiques admettent plusieurs variantes, et dans l'enseignement il faut faire un choix pour décider laquelle on considère comme fondamentale. C'est le cas pour la notion de limite. La question qu'aborde R. Bkouche dans son "point de vue" est la suivante :

> « Dans l'expression "x tend vers a", faut-il admettre l'égalité x = a ou l'exclure ? »

La position qu'il défend est la suivante : dans l'expression "f(x) tend vers b lorsque x tend vers a", on exclut l'égalité au départ et on l'admet à l'arrivée, autrement dit on exclut x = a mais on autorise f(x) = b.

Examinons quels sont les choix possibles et quelles sont leurs conséquences.

Tout d'abord les phrases "f(x) tend vers b quand x tend vers a" et "la fonction f a pour limite b quand x tend vers a" sont considérées comme synonymes. Il semble y avoir unanimité sur ce point et faire un autre choix augmenterait les risques de confusion.

A priori, il y a 4 positions possibles :

1) *Accepter l'égalité au départ et à l'arrivée.* C'est la position "moderne". Inconvénient (que Bkouche signale) : l'existence d'une limite est équivalente à la continuité. Nous verrons comment y pallier.

2) *Accepter l'égalité au départ et la refuser à l'arrivée.* Inconvénient majeur : avec cette définition, il n'existe aucune fonction qui ait une limite en un point de son ensemble de définition.

3) *Exclure l'égalité au départ et l'accepter à l'arrivée.* C'est la position défendue

par Bkouche. Inconvénient : on perd la transitivité. De "f(x) tend vers b quand x tend vers a" et de "g(y) tend vers c quand y tend vers b", on ne peut pas déduire (ce que le langage cependant suggère) que g(f(x)) tend vers c quand x tend vers a. Il est facile de trouver des contre-exemples.

4) *Exclure l'égalité au départ et à l'arrivée.* Ce qu'on perd alors, c'est l'additivité. Pour des fonctions f_1 et f_2 à valeurs réelles, si f_1 et f_2 ont pour limite b_1 et b_2 respectivement, on ne peut pas en déduire que $f_1 + f_2$ a pour limite $b_1 + b_2$.

Devant cette situation, la grande majorité des mathématiciens se sont ralliés à la position "moderne" 1 : quand on ne précise pas, l'expression "x tend vers a" autorise l'égalité. Mais on peut préciser. La situation décrite dans la position 3 s'énoncera :

f(x) tend vers b quand x tend vers a en restant $\neq$ a.

Ainsi pour la fonction u définie sur [0,1] par $u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^n$, considérée par Bkouche, on peut dire : la fonction u présente une discontinuité en 1, puisque u(x) tend vers 0 lorsque x tend vers 1 en restant < 1 , alors que u(1) = 1.

Ces conventions donnent un langage souple et léger, permettant de travailler et signalant bien les pièges.

On aurait pu adopter la position 4, excluant l'égalité quand on ne précise pas, et dire "x tend vers a ou lui est égal" chaque fois qu'on veut accepter l'égalité. Vu la fréquence d'emploi dans le travail de l'analyse, cela donnerait un langage beaucoup plus lourd.

On peut imaginer une grande quantité de variantes. Le langage des filtres a été inventé pour les traiter dans leur généralité. Il est efficace, mais je n'irai pas prétendre qu'il s'agit d'un langage léger.