QUELQUES REPÈRES POUR APPRENDRE À DÉMONTRER AVEC LA RELATION DE CHASLES EN GÉOMÉTRIE

Nicole VOGEL
Irem de Strasbourg

Dans le cadre d'un groupe de recherche à l'IREM de Strasbourg, nous nous sommes intéressés à l'apprentissage des démarches de démonstration en géométrie.

La première difficulté de l'activité de démonstration est la compréhension du contrat, de la règle du jeu. Cette étape a été analysée par M.-A. EGRET et R. DUVAL dans [1].

Ensuite, le problème essentiel est d'imaginer une stratégie *a priori*, de la tester et de la modifier jusqu'à ce qu'elle réussisse. Nous appelons cela un **plan** : "il s'agit des grandes lignes d'un chemin entre les données et le but. C'est une façon schématique d'anticiper l'action, de la guider, de poser des jalons" [2].

Un plan n'est pas un chemin complet. C'est pourquoi il peut échouer. Dans ce cas, les raisons de son échec sont utilisées pour en élaborer un nouveau.

Cette étape peut être très rapide ou très informelle dans des situations standard. Elle peut se limiter au départ à des jalons très vagues dans un problème ouvert par exemple. Dans ce cas, il y a peu de chances que le premier plan aboutisse ; c'est en le mettant en œuvre qu'on le précisera, qu'on le modifiera ou qu'on décidera de l'abandonner ; mais on tiendra compte de ce qu'on aura appris pour élaborer le suivant.

Les éléments d'un plan sont fournis par la reconnaissance partielle ou totale de situations de référence ou de figures prototypes, par la comparaison en marche avant et arrière des hypothèses, de la conclusion et des théorèmes du domaine reconnu, plus généralement par ce que nous appelons l'intuition, qui se nourrit de tout cela, lorsque nous n'avons pas de cheminement identifiable.

"Entre le moment où nous comprenons le problème et celui où nous concevons un plan, la route peut être longue et tortueuse. De fait, l'essentiel dans la solution d'un problème est de concevoir l'idée d'un plan. Cette idée peut prendre forme peu à peu ; ou bien, après des essais apparemment infructueux et une période d'hésitation, on peut avoir soudain, dans un éclair, une "idée lumineuse"... Les "bonnes idées" s'appuient sur l'expérience passée et sur les connaissances précédemment acquises" [3]. (Ici le mot plan semble désigner un chemin abouti entre les hypothèses et la conclusion, alors que nous utiliserons ce terme même pour une ébauche de stratégie comme nous l'avons dit plus haut.)

Convaincus du rôle clé de cette étape dans l'activité de démonstration, nous avons cherché quelques idées pour faire progresser les élèves dans sa maîtrise.

Le travail proposé dans cet article a pour but de faire construire des plans dans quelques types d'exercices faciles à répertorier, pour prendre conscience de la notion tout en ayant le plaisir de trouver.

Evidemment, ceci n'est qu'une sensibilisation, et elle ne peut être utile que si nous l'intégrons à une réflexion beaucoup plus large sur la place de l'apprentissage dans l'acquisition de méthodes.

Voici donc le résultat de cette étude dans deux domaines où l'outil privilégié est la relation de Chasles :

– les exercices dont le but se traduit par *l'égalité ou la colinéarité de deux vecteurs* en seconde ;

– les exercices dont le but est de prouver *la cocyclicité de quatre points* en terminale scientifique.

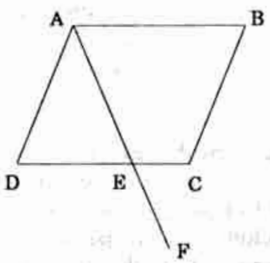
Nous examinerons ensuite quelques exemples de "méthodes" proposées par des manuels pour résoudre vectoriellement des problèmes de géométrie en seconde, et nous verrons pourquoi elles contribuent en général très peu à l'apprentissage d'une démarche de démonstration.

I. DÉMONTRER L'ÉGALITÉ OU LA COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS À L'AIDE DE LA RELATION DE CHASLES

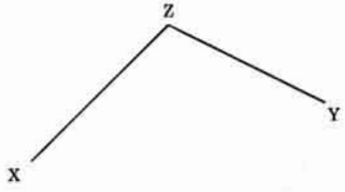
Il s'agit d'apprendre aux élèves de seconde à démontrer certaines propriétés qui se traduisent par une égalité vectorielle.

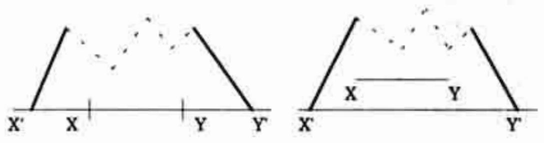
Dans un premier temps, nous avons exposé une méthode théorique et quelques exemples destinés aux enseignants dans un article paru dans l'OUVERT [4].

Rappelons cette *méthode*, en l'illustrant par l'exemple suivant :



Hypothèses :
ABCD est un parallélogramme ;
$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.
Conclusion à démontrer :
B, C, F sont alignés.

Pour commencer, on traduit l'énoncé : – *on traduit la conclusion* en une relation entre des vecteurs, si possible une égalité.	Ici, par exemple : $\overrightarrow{CF} = k\,\overrightarrow{BC}$
– *par contre, on ne traduit les hypothèses* qu'au fur et à mesure des besoins, car il y a en général trop de façons de les expliciter pour les écrire toutes au départ. Par exemple, il est difficile de prévoir sous quelle forme on utilisera une propriété telle que " I est le milieu du segment [AB] ".	
Puis on recherche un plan de démonstration : **1. On essaie les deux tests suivants. Si l'un des deux réussit, la démonstration est terminée ;** **Test 1** : les deux vecteurs sont sous la forme $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$.	Ici, ce test échoue pour le moment.
Test 2 : des propriétés géométriques élémentaires de la figure permettent de prouver que des représentants des deux vecteurs ont des supports parallèles.	Ici, ce test échoue également.
2. En cas d'échec (hélas fréquent !) de ces tests : **2.1. On décompose l'un des vecteurs ou les deux à l'aide de la relation de Chasles ;** Pour décomposer un vecteur $\overrightarrow{XY}$, on essaie de reconnaître l'une des configurations suivantes à l'aide des propriétés de la figure :	Ici, décomposons par exemple $\overrightarrow{CF}$:
Configuration 1 – Si on a la situation :  ET si les vecteurs $\overrightarrow{XZ}$ ou $\overrightarrow{ZY}$ possèdent des propriétés (P) qui se traduisent par des relations vectorielles résultant des hypothèses ou des étapes précédentes,	On reconnaît la configuration 1.
– Alors on applique la relation de Chasles en introduisant le point Z dans $\overrightarrow{XY}$.	$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF}$.

Configuration 2 – Si on a la situation  ET si certains segments d'une ligne brisée d'origine X et d'extrémité Y possèdent des propriétés (P) découlant des hypothèses ou des étapes précédentes, – Alors on applique la relation de Chasles en introduisant les sommets de la ligne brisée dans $\overrightarrow{XY}$.	
Configuration 3  – Si $\overrightarrow{XY}$ est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{X'Y'}$ ET si $\overrightarrow{X'Y'}$ est dans l'une des configuration 1 ou 2 précédentes, - Alors on exprime $\overrightarrow{XY}$ en fonction de $\overrightarrow{X'Y'}$ et on applique la relation de Chasles à $\overrightarrow{X'Y'}$.	
2.2. On applique les propriétés (P) aux vecteurs apparus dans la décomposition du 2.1. C'est à ce stade que l'on traduit les hypothèses utiles en égalités vectorielles.	Ici, on obtient $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AE}$ en appliquant les propriétés de $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$
2.3. On réduit le nombre de vecteurs présents après l'étape 2.2. Pour cela, on essaie d'appliquer successivement les règles suivantes :	

Règle 1 : S'il apparaît des sommes k $\overrightarrow{AB}$ + k $\overrightarrow{BC}$, on les remplace par k $\overrightarrow{AC}$, sauf si l'on vient de faire la décomposition inverse.	Ne s'applique pas ici.
Règle 2 : On exprime tous les vecteurs dont la colinéarité est immédiate en fonction d'un seul.	Ne s'applique pas ici.
Règle 3 : S'il reste plus de deux vecteurs après l'application des règles 1 et 2, on choisit deux de ces vecteurs, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et on exprime tous les autres en fonction de ceux-là. Pour cela, on refait les étapes 2.1. et 2.2. avec une contrainte supplémentaire : il ne faut plus faire apparaître que les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans les décompositions. On réécrit ensuite les deux vecteurs à comparer en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.	Nous avons trois vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Retenons $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ et exprimons $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de ces deux vecteurs. Retour à 2.1. : on décompose $\overrightarrow{AE}$: on reconnaît la configuration 1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$. Retour à 2.2. : on applique les propriétés de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}$ pour les exprimer en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. On réécrit $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2.4. Quand il reste au plus deux vecteurs, on revient aux tests du paragraphe 1.	Ici, le test 1 est réussi.

Remarque

Dans le 2.1., nous avons décomposé $\overrightarrow{CF}$ et pas $\overrightarrow{BC}$. Nous n'avons pas trouvé de règle simple permettant de décider d'avance s'il vaut mieux décomposer un vecteur ou les deux. Cependant ici, $\overrightarrow{BC}$ apparaît comme vecteur privilégié de la figure, ce qui explique l'idée de le conserver.

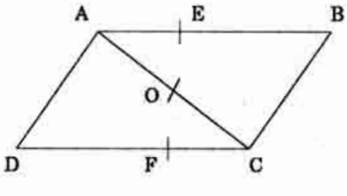
Autres exemples

Voici deux autres exercices classiques tirés de manuels de seconde auxquels nous allons appliquer la méthode précédente.

Exemple 1

Hypothèses :

ABCD est un parallélogramme ;



$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

O est le milieu de [AC].

Conclusion à démontrer :

E, O, F sont alignés.

– On traduit la conclusion : $\overrightarrow{OE} = k\,\overrightarrow{OF}$.

– Plan : (pour faciliter la lecture, nous n'indiquons plus les étapes qui ne s'appliquent pas)

2.

2.1. Décomposition

de $\overrightarrow{OE}$ (configuration 1) : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

et de $\overrightarrow{OF}$ (configuration 1) :

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}$

2.2. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

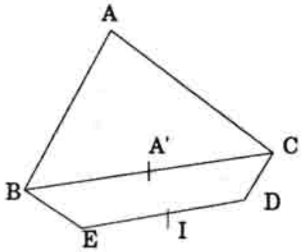
2.3. Règle 2 : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

2.4. Le test 1 est réussi.

Exemple 2



Hypothèses :
A' est le milieu de [BC] ;
$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
I est le milieu de [ED].
Conclusion à démontrer :
A, A', I sont alignés.

– On traduit la conclusion : $\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{AA'}$.
– Plan :

2.

2.1. On décompose $\overrightarrow{AI}$ (configuration 2) :
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$
et $\overrightarrow{AA'}$ (configuration 1) :
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$

2.2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ et
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2.3. Règle 2 : $\overrightarrow{BC}$ semble colinéaire à $\overrightarrow{ED}$, mais il faudrait utiliser la règle 3 pour le prouver.

Règle 3 : retenons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Retour à 2.1. On décompose $\overrightarrow{ED}$ (configuration 2) : $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$
et $\overrightarrow{BC}$ (configuration 1) : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

Retour à 2.2.

$$\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Réécriture de $\overrightarrow{AI}$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

et de $\overrightarrow{AA'}$: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

2.4. Le test 1 est réussi.

Remarque

La solution proposée ici est relativement longue, mais dans cet exercice, de caractère moins habituel, une recherche non guidée par une méthode est hasardeuse et en tous cas délicate.

Dans un deuxième temps, nous avons animé un stage MAFPEN sur les méthodes de démonstration en géométrie, au cours duquel nous avons cherché avec l'aide des stagiaires comment exploiter cette démarche en classe de seconde.

A l'issue de ce stage, j'ai rédigé les trois fiches suivantes, que j'ai testées avec mes élèves.

FICHE 1 : Démontrer à l'aide de la relation de Chasles (activités préparatoires)

Exercice 1

1) On donne deux points A et B. Placer C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
2) Placer D tel que $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

On donne un triangle ABC.

1) Placer le point G tel que $\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. (Aide : on cherche d'abord une autre relation, dans laquelle le point G n'apparaît qu'une fois ; pour cela, exprimer par exemple $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$).
2) Placer le point H tel que $\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB} + 3\,\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$. (Aide : on cherche d'abord une relation dans laquelle le point H n'apparaît qu'une fois, par exemple en exprimant $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.)
3) Quelle conjecture peut-on faire pour les points C, H et G ? (pour le moment, on ne demande pas de la démontrer).

Exercice 3

1) $2\,\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ est-il colinéaire à $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$? Justifier.
2) $4\,\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ est-il colinéaire à $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$? Justifier.

Exercice 4

1) On donne un triangle ABC.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) On donne un parallélogramme ABCD.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(Aide pour le a) et le b) : marquer en couleur sur la figure tous les représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et décomposer $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{BD}$ en suivant un chemin colorié...)

FICHE 2 : Démontrer à l'aide de la relation de Chasles (exercices pour essayer)

Exercice 1

On donne un triangle ABC et les trois points D, E , F définis par :
$\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AE} = -3\,\overrightarrow{AC}$.
Prouver que D, E, F sont alignés.

Exercice 2

On donne un triangle ABC et les deux points D et F tels que :
$\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BC}$.
On appelle I le milieu de [AC]. Prouver que (DF) est parallèle à (BI).

Exercice 3

On donne un triangle ABC et les deux points E et F tels que :
$\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA}$.
M est le milieu de [AC]. Prouver que (FE) est parallèle à (BM).

Exercice 4

Reprendre l'exercice 2 de la fiche 1 et démontrer la conjecture de la question 3.

Exercice 5

On donne un parallélogramme ABCD et les trois points E, F, G définis par :
$\overrightarrow{DE} = 2\,\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CF} = 5\,\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BG} = 3\,\overrightarrow{AB}$.
Prouver que F, E, G sont alignés.

Exercice 6

ABCD est un parallélogramme.
1) M, N, P, Q sont les points définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DA}$.
Prouver que MNPQ est un parallélogramme.
2) M', N', P', Q' sont les points définis par :
$\overrightarrow{AM'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DQ'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}$
Prouver que M'N'P'Q' est un parallélogramme.

Exercice 7

ABCD est un parallélogramme de centre O. M est le milieu de [BC] et E est le point défini par $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OB}$. Prouver que A, E et M sont alignés.

FICHE 3 : Démontrer à l'aide de la relation de Chasles (méthode possible)

Voici des indications pour construire un PLAN avec lequel on réussit souvent à résoudre des exercices comme ceux de la fiche 2. Nous allons l'expliquer en prenant comme exemple l'exercice 1.

En général...	Dans l'exemple
1) a) Faire une figure. Y placer tous les éléments qui se trouvent dans les hypothèses, mais pas ceux qui n'interviennent que dans la conclusion.	Ici, on place sur la figure le triangle ABC ainsi que les segments [AD], [CF] et [AE], mais pas la droite (DE).
b) Mettre en couleur les vecteurs cités dans les hypothèses.	On met en couleur les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Traduire le but à l'aide de deux vecteurs que nous appellerons $\vec{u}$ et $\vec{v}$	On peut choisir par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DF}$. Le but se traduit alors par $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{DF}$.
3) a) Décomposer le vecteur $\vec{u}$ à l'aide de vecteurs coloriés si possible, sinon en suivant un chemin déjà tracé sur la figure.	On choisit $\vec{u} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$.
b)Remplacer les vecteurs coloriés à l'aide de l'énoncé. Réduire éventuellement l'écriture.	On obtient $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{BA} - 3\,\overrightarrow{AC}$.
4) Refaire le 3) pour le vecteur $\vec{v}$.	$\vec{v} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.
5) a) Si les décompositions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'expriment en tout en fonction de deux vecteurs non colinéaires, on peut en général conclure.	Ici, il reste trois vecteurs : $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.
b) Sinon, choisir deux des vecteurs non colinéaires apparus dans les décompositions. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de ceux-là. (Eventuellement, penser à la méthode proposée dans l'exercice 4 de la fiche 1). On peut alors en général conclure :	On choisit par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{DE} = 3\,\overrightarrow{BA} - 3\,\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DF} = 2\,\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ $= 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{DE} = 3\,\overrightarrow{DF}$...

Commentaires sur ces fiches et sur leur utilisation en classe de seconde

– La fiche 1 est formée d'exercices préparatoires pour mettre en place les prérequis.

Exercice 1

Lorsqu'on a une relation du type $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, il faut pouvoir exprimer rapidement par exemple $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$...

Il y a essentiellement deux situations possibles :

a) ou bien la réponse est immédiate par raisonnement graphique (question 1). Dans ce cas, on n'exigera pas d'autre justification du résultat ;

b) ou bien c'est un peu moins immédiat et alors une utilisation assez simple de la relation de Chasles pour des points alignés s'impose souvent (question 2).

Cette situation est déjà nettement plus compliquée pour les élèves que le cas a).

Exercice 2

Il faut savoir placer un point défini par une relation où il intervient plusieurs fois. Il s'agit bien sûr ici d'une première initiation aux barycentres.

Exercice 3

Lorsqu'on a deux vecteurs $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$ (où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires), il faut savoir reconnaître si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non.

On peut faire le lien avec : "$\vec{u}$ a pour coordonnées (x,y) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (x',y') dans la même base donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si (x,y) et (x',y') sont proportionnels", puisque ce point de vue est au programme de seconde.

Exercice 4

Lorsque deux vecteurs (de base) ont été choisis, il faut savoir exprimer les autres en fonction de ceux-là.

Les cas les plus fréquents dans ce genre d'exercice sont :

a) exprimer un "vecteur-côté" d'un triangle en fonction des deux autres,

b) exprimer un "vecteur-côté" ou un "vecteur-diagonale" d'un parallélogramme en fonction d'un couple (côté,côté) ou (côté,diagonale) du même parallélogramme.

– Il n'est pas indispensable de faire toute la fiche 1 avant de passer à la fiche 2. On peut simplifier en ne retenant pour commencer que les questions 1) des exercices 1, 3 et 4.

– Il peut être utile de faire une lecture commentée de la fiche 3 avec l'exemple, car les difficultés à ce niveau ne sont pas très instructives.

– Il faut deux à trois fois une heure pour exploiter cette activité en seconde, avec un peu de travail à la maison pour terminer.

– Plusieurs collègues ont testé ces fiches ou des variantes dans différentes classes de seconde et ont constaté qu'avec cette aide, les élèves résolvent assez facilement les énoncés proposés. Ils vont de plus en plus vite dans les exercices 1 à 6 de la fiche 2 et dans les derniers, ils se passent des couleurs ainsi que de la fiche 3, ce qui est bien sûr un des buts recherchés.

– Il est important de noter que la méthode ne leur est pas imposée. On exige seulement qu'ils essaient au moins celle-là lorsqu'ils n'ont pas d'autre idée.

– Elle ne donne pas toujours la solution (même vectorielle) la plus courte ni la plus élégante, mais en général, elle n'est pas très compliquée à mettre en œuvre.

– L'exercice 7 est un exemple où le plan de la fiche 3 aboutit, mais avec une certaine lourdeur, alors qu'il est très facile de voir que le point E est centre de gravité du triangle ABC. Il s'agit de montrer qu'on n'a appris ici qu'une méthode à ranger parmi beaucoup d'autres possibles, et qu'il n'est pas question de l'employer systématiquement.

– Cependant, lorsqu'on choisit de faire une démonstration par le calcul vectoriel, elle évite de remplir des pages d'égalités en appliquant la relation de Chasles à l'aveuglette comme le font très souvent nos élèves.

J'avais observé les mêmes difficultés en terminale C lorsqu'il s'agissait de démontrer la cocyclicité de quatre points ou de traiter des problèmes d'angles.

Voilà pourquoi j'ai également essayé de trouver des critères de choix pertinents dans les décompositions d'angles et cherché à les enseigner.

II. RÉSOUDRE DES EXERCICES DE COCYCLICITÉ

Voici un exemple d'exercice de géométrie rencontré dans les manuels de terminale C.

Il peut être intéressant que le lecteur le résolve avant de lire la suite. Si ce type d'énoncé lui est familier, il pourra comparer sa stratégie à celle que je proposerai. Si par contre, il n'est plus très à l'aise avec ce genre de question, il pourra s'interroger plus loin sur l'efficacité de la démarche proposée aux élèves.

Exercice test

On donne un cercle Γ et quatre points A, B, C, D de ce cercle.

Quatre cercles Γ_1,Γ_2, Γ_3 et Γ_4 passant respectivement par A et B, B et C, C et D, D et A, se recoupent en B', C', D', A'. (B' est sur Γ_1 et Γ_2 ; C' est sur Γ_2 et Γ_3 etc.).

Prouver que les quatre points A', B', C', D' sont cocycliques ou alignés.

Mes réflexions sur les stratégies efficaces dans les problèmes de cocyclicité avaient abouti à un premier document assez long que j'avais déjà utilisé dans mes classes.

Pendant l'année scolaire 1990-1991, je l'ai retravaillé avec une jeune collègue, Brigitte TRIBOUT, qui appartenait à la génération des lycéens peu habitués à la géométrie des figures. Elle a donc testé l'intérêt de la démarche, puis proposé la rédaction suivante :

Remarque préalable : les programmes actuels ne définissent pas les angles de droites, mais seulement les angles de vecteurs et étudient des égalités (de mesures) d'angles de vecteurs modulo π ou 2π. D'autre part, ils ne distinguent pas un angle de sa mesure.

OUTILS ET STRATEGIES DU COCYCLICIEN

1. Quelques conseils pour représenter

C1 : Faire une figure soignée.
C2 : Ne faire apparaître sur la figure que les propriétés déjà démontrées. (Par exemple, s'il s'agit de prouver que quatre points sont cocycliques, ne pas dessiner le cercle passant par ces points au départ.)

2. Traduire l'énoncé

C3 : Poser le problème :
- s'il s'agit de démontrer une propriété, la transformer en énoncé portant sur un ou plusieurs angles. Pour le choix de ces angles, privilégier ceux qui s'écrivent $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où [AB] et [AC] sont des cordes de cercles données par l'énoncé.
- s'il s'agit de trouver un ensemble de points, traduire la relation le définissant en condition portant sur des angles.

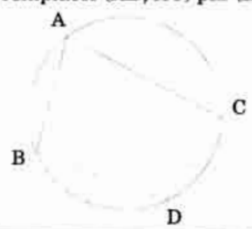
C4 : Au fur et à mesure des besoins, traduire les hypothèses en propriétés portant sur des angles utiles au problème.

3. Commencer la démonstration à l'aide de trois stratégies fondamentales, que l'on applique éventuellement plusieurs fois de suite

S1 : Situation "des deux angles inscrits"

On remplace un angle inscrit par un autre angle inscrit interceptant le même arc.

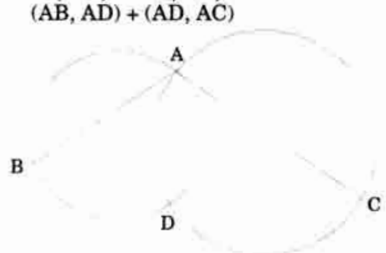
Ici, remplacer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ $[\pi]$



S2 : Situation "de la corde commune"

On remplace un angle non inscrit, dont le sommet est un des points d'intersection de deux cercles, et les côtés des cordes de ces cercles, par la somme de deux angles inscrits en utilisant la corde commune.

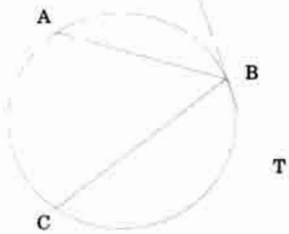
Ici, remplacer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$



S3 : Situation "de la tangente"

On remplace un angle inscrit par un angle formé avec une tangente ou réciproquement.

Ici, remplacer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BC})$ $[\pi]$



4. Poursuivre lorsque les premières stratégies ne suffisent pas

S4 : Réduire avec la relation de Chasles :
Si on ne peut plus appliquer S1, S2 ou S3 sans revenir en arrière, mais si on a une somme d'angles, on réduit cette somme
– soit en appliquant directement la relation de Chasles ;
– soit en remplaçant d'abord certains vecteurs par des vecteurs colinéaires (voir R1) pour pouvoir l'appliquer.

S5 : Autres propriétés de la figure

On essaie de retrouver une des situations S1, S2 ou S3 en utilisant d'autres propriétés angulaires de la figure (voir R1, R2, R3, R4...).

S6 : Chercher une autre décomposition

Si rien d'autre n'aboutit, on peut essayer de décomposer davantage avec la relation de Chasles. Pour cela, il faut introduire un vecteur.
Critères de choix pour ce vecteur :
– privilégier un vecteur qui correspond à une corde ou une droite déjà construite sur la figure ;
– privilégier un vecteur qui conduit à des angles du type $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ plutôt qu'à des angles du type $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$;
– si l'angle de départ est du type $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (auquel cas le point précédant ne peut pas être satisfait), privilégier un vecteur qui joue un rôle symétrique par rapport à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Remarque : exceptionnellement, il peut être nécessaire de décomposer un angle en somme de trois ; dans ce cas, retenir les mêmes critères pour le choix des deux vecteurs introduits.

Annexe : quelques règles de base à ne pas oublier

R1 : Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls alors $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u'}, \vec{v})$ $[\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u'})$ $[\pi]$
R2 : Un triangle isocèle a deux angles égaux !
R3 : La somme des mesures des trois angles d'un triangle, orientés dans le même sens, est égale à 0 $[\pi]$.
R4 : Lorsque A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O,
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ $[2\pi]$.

COCYCLICITE : A VOUS DE JOUER

Les exercices 1 et 2 sont des exercices de rodage. Essayer d'abord de les faire. Ensuite, étudier la solution proposée en indiquant à chaque étape Ei quels sont le conseil (Ci), la stratégie (Si) ou la règle (Ri) utilisés.
Les autres exercices sont à résoudre avec l'aide des stratégies précédentes.

Exercice 1

On donne un triangle ABC et trois points M, N, P, chacun distinct de A, B et C, situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont les cercles circonscrits respectivement aux triangles ANP, BMP et CMN.
On suppose de plus que, deux à deux, les cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ne sont pas tangents.
Prouver que Γ_1, Γ_2, Γ_3 ont un point commun.

Solution :

E1 : Les cercles Γ_1 et Γ_3 circonscrits aux triangles MCN et NAP sont sécants en N et I. Il s'agit donc de prouver que I appartient au cercle Γ_2. Pour cela, il suffit de montrer que : $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM})[\pi]$.

E2 : $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM})$

E3 : $= (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CM})\ [\pi]$

E4 : $= (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$

E5 : $= (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$; d'où la conclusion.

Exercice 2

Deux cercles C et C' se coupent en A et B. Une droite passant par A recoupe C en M et C' en M'.
Une droite passant par B recoupe C en N et C' en N'.
Prouver que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles.

Solution :

E1 : Le but se traduit par : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0\ [\pi]$.

E2 : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM'}) + (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'N'})$

E3 : $= (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})\ [\pi]$

E4 : $= (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN'})\ [\pi]$

E5 : $= (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BN'})\ [\pi]$

E6 : $= 0\ [\pi]$; d'où la conclusion.

Exercice 3

Voir l'exercice test proposé en introduction de cette partie...
Remarques :

– le document destiné aux élèves comportait plusieurs autres exercices.

– c'est peut-être le moment de reprendre l'exercice test pour comparer des démarches ...
Voici un exemple de solution qui utilise les conseils et stratégies exposés plus haut :

- On commence par faire une figure qui comporte les cinq cercles Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4. (C1)
On ne place pas le cercle contenant A', B', C', D'. (C2)

- Il s'agit de prouver que A', B', C', D' sont cocycliques c'est à dire que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ [π]. (C3)

On a : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'D'})$ (S2)

$= (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD'})$ [π] (S1)

$= (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD'})$ [π] (S2)

$= (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'C}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'D'})$ [π] (S1)

$= (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ [π] (S4) ; d'où la conclusion.

– pour sérier les difficultés, on ne demande pas d'étudier les figures particulières dans les énoncés précédents.

En comparant cette méthode à celle que nous avons retenue pour les vecteurs en seconde, j'ai rédigé les fiches suivantes que j'ai également testées avec mes élèves de terminale :

FICHE 1 : Résoudre des problèmes de cocyclicité ou d'angles (activités préparatoires)

Exercice 1

1) Prouver que si $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, ainsi que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$, on a : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u'}, \vec{v'})$ [π].

2) Prouver que si $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls et $\vec{w}$ un vecteur non nul, on a : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v'}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$ [π].

Retenir les propriétés établies dans cet exercice, car nous les utiliserons très souvent dans la FICHE 2.

Exercice 2

Prouver que si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont quatre vecteurs non nuls, on a : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u}, \vec{z}) + (\vec{w}, \vec{v})$ [π].

Retenir cette possibilité de transformation.

Exercice 3

On donne un triangle ABC et on appelle A', B', C' les points de contact respectifs de son cercle inscrit avec les droites (BC), (AC) et (AB).
Prouver que $(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A'}) + (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B'}) = 0\ [\pi]$.
Retenir
- que la somme des trois angles d'un triangle peut servir ;
- un moyen mnémotechnique de retrouver *au brouillon* le lien entre angle inscrit et angle corde-tangente : si T est sur la tangente en Y au cercle passant par X ,Y, Z, on peut écrire :
(XY,XZ) = (YY,YZ) (comme si on appliquait la propriété des angles inscrits avec un quatrième point, Y)
= (YT,YZ) (on remplace YY par un vecteur directeur de la tangente en Y au cercle)
d'où, *au propre*, $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = (\overrightarrow{YT}, \overrightarrow{YZ})\ [\pi]$.

Exercice 4

On donne un quadrilatère ABCD dont les angles en B et en D sont droits.
Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\ [\pi]$.

Retenir cette configuration qui est celle du quadrilatère inscriptible.

Exercice 5

On donne un triangle ABC, isocèle de sommet A, et un point T, distinct de B, de la tangente en B au cercle circonscrit au triangle ABC.
Prouver que $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [\pi]$.

Retenir que les deux angles égaux d'un triangle isocèle interviennent souvent.

FICHE 2 : Résoudre des problèmes de cocyclicité ou d'angles (exercices pour essayer)

Exercice 1

On donne un triangle ABC et trois points A', B', C', chacun distinct de A, B et C, situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont les cercles circonscrits respectivement aux triangles AB'C', A'BC' et A'B'C.
On suppose de plus que, deux à deux, les cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ne sont pas tangents. Prouver que Γ_1, Γ_2, Γ_3 ont un point commun.

Exercice 2

On donne deux cercles C et C' sécants en A et B. Une droite passant par A recoupe le cercle C en M et le cercle C' en N.
La tangente en M à C coupe la tangente en N à C' au point D.
Prouver que les points M,D,N,B sont cocycliques.

Exercice 3

On donne un triangle ABC et trois points A', B', C' *alignés*, chacun distinct de A, B et C, situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Γ, Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont les cercles circonscrits respectivement aux triangles ABC, AB'C', A'BC' et A'B'C.

On suppose de plus que, deux à deux, les cercles Γ, Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ne sont pas tangents.

Prouver que Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 ont un point commun.

Exercice 4

On donne un cercle Γ et quatre points A, B, C, D de ce cercle.

Quatre cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 passant respectivement par A et B, B et C, C et D, D et A, se recoupent en B', C', D', A'. (B' est sur Γ_1 et Γ_2 ; C' est sur Γ_2 et Γ_3 etc.).

Prouver que les quatre points A', B', C', D' sont cocycliques ou alignés.

Exercice 5

ABC est un triangle isocèle de sommet A. M est un point du cercle circonscrit au triangle ABC, distinct de A, B et C.

P est le point d'intersection des droites (AM) et (BC).

Prouver que les cercles circonscrits aux triangles BMP et CMP sont respectivement tangents en B à (AB) et en C à (AC).

Exercice 6

On donne un triangle ABC et un angle α. A chaque point M du plan, on associe ses projections orthogonales P, Q, R respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \alpha\ [\pi]$.

Exercice 7

Deux cordes perpendiculaires [AB] et [CD] d'un cercle se coupent en P.

Prouver que la médiane issue de P du triangle PBC est une hauteur du triangle PAD.

Exercice 8

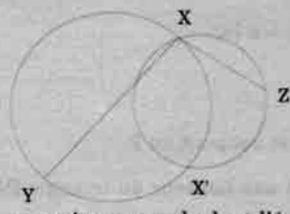
On donne un carré ABCD et une parallèle à (AB) qui coupe [AD], [BD] et [BC] respectivement en E, F et G.

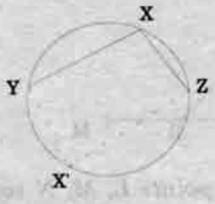
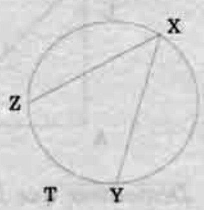
La parallèle à (AD) passant par F coupe [AB] et [CD] respectivement en H et I.

Prouver que (EH) et (FC) sont orthogonales.

FICHE 3 : Résoudre des problèmes de cocyclicité ou d'angles (quelques conseils et stratégies)

Voici un guide pour essayer d'établir un plan de démonstration pour des exercices comme ceux de la fiche 2.
Nous allons l'expliquer avec l'exemple de l'énoncé 1 de cette fiche.

En général	Dans l'exemple
1) Comprendre l'énoncé, et éventuellement le reformuler en séparant clairement, pour chaque question, les hypothèses et la conclusion. On peut s'aider ici d'une première figure rapide, éventuellement à main levée.	Γ_1 et Γ_2 ne sont pas tangents, donc ils se coupent en C' et en un deuxième point I, distinct de C'. (La définition de I est ajoutée aux hypothèses) Il s'agit de prouver que Γ_3 passe par I. (C'est la conclusion)
2) Faire une figure soignée en y plaçant tous les éléments retenus dans les hypothèses, mais pas ceux qui n'interviennent que dans la conclusion.	On place Γ_1 et Γ_2 sur la figure, mais pas Γ_3.
3) Exprimer le but, si possible sous forme d'égalité, en faisant intervenir un ou deux angles : – de préférence, au moins un angle du type $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$, où [XY] et [XZ] sont deux cordes ou une corde et une tangente d'un même cercle (configuration 1), ou de deux cercles différents (configuration 2, de la corde commune, figure ci-dessous) ;  – sinon, au moins un angle dont l'énoncé permet de donner une propriété (angle d'un triangle isocèle, d'un quadrilatère inscriptible...).	Ici, il s'agit de prouver que I, A', B', C sont cocycliques, c'est à dire que $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}) = (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'})\ [\pi]$ (configuration 2 pour le premier angle dans les deux cercles Γ_1 et Γ_2).
4) Dans la configuration 2, décomposer l'angle en faisant intervenir la corde commune (éventuellement la tangente commune), [XX'] : $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = (\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XX'}) + (\overrightarrow{XX'}, \overrightarrow{XZ})$	On a : $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}) = (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IC'}) + (\overrightarrow{IC'}, \overrightarrow{IB'})$ (la corde commune à Γ_1 et Γ_2 est [IC']) ;

5) Remplacer les angles inscrits ou les angles du type corde-tangente par d'autres qui ne sont pas encore intervenus. **configuration 1, de l'angle inscrit :** ou **configuration 1', de la tangente :**  $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = (\overrightarrow{X'Y}, \overrightarrow{X'Z})\ [\pi]$ ou $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = (\overrightarrow{YT}, \overrightarrow{YZ})\ [\pi]$	**Ici, on a :** $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IC'}) + (\overrightarrow{IC'}, \overrightarrow{IB'})$ $= (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC'}) + (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'})\ [\pi]$ **(configuration 1 dans chacun des deux cercles Γ_2 et Γ_1) ;**
6) Réduire à l'aide de la relation de Chasles, soit directement, soit en tenant compte des vecteurs colinéaires.	**Ici, $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC'}) + (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{AB'})\ [\pi]$** **car $\overrightarrow{BC'}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires.**
7) Comparer au but. **S'il n'est pas atteint, recommencer au 4), en veillant à introduire des angles nouveaux pour éviter de revenir en arrière.**	**Ici, nous avons obtenu :** $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{AB'})\ [\pi] = (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'})\ [\pi]$ **car $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CA'}$ ainsi que $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont colinéaires.** **Donc le but est atteint.**

Commentaires

Les exercices de la fiche 2 sont, à peu de choses près, ceux du thème "Points alignés, points cocycliques" de [5]. Ce choix est délibéré. Je l'ai fait d'une part parce que j'ai commencé ce travail à cause de la réflexion menée par l'équipe rédactrice de ces TP sur le même sujet – avec des choix différents –, d'autre part pour être sûre de ne pas sélectionner des exercices d'origines diverses en fonction de leur facilité de résolution par la méthode de la fiche 3.

L'exercice 8 doit permettre de comparer différentes méthodes. Il y a beaucoup de façons de le résoudre. L'une des plus simples consiste à utiliser la rotation ponctuelle qui transforme (A, E) en (I, C) ou à écrire $R(\overrightarrow{EH}) = R(\overrightarrow{EA}) + R(\overrightarrow{AH})$ en appelant R la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$. La méthode angulaire n'est pas très convaincante ici, surtout si on ne l'associe pas à des isométries. Il s'agit donc de montrer qu'elle n'est pas toujours pertinente et que ce n'est qu'une possibilité parmi d'autres.

En faisant travailler les élèves avec ces fiches, j'ai observé qu'ils sont actifs dans leur recherche. Tous ont le plaisir de réussir au moins certains des exercices et ont des idées pour les autres. J'ai même eu la surprise de les voir déçus parce que, dans un bac blanc qui a suivi, je n'ai pas donné d'énoncé de ce type.

III. TENTATIVE DE CONCLUSION... QUEL TYPE DE MÉTHODES PEUT-ON ENSEIGNER ? DANS QUEL BUT ?

Voyons ce que l'on trouve dans les manuels de seconde à propos des démonstrations utilisant la relation de Chasles.

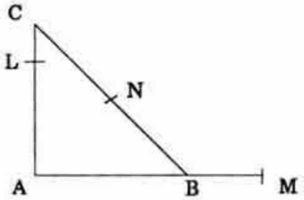
Il est évident qu'il ne s'agit pas ici d'analyser toute l'approche méthodologique des ouvrages cités, mais seulement quelques exemples en rapport avec le thème que nous avons étudié au I.

1) Collection modules Nathan

Extrait du livre [6]

Nous trouvons, avec le titre *"Argumenter"*, et avec l'objectif *"Faire comprendre que plusieurs solutions sont possibles selon les outils utilisés"*, l'énoncé suivant :

ABC est un triangle rectangle isocèle en A, avec $AB = AC = 1$.
L, M, N sont les points tels que : $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



Démontrer que les points L, M, N sont alignés.

On nous dit :

Pour chaque méthode nous donnons les différentes étapes de la démonstration. Compléter les cases en donnant les arguments, les explications qui permettent de passer d'une étape à la suivante .

Retenons seulement la méthode vectorielle (la deuxième est analytique), présentée dans l'encadré ci-dessous.

Dans la marge, on nous donne en plus le conseil de *"se reporter si utile aux situations repères 1"*, où l'on trouve, sous le titre *"Démontrer que trois points A, B, C sont alignés"* :

$$[...] \to \left[\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right]$$
$$[...] \to \left[\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\right]$$
$$\succ[...] \to \left[\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]$$
$$[...] \to \left[\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right]$$
$$[...] \to \left[\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AL}\right]$$
$$\succ[...] \to \left[\begin{aligned}\overrightarrow{ML} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\end{aligned}\right]$$
$$\succ[...] \to \left[\begin{array}{c}\text{M,N,L} \\ \text{alignés}\end{array}\right]$$

Il y a de très nombreuses méthodes pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés (en particulier...).
Pour répondre à une telle question, vous pourrez reconnaître l'une des situations suivantes.
(1) L'énoncé utilise des vecteurs ou bien les données peuvent se traduire aisément à l'aide de vecteurs.

On démontre alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (ou bien $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, ou bien...).
Pour cela, on doit mettre en évidence un nombre k de façon que
$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ ou bien $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{BC}$ ou...).
(2) L'énoncé propose un repère ou bien on peut choisir un repère...

Commentaires

La seule référence méthodologique est ici le renvoi aux "situations repères 1", qui nous explique qu'il s'agit de prouver que $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{MN}$ (par exemple). On rappelle donc qu'on peut utiliser l'**outil** "vecteur" pour prouver que des points sont alignés. On essaye de donner des critères de choix de cet outil, ce qui peut être utile. Cependant, cette indication permettra à très peu d'élèves de résoudre l'exercice, car elle n'explique pas **comment se servir de l'outil.** Elle n'indique qu'un champ méthodologique, ce qui n'est qu'un premier élément pour construire un plan. Le plus difficile reste à faire. Au lieu de cela, on nous donne une démonstration achevée et on attend quelques **explications procédurales.**

Il est vrai que le but de cette activité est "Argumenter", mais elle est quand même placée dans la rubrique "Travailler avec méthode". D'autre part, il s'agit de la seule page où l'on démontre un alignement avec des vecteurs. Dans un livre dont le sous-titre est "*méthodes* - soutien - approfondissement", le lecteur espère trouver mieux que cela.

Si on se fie aux titres, on pense d'ailleurs que la page précédente, "Elaborer une stratégie - Objectif : comprendre l'intérêt de la relation de Chasles pour démontrer", va répondre à cette attente. Hélas, la suite est décevante. En effet, on nous donne un quadrilatère ABCD et les milieux P et Q des diagonales [AC] et [BD]. On nous propose de démontrer que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{PQ}.$$

On nous explique ensuite de façon claire comment établir la première égalité. Mais nous voyons bien que la difficulté n'est pas là. Lisons la suite :

"On peut penser qu'ici aussi, pour passer de l'écriture $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ à l'écriture $2\overrightarrow{PQ}$, il va falloir utiliser la relation de Chasles. Mais à chaque fois de nombreux choix possibles se présentent à nous. Rien ne nous dit que le premier choix sera le bon.

Si ce n'est pas le bon, il faut en changer et recommencer. Toute cette recherche, tous ces essais, sont à mener au brouillon de préférence."

On nous donne ensuite trois exemples de décompositions dont deux permettent de conclure et pas la troisième.

Nous voilà perplexes ! Qu'avons-nous appris ? Que pour résoudre un problème, il faut faire une recherche, des essais, tout ceci au brouillon. Très bien, mais pouvons-nous vraiment apprendre à nos élèves à chercher, si nous leur faisons croire que cela consiste à examiner au hasard tous les cas existants successivement ? Il est vrai que le premier choix ne sera pas nécessairement le bon. Cependant, il est sûr aussi qu'on a très peu de chances d'aboutir en décomposant n'importe comment.

Puisque le titre est "Elaborer une stratégie", pourquoi ne nous montre-t-on pas comment organiser cette recherche pour lui donner quelques chances de réussir ?

2) Collection Déclic, Hachette

Extrait du livre [7]

On trouve un paragraphe qui a pour titre *"Vecteurs colinéaires et points alignés"*. On y étudie l'exercice suivant :

Soit ABC un triangle, E le point du segment [AB] tel que 3EA = 2EB et F donné par $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les points A, C et F sont alignés.

Le manuel donne :

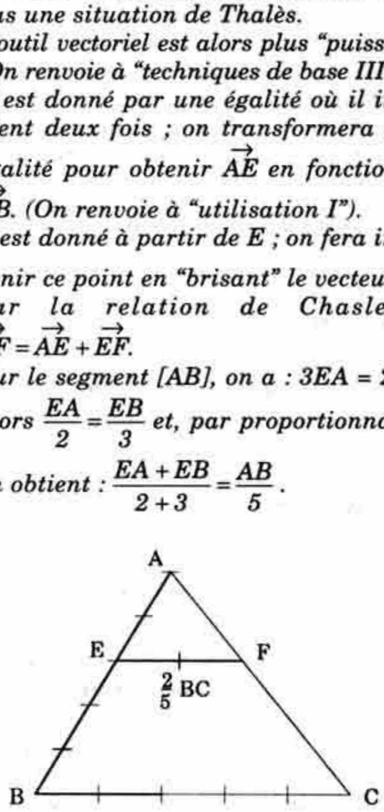
> *METHODE*
> *Pour montrer vectoriellement que trois points sont alignés, on montre que deux vecteurs (différents) définis à partir de ces trois points sont colinéaires.*
> *Si* $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires, alors A, C et F sont alignés.*

Puis la résolution est présentée en deux parties :

Recherche

Comme $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$*, les droites (EF) et (BC) sont parallèles.*

Cependant, on ne sait pas que A, C et F sont sur une même droite : ce n'est donc pas une situation de Thalès.
L'outil vectoriel est alors plus "puissant". (On renvoie à "techniques de base III").
E est donné par une égalité où il intervient deux fois ; on transformera cette égalité pour obtenir $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$*. (On renvoie à "utilisation I").*
F est donné à partir de E ; on fera intervenir ce point en "brisant" le vecteur $\overrightarrow{AF}$ *par la relation de Chasles :* $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$.
Sur le segment [AB], on a : 3EA = 2EB, alors $\frac{EA}{2}=\frac{EB}{3}$ *et, par proportionnalité, on obtient :* $\frac{EA+EB}{2+3}=\frac{AB}{5}$.



Rédaction

Comme E est un point du segment [AB], les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{EB}$ *sont de même direction et de même sens.*

Donc 3EA = 2EB se traduit vectoriellement par $3\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$.

En appliquant la relation de Chasles, on obtient : $3\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AB}$ *;*

d'où $3\vec{AE} - 2\vec{EA} = 2\vec{AB}$ *c'est-à-dire* $5\vec{AE} = 2\vec{AB}$.
Ainsi, le point E est défini par $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ *(1).*

On cherche s'il existe un nombre k tel que $\vec{AF} = k\,\vec{AC}$.

D'après la relation de Chasles :
$\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$
$= \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC}$ *(d'après la formule (1) et la donnée de F)*
$= \frac{2}{5}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{2}{5}\vec{AC}$ *(d'après la relation de Chasles).*
L'égalité $\vec{AF} = \frac{2}{5}\vec{AC}$ *signifie que* $\vec{AF}$ *et* $\vec{AC}$ *sont colinéaires, donc A, F et C sont alignés.*

Commentaires

Nous avons déjà dit dans l'exemple 1) que le cadre appelé "Méthode" ne donne qu'un champ d'action, alors que la difficulté essentielle est de trouver un chemin dans ce champ. D'autre part, les objectifs du paragraphe appelé "Recheche" ne sont pas très clairs. On annonce que l'on transformera l'égalité où E intervient deux fois pour obtenir $\vec{AE}$ en fonction de $\vec{AB}$. On ne dit pas pourquoi. S'agit-il seulement de placer E, ou aussi d'obtenir une relation vectorielle utile dans la suite ? De plus, on fait des calculs de longueurs dans la fin de cette recherche. Dans quel but ? S'il s'agit de placer E, le calcul vectoriel prévu suffira.

La seule indication d'ordre heuristique en rapport direct avec la propriété à démontrer est "F est donné à partir de E ; on fera intervenir ce point en "brisant" le vecteur $\vec{AF}$ par la relation de Chasles : $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$.

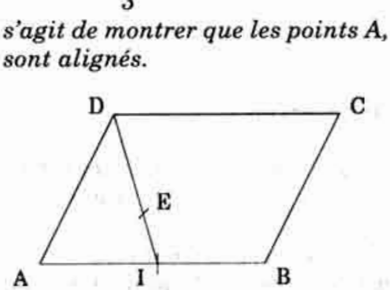
Finalement, malgré quelques tentatives (on renvoie à "techniques de bases", "utilisation"...), on retrouve ici le défaut de la plupart des exercices résolus : on ne sépare pas clairement ce qui est lié au cas particulier présenté, de ce qui est commun à beaucoup d'exercices du même genre et qui mérite d'être retenu. Pour cela, il faudrait surtout indiquer au départ un **plan de démonstration** et dire les raisons pour lesquelles on choisit celui-ci lorsqu'elles existent.

3) Collection Terracher, Hachette

Extrait du livre [8]

Nous trouvons, avec le titre *"Un problème d'alignement"*, l'exemple suivant :

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3}ID$.
Il s'agit de montrer que les points A, E et C sont alignés.



On explique ensuite :

La solution envisagée ici est une solution vectorielle (à l'aide de vecteurs) : il en *existe d'autres cependant (voir application n°...).*

La solution est présentée en deux colonnes :

Idées de recherche	*Rédaction*
Nous voulons : A, E et C alignés. *Vectoriellement, cela revient à établir que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.* *On sait que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (puisque ABCD est un parallélogramme).* *D'où la question : peut-on écrire $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?* *L'idée est de "passer" par le point I :* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$. * *$\overrightarrow{AI}$ s'exprime en fonction de $\overrightarrow{AB}$ (I est le milieu de [AB]).* * *Et $\overrightarrow{IE}$? La position de E sur [ID] est bien connue (nous pouvons écrire $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$).* *Nous savons alors qu'avec un peu de patience et de relation de Chasles, on pourra exprimer $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$, et donc en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$...*	*Comme ABCD est un parallélogramme on a :* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ *(1).* *Nous pouvons traduire que E est le point de [ID] tel que $IE = \frac{1}{3} ID$ par la relation $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$.* *On a donc, par la relation de Chasles :* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{ID})$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. *Utilisons le fait que I est le milieu de [AB] :* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. *On obtient alors :* $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, *soit :* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ *(2).* *Il découle des relations (1) et (2) que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points A, E et C sont alignés.*

Commentaires

Quelques pages avant, nous trouvons une "caractérisation" de l'alignement :

La relation entre vecteurs "$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires" traduit la propriété géométrique "les points A, B et C sont alignés".

Ainsi cette propriété me semble remise à sa juste place. Elle permet en effet de passer d'un point de vue de géométrie classique à un point de vue vectoriel et réciproquement. Elle fournit donc un domaine de recherche, mais pas vraiment une méthode.

Dans la partie "Idées de recherche", nous avons ici un plan : on nous dit comment on va procéder. Cependant, il n'y a pas assez d'explications sur les raisons des choix qui ont été faits et il sera donc difficile de généraliser la situation pour apprendre à construire son propre plan dans un exercice du même genre : par exemple, pourquoi cherche-t-on dès le départ à écrire $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et pas directement à l'aide de $\overrightarrow{AC}$? Pourquoi passe-t-on par le point I plutôt qu'un autre ? Qu'y a-t-il derrière la "patience" évoquée ? Y avait-il d'autres choix pertinents ? Ces questions ont des réponses utiles. On peut décider que c'est au lecteur d'y répondre, mais c'est là que figurent les clés d'un apprentissage méthodologique à partir de l'exemple étudié.

La partie "Rédaction" est claire et met en œuvre le plan annoncé.

En conclusion, ces quelques exemples nous montrent qu'il est peu probable qu'un élève moyen apprenne à résoudre des problèmes d'alignement avec l'outil vectoriel à l'aide de ce qu'il trouvera dans les manuels. Que faudrait-il pour cela ?

Que peut-on enseigner dans le domaine des méthodes ?

Les fiches 3 des parties I et II proposent un travail sur des plans. Selon les exercices auxquels on les appliquera, ces méthodes fourniront une démonstration sans difficulté (par exemple pour l'exercice 2 de la fiche 2 "Relation de Chasles"), quelques éléments d'une solution (par exemple pour prouver que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{PQ}$ lorsque P et Q sont les milieux des diagonales [AC] et [BD] d'un quadrilatère ABCD), aucun résultat utile ou une solution très compliquée par rapport à d'autres possibilités (par exemple pour l'exercice 8 de la fiche 2). On peut bien sûr avoir comme objectif l'élaboration de telles fiches par les élèves, en cherchant des points communs à des résolutions de situations comparables.

Dans les exemples présentés ici, il s'agit de résoudre des catégories d'exercices assez faciles à identifier. Mettre en évidence des plans qui ont des chances de réussir assez souvent a l'avantage de faciliter la résolution de toute la famille d'exercices. Cet objectif n'est pas négligeable, car lorsqu'on peut l'atteindre, il donne une assez grande autonomie grâce à une approche beaucoup plus globale que le pas à pas. Il ne s'agit pas de "recette" puisqu'on ne peut pas trouver de plan universel mais seulement des éléments assez généraux parmi lesquels il y a beaucoup de choix à faire pour construire un plan particulier. De plus, il n'y a pas de test infaillible pour reconnaître les exercices qu'on réussira à traiter ainsi.

Nous avons choisi comme thème les exercices d'alignement, de cocyclicité et d'angles et comme champ méthodologique la relation de Chasles car c'est un domaine où l'arbre des possibilités de plans peut être réduit à une dimension raisonnable en prenant des décisions du genre de celles des fiches 3. C'est pour cela qu'il se prête facilement à une initiation à la notion de plan. Dans d'autres cas, les difficultés peuvent être plus nombreuses : il s'agit de délimiter un champ d'exploration *a priori*, en sachant qu'il ne peut être clos tant qu'on n'a pas découvert de solution satisfaisante (dans le I et le II on se place implicitement dans le domaine de la relation de Chasles. Le travail ne porte donc pas sur cette phase du plan, mais il faut comprendre que c'est un choix qui peut être remis en question, d'où l'importance des derniers exercices des fiches 2) ; il faut trouver des jalons de parcours à l'intérieur de ce champ ; comme on ne peut jamais explorer toutes les possibilités, il faut arriver à se décider entre elles ; il faut savoir quand on décide d'abandonner un chemin ; enfin, quand on pense avoir trouvé, il faut vérifier et chercher des simplifications. Un vrai problème présente toutes ces difficultés à la fois et sa résolution peut dépendre autant d'une idée géniale dont les connexions avec le problème sont difficiles à reconnaître que d'un travail laborieux d'exploration de chemins raisonnables.

Malgré tout, nous pensons que la recherche de familles de plans est souvent possible dans l'enseignement des mathématiques en associant des champs méthodologiques et des critères de choix assez généraux à l'intérieur de ces champs à des catégories de problèmes. L'intérêt de cette démarche est d'éviter le "saucissonnage" caricatural des énoncés. En effet, dans un énoncé trop découpé, on ne s'exerce plus qu'à la phase de vérification. C'est le défaut de la plupart des sujets d'examen, mais c'est aussi celui de beaucoup d'activités appelées "problèmes résolus" ou "travaux pratiques" dans les manuels, ce qui est beaucoup plus difficilement défendable.

Dans un "problème résolu", on devrait trouver le plan utilisé, distinguant ce qui est général de ce qui est lié au cas particulier, clairement séparé de sa mise en œuvre technique, et lorsque c'est possible, des indications sur les éléments qui peuvent fournir l'idée de ce plan. Un autre rôle de ces exemples, attribué au professeur par G. PÓLYA dans [3], devrait être "d'encourager à imaginer des cas où on pourrait utiliser à nouveau le même processus de raisonnement ou appliquer le résultat obtenu. Peut-on se servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?"

Evidemment, on ne trouvera pas de règle fournissant un plan immédiatement applicable pour résoudre n'importe quel problème. Mais on peut penser qu'on aura plus de facilité à en imaginer un si on travaille très souvent dans ce sens. Pour cela, il faut faire beaucoup d'activités dont l'objectif est d'acquérir cette notion de plan. Hélas, les "méthodes" des manuels de mathématiques y contribuent encore trop rarement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] "Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration", M.-A. EGRET, R. DUVAL, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Vol. 2, 1989.

[2] "Modélisation de la démonstration géométrique dans 'Geometry Tutor' ", D. GUIN et le groupe I.A. de l'IREM de Strasbourg, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Vol. 4, 1991.

[3] *Comment poser et résoudre un problème*, G. PÓLYA, DUNOD, 1965.

[4] "Recherche de méthodes de démonstration liées à la relation de Chasles", M.A. EGRET, G. KUNTZ, G. METIVIER et N. VOGEL, *L'OUVERT,* n° 67, Juin 1992.

[5] *Maths en pratique - Terminales C/D/E*, BORDAS, travaux pratiques rédigés par l'IREM de Strasbourg.

[6] Collection modules NATHAN, *Les Maths en Seconde*, p. 90.

[7] *Déclic - Mathématiques, Seconde,* HACHETTE, 1993, p. 186.

[8] *Terracher - Mathématiques, Seconde*, HACHETTE, 1990, p. 191.