REPERES - IREM . N° 25 - octobre 1996

SITUATION D'AGRANDISSEMENT ET CONSTRUCTION DU CONCEPT D'ÉCHELLE

Jean-Pierre LEVAIN
Irem de Besançon

Introduction

Nous tenterons d'analyser, dans le cadre de cet article, la diversité des conceptualisations et des procédures de résolution mises en œuvre par des élèves de collège confrontés à la résolution d'une série de problèmes d'agrandissement et d'échelle. En nous situant dans une perspective de psychologie cognitive, nous mettrons plus particulièrement l'accent sur la variété des savoirs et savoir-faire mobilisés par chacun d'eux avec plus ou moins de pertinence.Nous aborderons tout particulièrement les principales difficultés liées au passage des situations d'agrandissement aux problèmes nécessitant d'objectiver le concept d'échelle. Chemin faisant, ce travail nous permettra de dévoiler un ensemble d'éléments qui permettent de différencier les "bons élèves" de ceux qui éprouvent davantage de difficultés.

Nous avons conduit pour ce faire une série d'entretiens avec 20 élèves de cinquième, quatrième et troisième. Notre objectif était de faire préciser à chaque sujet ses principaux modes de fonctionnement : comment s'organisent ses différentes procédures en fonction de la complexité du problème ? Quel est l'état de ses connaissances ? Quelles sont ses erreurs les plus fréquentes ? Les différentes représentations symboliques qu'il utilise ? Nos entretiens accompagnent systématiquement une activité de résolution de problèmes. Notre analyse porte donc à la fois sur les procédures mises en œuvre par le sujet (analyse des protocoles), et sur ses verbalisations, que celles-ci soient spontanées ou en réponse à des questions de notre part. Nous ne présenterons pas ici, faute de place l'intégralité des entretiens qui couvrent plus de 200 pages, mais seulement certains fragments parmi les plus représentatifs. De ce fait, certaines interprétations peuvent donner l'impression au lecteur de déborder en partie le cadre des exemples proposés.

Maîtriser les situations d'agrandissement

1. Les conceptions des élèves

Nos entretiens soulignent que les élèves de collège connaissent bien le terme d'agrandissement puisque dix-neuf élèves (sur vingt) le définissent, d'un point de vue théorique, comme étant le résultat d'un opérateur multiplicatif (un seul le définit de manière additive). Ils semblent également maîtriser sur ce plan les aspects invariants essentiels liés à ce concept en avançant, sans plus d'hésitations, que dans un agrandissement, toutes les dimensions changent (elles sont multipliées) alors que la forme se conserve. Dix élèves qualifient spontanément cet opérateur multiplicatif d'échelle, cinq autres associent d'emblée la situation d'agrandissement à la proportionnalité. Ces conceptions apparaissent d'emblée positives ; pourtant, quand on quitte le domaine spécifiquement mathématique pour aborder des situations d'agrandissement davantage en prise avec le quotidien, les conclusions de dix élèves, soit juste la moitié de notre échantillon, deviennent beaucoup moins assurées et marquent déjà une rupture entre savoirs et savoir-faire :

Isabelle, troisième (1) **:**

– As-tu des exemples d'agrandissements dans la vie courante ?

– Des photos qu'on aime bien, on peut les faire agrandir.

– Est-ce que les règles d'agrandissement de figures géométriques s'appliquent également à l'agrandissement de photos ?

– Alors là je ne sais pas... Je ne peux pas vous dire...

– Et avec une photocopieuse, on peut faire des agrandissements et des réductions...

– Oui, oui...

– Est-ce que ce sont les mêmes règles également ?

– Euh non, c'est différent, mais je ne sais pas comment on fait, vu que c'est la machine qui fait...

Charlotte, troisième :

– Prenons l'exemple d'une photocopieuse qui peut agrandir ou réduire des documents, donc aussi des figures géométriques, est-ce que les règles d'agrandissement sont les mêmes ?

– Non parce qu'avec une photocopieuse, on peut très bien agrandir une longueur par 2 et une autre par 3...

– Tout n'est pas forcément multiplié par le même nombre,

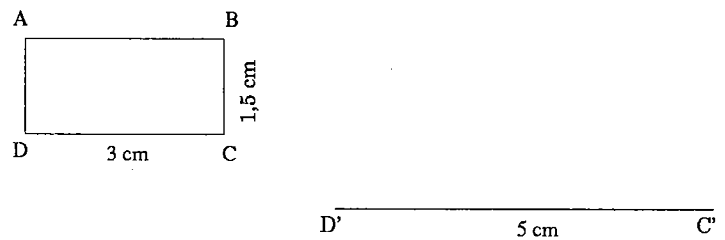
– Non, c'est pas obligé !

– Tout à l'heure tu m'as dit : "Si on oublie de multiplier une longueur par le même nombre, la forme change complètement". Dans un agrandissement de photocopieuse la forme change ?

– [Long silence] ... Non ça ne change pas...

Ces deux exemples, choisis parmi bien d'autres, illustrent la difficulté (classiquement reconnue dans l'enseignement) du transfert des connaissances. Le passage d'un domaine de référence à un autre n'implique pas nécessairement le transfert

(1) Les interventions de l'interviewer sont présentées en italiques.



Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD

Énoncé du problème n° 1

des connaissances et des procédures qui s'y rapportent ; même si celles-ci sont par ailleurs assez largement automatisées dans le cadre familier des situations les plus fréquemment rencontrées à l'école.

Ces deux exemples traduisent également une distorsion du rapport des mathématiques à la réalité qu'on rencontre chez un grand nombre d'élèves en difficulté. Beaucoup d'entre eux ne décrivent plus nécessairement les mathématiques comme un ensemble d'outils permettant de comprendre des situations et de résoudre des problèmes "réels", mais davantage comme un monde clos, disposant de ses propres règles qu'il importe de bien maîtriser pour réussir dans le cadre scolaire.

2. Les procédures de résolution

Nous observons que la plupart des élèves utilisent en priorité des procédures qui donnent du sens à la situation d'agrandissement. Par exemple au problème n°1, quatorze élèves (soit les 3/4 de notre échantillon) calculent d'emblée le rapport externe d'agrandissement qui est complexe (5/3), alors que cinq seulement utilisent le rapport interne simple (1/2). Nous relevons par ailleurs une procédure additive (énoncé du problème ci-dessus) (2).

Parmi les quatorze élèves qui calculent le rapport externe d'agrandissement, huit sont réticents, malgré l'insistance de nos suggestions, à accepter la validité de la procédure reposant sur le rapport interne, voire la rejette purement et simplement :

Isabelle, troisième, problème n°1 :

– La longueur du rectangle est de 3 centimètres, là elle est de 5, donc je vais diviser 5 par 3, pour savoir par quoi je vais multiplier 1,5 centimètres... J'arrondis à 1,6... Alors 1,5 fois 1,6... Ca me donne 2,4 centimètres pour la largeur.
– *D'autres élèves me disent : comme la largeur est la moitié de la longueur, il suffit de diviser 5 par 2...*
– Je sais pas, c'est pas un bon raisonnement, on n'a plus les mêmes proportions.

(2) Dans le matériel présenté aux élèves, chaque problème occupe l'espace d'une feuille 21 × 29,7 cm. Les énoncés sont ici resserrés pour un gain de place.

– Pourtant 1,5 est bien la moitié de 3...
– Je ne sais pas... je pense pas que ce soit ça... Je fais toujours à ma manière...

Aurélie, troisième, problème n°1 :

– Alors euh... Faut déjà trouver l'échelle... Pour la calculer, on va faire... L'échelle est égale à la dimension dessinée sur la dimension réelle ! Ça fait à peu près 1,6, euh... 1,7 donc on va multiplier la mesure BC par 1,7 pour trouver B'C'. Ça fait à peu près 2,55...
– D'autres élèves me disent : "ici la largeur fait la moitié de la longueur"...
– Bien ce sera pas tout à fait exact. C'est sûr que c'est la moitié, mais il est faux... Parce que si on se retrouve avec des nombres à virgule on pourra pas trouver *[silence]...*
– Oui, mais dans le cas présent...
– C'est faux ! Dans un agrandissement *[long silence]...* On trouvera pas les mesures exactes *[silence]...* Je ne sais pas...
– Donc pour toi ce n'est pas pareil. On n'aboutit pas forcément au même résultat ?
– Si, on trouve à peu près le même résultat, mais ce n'est pas un raisonnement très exact... On ne trouvera pas le résultat exact, ce sera approximatif.

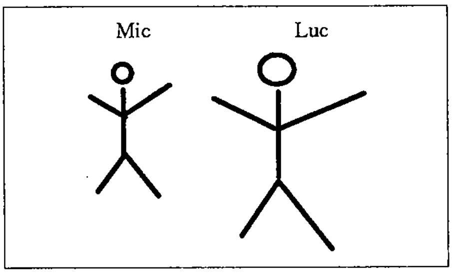
Ces deux exemples nous permettent de préciser nos remarques précédentes. Nous constatons en effet que les élèves en difficulté développent fréquemment une solution unique (juste ou fausse) qui leur est familière. Ils ne disposent pas, contrairement aux "bons élèves", qui passent beaucoup plus aisément d'une solution à une autre, d'un répertoire de procédures organisés de manière signifiante. Du coup, ces mauvais élèves donnent trop d'importance à certains traits de surface qui sont prélevés dans l'énoncé (indices linguistiques ou numériques par exemple) au détriment d'une véritable compréhension du problème qui passe par l'analyse de sa structure mathématique. Nos données nous permettent de relever que la compréhension de l'élève passe par deux aspects complémentaires :

1.- la capacité à analyser et à traiter un ensemble varié de situations et de problèmes d'agrandissement.
2.- La possibilité de mettre en œuvre, ou du moins de reconnaître, différentes procédures permettant de résoudre un même problème.

Face à un problème, la réponse du sujet va dépendre à la fois du répertoire de schèmes qu'il peut mobiliser et aussi de la plus ou moins grande familiarité de la tâche.

Le temps d'analyse du problème nous apparaît également comme une caractéristiques distinguant les "bons élèves" des sujets en difficulté. Les premiers prennent davantage de temps pour construire une représentation du problème pouvant prendre des formes très variées : le plus souvent graphique (schémas et dessins), mais aussi orale (récapituler plusieurs fois le problème en mettant l'accent sur les données essentielles). Ce constat ne signifie pas nécessairement que les élèves en difficulté ne construisent pas une représentation de la tâche. Cette dernière est cependant difficilement observable en ce qui concerne nos protocoles.

Nous avons voulu, avec le problème n°2, tester la solidité des procédures additives développées par certains. Nous nous sommes pour ce faire inspiré de la célèbre épreuve de Karplus "Mr Short and Mr Tall" (Karplus *et al.*, 1972) :



Sur une photo, Mic mesure 4 cm et Luc 6 cm.

Après agrandissement de la photo, Mic mesure 6 cm

Combien Luc mesure-t-il sur la photo agrandie ?

Énoncé du problème n° 2

Au problème n°1, dix-neuf élèves énonçaient correctement la conservation de la forme d'une figure suite à un problème d'agrandissement relativement classique. Les résultats apparaissent nettement plus nuancées en ce qui concerne le problème n°2 :

Ce problème est assez mal réussi pour deux raisons principales (3) :

- La symétrie des valeurs numériques invite à l'utilisation d'une procédure additive (tendance à répondre : 8).
- Cet effet est sans doute renforcé par la petite taille des nombres qui pousse le sujet à répondre très vite, sans forcément contrôler les opérations.

En effet, dix élèves (la moitié de l'échantillon) construisent spontanément une procédure additive (réponse 8). Deux élèves maintiendront et argumenteront ce choix malgré les nombreuses confrontations de notre part :

Charlotte, troisième, problème n°2 :

– Au début, Mic faisait 4 cm et Luc 6. Tandis qu'après, quand la photo est agrandie, il fait 6 cm ; Donc il fait 2 cm de plus; Il faut rajouter 2 cm à Luc...
– *Tout à l'heure tu m'as dit : "Pour faire un agrandissement, on multiplie toutes les dimensions par le même nombre", et puis là tu fais une addition, tu peux m'expliquer ça ?*
– *[Long silence]*... Bien parce que tout à l'heure ils divisaient, c'était divisible quoi... *[Long silence]*...
– *Comment tu as fait pour repérer que c'était une addition ?*
– Si Mic passe de 4 à 6 cm *[silence]*... Et puis comme c'était pas le double alors *[silence]*...
– *Si Mic était passé de 4 à 8 cm, tu aurais fait comment ?*
– J'aurais dit 10... Mais j'aurais hésité avec 12 *[silence]*...
– *Tu aurais hésité entre 10 ou 12...*
– Oui, mais maintenant, je ne sais plus *[silence]*...

Ce passage est intéressant car il met en évidence le privilège accordé au double qui, ici, met en balance la réponse additive. Doubler toutes les dimensions reste une

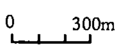
(3) Nous avons intégré, il y a quelques années, ce problème dans l'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'école normale de Besançon. A notre grande surprise, presque la moitié des candidats n'ont pas réussi à le résoudre.

opération accessible à beaucoup d'élèves encore en difficulté avec la proportionnalité. Il est dans ce cas possible de parler de pré-proportionnalité.

L'échelle : un concept délicat et ambigu

1. problématique

Les situations d'agrandissement et d'échelle sont aujourd'hui d'un usage relativement courant (photos, zooming, agrandissement ou réduction de documents à l'aide d'une photocopieuse, etc.). De même, la lecture de plan, ainsi que la distinction entre carte et territoire renvoient à des pratiques sociales tout à fait banalisées (notice d'agencement de "lego", construction d'un modèle réduit, choix d'un itinéraire, calcul du kilométrage etc.). Néanmoins les problèmes d'échelle posent dans leur ensemble de grosses difficultés à la plupart des élèves (environ 30% de non-réponses). Le calcul d'une échelle sous sa forme fractionnaire n'est réussi que par un peu plus du tiers des élèves de collège. Le changement d'écriture que traduit le passage d'une échelle de type : "2 cm pour 1 km" ou de type :



vers une forme fractionnaire est encore plus délicat puisqu'il n'est réussi que par 27% de ces mêmes élèves (Levain, 1992).

Plusieurs hypothèses peuvent d'ores et déjà être avancées pour expliquer la faiblesse de ces résultats :

En ce qui concerne les programmes, l'échelle est une notion souvent introduite au CM_2 ; elle n'est plus enseignée en sixième puis réapparaît en cinquième. Il est permis de penser qu'un réinvestissement en quatrième et en troisième permettrait d'améliorer les performances des élèves. Les processus d'assimilation et de construction de sens s'étendent en effet sur du long terme.

Dans les problèmes d'échelle, le plan ou la carte est un objet physique sur lequel l'élève est invité à faire des mesures. Pourtant, au collège, il est progressivement demandé aux élèves de ne plus faire de mesures à la règle. Les différentes figures géométriques deviennent essentiellement des supports de réflexion. Leur statut est alors davantage qualitatif que quantitatif. En ce sens, représentants géométriques et représentants cartographiques renvoient à des démarches qui peuvent apparaître contradictoires à certains sujets.

Le concept d'échelle a par ailleurs un statut épistémologique ambigu. Il ne s'agit pas d'un objet mathématique au sens strict. Il n'est pas, contrairement aux autres objets mathématiques, étudié de manière interne à cette discipline. Il ne peut donc pas se définir exclusivement en référence à d'autres objets mathématiques. Une enquête en direction des professeurs permettrait sans doute de mieux cerner la part de connaissances extra-mathématiques véhiculées lors de l'enseignement de cette notion. Si par exemple l'expression fractionnaire de l'échelle reste une compétence exigible, ce n'est sans doute pas toujours la forme la plus pertinente pour raisonner sur les différentes grandeurs en jeu.

Enfin, le passage des problèmes d'agrandissement à ceux d'échelle n'est pas direct et ne va pas de soi. Considérons les deux exemples suivants : "le salon est trois fois plus grand que la cuisine" ou encore "ce

Un architecte a réalisé la maquette d'un nouveau quartier. Sur cette maquette, un immeuble de 25 m de haut est réprésenté par une petite boîte d'allumettes de 5 cm de hauteur.

Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble?

Ecris ta réponse dans le cadre
(tu peux faire les changements d'unités que tu désires).

Énoncé du problème n° 3

négatif photo a été agrandi 25 fois". Les deux objets mis en rapport sont chaque fois d'une grandeur comparable, ils sont en fait facilement assimilables à des objets géométriques. Par contre, en ce qui concerne les problèmes d'échelle la différence de taille est telle entre les deux objets que d'emblée le rapport se construit plutôt comme un rapport entre un signifiant et un signifié que comme un rapport entre objets de même nature. L'échelle traduit alors les caractéristiques d'un signifiant dans son rapport au signifié comme celui d'une carte au territoire qu'elle représente. Comment faire, dans ce cas, pour restaurer entre ces deux objets une analyse géométrique en terme de rapport de similitude ?

Une étude préalable sous la forme d'un questionnaire que nous avons soumis à 225 élèves (Levain, 1994) nous a permis de souligner l'utilisation tardive de l'expression fractionnaire d'un rapport d'agrandissement puisqu'elle n'apparaît de manière significative qu'à partir de la classe de troisième. La grande majorité des élèves privilégient la forme décimale et approchée de ce rapport. Il faut peut-être voir là un effet lié à la généralisation des calculatrices. Cette enquête nous a permis de décrire deux niveaux de difficulté liés à l'objectivation du concept d'échelle exprimée sous forme de fraction :

1.- La principale source d'erreurs dans le calcul d'une échelle fractionnaire concerne l'harmonisation des unités. 25% des élèves "oublient" de gérer les unités et calculent un rapport dans lequel le numérateur est exprimé dans les termes du signifiant (toujours en centimètres) et le dénominateur dans ceux du signifié (en mètres ou en kilomètres). Ce type d'erreur est par ailleurs très stable puisqu'il augmente avec l'âge sensiblement dans les mêmes proportions que la réussite.

2.- Les difficultés constatées dans l'écriture même du rapport génèrent un grand nombre de non-réponses. Par exemple de nombreux élèves avouent après avoir tracé le trait de fraction : "je ne sais pas quoi mettre en haut et en bas". Les écritures plus ou moins aberrantes du rapport constituent à elles seules 5% du total des réponses.

2. Présentation des problèmes

Le problème n°3 (ci-dessus) peut être considéré comme intermédiaire entre les problèmes d'échelle et ceux d'agrandissement. La formulation employée décharge

Un mur de 50 m de long est représenté sur un plan par un segment de 10 cm.

Quelle est l'échelle de ce plan ?

Ecris ta réponse dans le cadre

Énoncé du problème n° 4

l'élève de la nécessité d'objectiver le rapport d'agrandissement, il convient cependant d'harmoniser les unités de mesure afin de pouvoir calculer cet opérateur multiplicatif qui reste un concept familier à la plupart des élèves.

Le problème n°4 est tiré de l'évaluation EVAPM 4/89, il nécessite de calculer une échelle de type fractionnaire connaissant une dimension sur le terrain et celle qui lui correspond sur la carte. Les valeurs numériques utilisées (respectivement 10cm et 50m) rendent ce calcul assez simple.

Il nous semble intéressant de comparer les deux problèmes précédents puisque les valeurs numériques sont très proches (respectivement "10 cm et 50 m" et "5 cm et 25 m", les rapports de réduction sont tous les deux égaux à 1/500). En ce qui concerne notre enquête préalable au collège, nous observons que pour les trois classes de cinquième, quatrième et troisième, le pourcentage de réussite est de 53% pour le problème n°3 et seulement de 37% pour le n°4. Selon nous, cette différence traduit principalement les difficultés qu'éprouvent de nombreux élèves à objectiver l'échelle sous forme de rapport. Il y a sans doute ici un décalage lié au passage d'un "concept outil" (n fois plus grand que) à un "concept objet" (rapport de type 1/n).

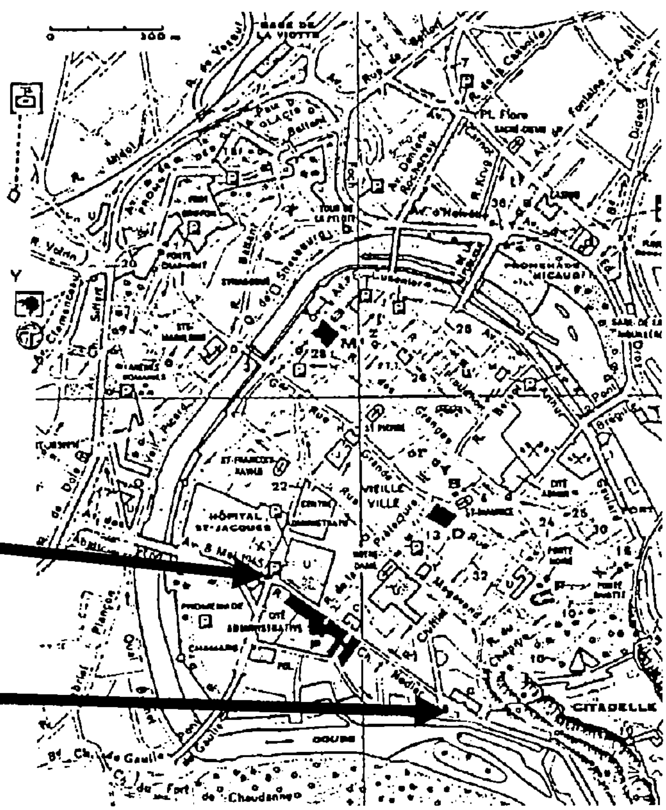
Il reste néanmoins surprenant de constater que, malgré le rappel fait dans l'énoncé, la principale source d'erreur à ce problème n°3 reste bien la gestion des unités. Compte non tenu de ces erreurs d'harmonisation et pour ces mêmes élèves le pourcentage de réussite passerait de 53 à 77% soit un score équivalent à celui de nos problèmes d'agrandissements les plus classiques. Force est de constater que, dans les problèmes d'échelle, la différence de taille entre l'objet représenté et son représentant est telle que d'emblée le rapport se construit déjà entre un signifiant et un signifié et non nécessairement dans les termes d'un rapport de similitude.

Le problème n°5 (page suivante) nécessite le calcul d'une dimension sur le terrain connaissant sa correspondance sur le plan ainsi que l'échelle de type :

0 300m

Il permet d'observer l'élève à travers son activité de lecture de plan puisqu'il doit effectuer une mesure à la règle, de tester avec lui la validité de tout un ensemble de procédures (additions itérées, calcul d'un rapport, produit en croix etc.) de lui proposer enfin un changement d'écriture de l'échelle vers une forme fractionnaire, ce qui représente au vue de notre enquête préalable un exercice particulièrement difficile.

Voici un plan de la ville de Besançon :



Début de la rue C. Nodier

Fin de la rue C. Nodier

Quel est, sur le terrain, la longueur en mètres de la rue Charles Nodier ?

Énoncé du problème n° 5

3. Objectiver l'échelle

En ce qui concerne le processus de conceptualisation de l'échelle, l'analyse de nos 20 entretiens nous permet de distinguer 3 profils d'élèves organisés autour de certaines catégories de réponses :

Neuf élèves réussissent la plupart des problèmes proposés et peuvent être qualifiés de "bons élèves". Nous relevons cependant chez cinq d'entre eux, l'erreur qui consiste à exprimer, dans le calcul de l'échelle, le dénominateur dans les unités du signifié et le numérateur dans celles du signifiant. Il suffit cependant d'attirer l'attention de l'élève sur ce point pour qu'il effectue spontanément la correction.

Élise, cinquième, problème n°5 :

– *Est-ce que tu peux me calculer l'échelle de ce plan sous sa forme fractionnaire ?*
– Alors bon je suis pas forte en échelle hein ! 0,5 cm ça fait 100 cm, donc si je multiplie par 2, j'obtiendrai 1 cm, ça fait

déjà 1 sur quelque chose, sur 200 oui, non ?
– *Qu'est-ce que ça veut dire une échelle de 1/200 ?*
– Quand j'ai 1 cm sur le plan, en réalité ça fait 200 cm...
– *Oui, mais ici c'est 200 m, pas 200 cm...*
– Ah bien oui, 200 m alors je rajoute deux zéros, décimètres et centimètres, donc l'échelle c'est 1/20.000...

Ces neuf bons élèves font bien le lien entre les problèmes d'agrandissement et ceux d'échelle. Ils ont une conception solidement organisée autour de l'invariance du rapport d'agrandissement quelles que soient les dimensions qui permettent de le calculer. De plus, ils conceptualisent simultanément l'échelle comme une opération de réduction (une division) et comme une relation entre un signifiant et un signifié. Cette double conceptualisation facilite le passage d'une écriture de l'échelle à une autre. Elle traduit également l'existence d'un répertoire de schèmes conséquent caractéristique des bons élèves. Au problème n°3 par exemple, ils qualifient sans ambiguïté cet opérateur multiplicatif comme étant un nombre sans dimension :

Mickaël, troisième, problème n°3 :

– *Qu'est-ce que ça représente 500 ?*
– 500... Déjà je mets pas d'unités parce qu'il n'y en a pas.
– *Pourquoi il n'y a pas d'unités ?*
– Parce que, que ce soit en cm, en dm ou en km ce sera toujours fois 500. 500 c'est l'échelle.
– *L'échelle c'est ce qui caractérise la maquette ?*
– Oui c'est un coefficient par rapport à l'immeuble réel.

Valérie, troisième, problème n°3 :

– *Qu'est-ce que ça signifie ce 500 ?*
– Bien c'est le *[silence]*... C'est le coefficient de proportionnalité... Le nombre par lequel il faut multiplier les dimensions de la maquette pour obtenir l'immeuble réel.

Un groupe de quatre sujets (1/5 de notre échantillon) peut être considéré comme intermédiaire. Ces élèves réussissent bien les problèmes d'agrandissement mais échouent massivement à ceux d'échelle. Les entretiens soulignent la difficulté qu'ils éprouvent à conceptualiser l'échelle sous sa forme fractionnaire. Nous sommes par ailleurs surpris des difficultés que nous rencontrons à confronter certaines procédures erronées. Analyser la conséquence des calculs mis en œuvre ainsi que la plausibilité des résultats n'est pas, pour ces élèves, chose aisée.

La construction d'un plan ou d'une carte n'est plus perçue de manière dynamique comme une opération de réduction, donc de division, mais davantage comme une relation statique entre un signifiant et un signifié. De ce fait les problèmes de changement d'écriture de l'échelle deviennent souvent insurmontables puisque le territoire dans son rapport au plan ou à la carte n'est plus nécessairement conçu comme une réalité intangible. Ce groupe d'élèves soutient fermement la nécessité d'exprimer le numérateur dans les unités du signifiant et le dénominateur dans celles du signifié :

Stéphanie, quatrième, problème n°4 :

– *Un autre élève me disait que l'échelle, c'est un nombre sans unités...*
– Bien sûr que si ! Autrement on

pourrait pas avoir les unités... Faut qu'il y ait des mesures, des unités, autrement on pourrait pas se repérer enfin ! Il faut des unités dans l'échelle.

– Cet élève me disait : on n'a pas besoin de connaître les unités, puisque c'est forcément les mêmes au numérateur et au dénominateur...

– Bien non, ça va pas ! Faut quand même des unités pour se repérer sur la carte... Non, non il faut mettre des unités, autrement on ne sait pas ce que ça représente, 1cm n'est pas obligatoirement 1 m sur le terrain...

– Reprenons, par exemple, le plan de Besançon (n°5) et essayons de calculer l'échelle ?

– Eh bien, l'échelle serait de 1/200, 1cm pour 200m !

– Pourtant si on multiplie 1cm par 200, on trouve 200cm, pas 200m. Ne faudrait-il pas multiplier par 20.000 puisque 20.000cm = 200m et trouver une échelle de 1/20.000...

– Non mais vous vous rendez compte ! 20.000cm ça fait 200m ça va pas...

– Pourtant 1cm sur le plan fait 20.000cm sur le terrain...

– Main non, puisque même en calculant avec le produit en croix je trouve 700 mètres, avec toutes mes solutions, je trouve 700m, donc vous avez faux, c'est pas 1/20.000 !

– Tu en es sûre ?

– Bien oui, c'est ça !

Un dernier groupe de sept élèves semble encore davantage en difficulté puisque, en plus de l'erreur d'harmonisation des unités, ils ne reconnaissent pas toujours le fait qu'un opérateur multiplicatif est un scalaire, c'est-à-dire un nombre sans dimension, et ont tendance à exprimer cet opérateur dans les unités du signifié. Du coup c'est l'unité choisie qui détermine en grande partie le rapport d'agrandissement. L'égalité de deux rapports équivalents n'est plus obligatoirement reconnue. Par exemple au problème n°3, ces sept élèves insistent pour mettre des unités au coefficient multiplicatif (réponses 500 mètres ou 500 centimètres). De ce fait, le rapport d'agrandissement n'est plus nécessairement invariant puisque son calcul dépend des unités en jeu. Le rapport au réel devient cette fois de plus en plus confus :

Charlotte, troisième, problème n°3 :

– *[Silence]*... Ça fait 500... centimètres... La hauteur de l'immeuble fait 25 m, donc 2 500 cm, et la petite boîte d'allumettes fait 5 cm... Donc j'ai divisé la hauteur réelle par la hauteur de la boîte d'allumettes, j'ai trouvé combien de fois ils l'avaient divisée...

– Pourquoi tu mets des centimètres, tu écris 500 cm ?

– Parce que j'ai pris à partir des centimètres !

– Certains élèves transforment toutes les dimensions en mètres. Les 5 cm de la petite boîte deviennent 0,05 m ; puis ils divisent 25 par 0,05. A ton avis, combien vont-ils trouver ?

– Et bien pareil, mais eux en mètres, ça fera 5 mètres. Bon, j'essaye 25 divisé par 0,05... ça donne 500, c'est pareil. Ah non ! Eux c'est 500 m et moi 500 cm, c'est pas normal *[long silence]*...

– Qui a juste alors ?

– *[Silence]*... C'est moi !

– Donc la réponse...

– C'est 500 cm !

– Certains élèves me disent : "c'est tout simplement 500 fois plus grand, il n'y a pas besoin d'unités"...

– Ah non ! Parce que y'a des différentes mesures entre le mètre et le centimètre quand même faut pas exagérer. On peut

pas dire 500 fois plus grand parce que ça dépend quelle unité il a pris.
– *Imagine que tu transformes 25 m en kilomètres et 5 cm en kilomètres, qu'est-ce qu'on va trouver ?*
– Et bien 500 km !
– *Est-ce que c'est les mêmes réponses ?*
– Non !
– *Et qui aura raison ?*
– Ils ne peuvent pas trouver 500 kilomètres !
– *Et si tout simplement il n'y avait pas d'unités à ce "500" ?*
– Ah si, il y a des unités autrement on peut pas savoir de combien elle a grandi !
– *Tout à l'heure, à la première image, tu m'as dit : "c'est le double", tu ne m'as pas donné d'unités, tu m'as simplement dit : "c'est le double"...*
– Oui, mais c'est le double en centimètre, il faut bien la mettre l'unité...

Cédric, quatrième, problème n°5 :

– *Est-ce que tu peux m'écrire cette échelle sous la forme d'une fraction ?*
– Oui, on peut *[silence]*... Alors 1 cm représente 20.000 cm dans la réalité, 1 cm représente 20.000 cm (il écrit 1/20.000 cm).
– *Tu écris des unités, c'est nécessaire de connaître les unités pour une échelle ?*
– Bien non, parce que c'est toujours en centimètres une échelle.
– *Une échelle, c'est toujours en centimètres...*
– Bien la plupart du temps oui...
– *Et si par exemple on fait les mesures en millimètres...*
– Ça ira, mais faudra le dire.
– *Comment on le dit ?*
– Et bien on le met au bout, on écrit millimètres ici !
– *Si je reprends notre problème et que j'effectue les calculs avec des millimètres, c'est possible ?*
– Bien oui, faut tout transformer les centimètres en millimètres.
– *Et l'échelle, ça devient quoi ?*
– Bien en millimètres !
– *Ce sera toujours 1/20.000 ?*
– Bien non, ça change, 10 mm donne 200.000 mm, donc 10/200.000.
– *1/20.000 et 10/200.000, c'est égal, c'est la même fraction...*
– *[Silence]*... Ah oui...
– *Alors si c'est la même chose on n'est peut-être pas obligé de les mettre ces unités...*
– Bien oui, c'est peut-être plus simple, y'a des unités qui s'accommodent mieux que d'autres.
– *Comment ?*
– Oui, des unités qui s'accommodent mieux...
– *Comme par exemple ?*
– Bien le centimètre.
– *Dans ton échelle le numérateur et le dénominateur, c'est exprimé dans la même unité ?*
– Oui, bien sûr c'est la même.
– *Alors si c'est la même, on n'est peut-être pas obligé de la mettre...*
– Oui mais, si on met pas d'unités, on peut pas vraiment savoir...
– *On peut pas vraiment savoir quoi ?*
– Si c'est en centimètres, en millimètres, en kilomètres, vaut mieux mettre l'unité pour être sûr...

Comme on le voit, les élèves de ce groupe apparaissent massivement en échec. Leurs erreurs débordent assez largement le cadre de notre étude et renvoient très probablement à des méconnaissances concernant le rôle des unités ainsi qu'à un manque de sens très précoce concernant la multiplication et la division. L'exemple de Charlotte :"*Ah si, il y a des unités autrement on peut pas savoir de combien elle a* *grandi !"* illustre ici une confusion profonde entre l'additif et le multiplicatif. Il apparaît également qu'un rapport fonction n'est pas aisément pensé comme un rapport sans dimension.

Conclusion

Nous constatons, à la suite de nos entretiens, que pratiquement tous les élèves définissent l'agrandissement comme le résultat de l'application d'un opérateur multiplicatif à l'ensemble des dimensions d'une figure, la forme restant invariante. Nous relevons également, qu'à peine quelques minutes plus tard, la moitié seulement de ces mêmes élèves mettent en pratique cette définition en reconnaissant la structure de proportionnalité du problème n° 2 (Mic et Luc). Dix élèves, à ce problème n° 2, commencent par mettre en œuvre une procédure additive erronée. Les savoirs et savoir-faire apparaissent souvent liés à certaines situations qui leur donnent du sens. La modification d'un élément de l'énoncé (valeur numérique, contexte de l'énoncé) peut entraîner un bouleversement de procédure (par exemple passage du multiplicatif à l'additif).

En ce qui concerne les situations d'agrandissement, il apparaît nécessaire de distinguer les problèmes dans lesquels les rapports externes sont simples (1/2 ou 1/4) et qui sont réussis très précocement et massivement, y compris par des procédures de type "additions itérées", des autres, nécessitant le traitement de rapports plus complexes beaucoup plus délicats à gérer et dont la maîtrise porte davantage sur une longue période de temps.

Dès le départ, le terme d'échelle est davantage associé, dans le cadre d'une situation d'agrandissement de figure, à un opérateur multiplicatif entier ou décimal plutôt qu'à un rapport externe de type 1/n dans lequel n est grand. Les différentes écritures rencontrées renforcent la polysémie du terme. Cette confusion est largement ressentie puisque la plupart des sujets interviewés, y compris les "bons élèves" avouent entretenir une relation difficile avec cette notion.

Nos données mettent en évidence deux types d'erreurs dans le calcul d'une échelle fractionnaire. La première concerne l'harmonisation des unités, elle touche la plupart des élèves (bons ou mauvais) dans des proportions diverses. La seconde renvoie à l'objectivation du rapport de réduction (ou d'agrandissement). Elle traduit selon nous très probablement le passage d'un concept "outil" (n fois plus grand que) à un concept "objet" (construction d'un rapport de type 1/n dans lequel n est grand).

D'ores et déjà notre travail permet d'avancer un certain nombre d'hypothèses didactiques pouvant servir à d'autres expérimentations :

Il importe selon nous de proposer dès les classes de CM_1, de CM_2, mais aussi de sixième des situations d'agrandissements de figures ("n fois plus grand que...") dans lesquelles l'opérateur "n" est un grand nombre de manière à ce qu'il soit utile (voire économique) d'exprimer dans des unités différentes les dimensions de l'objet ou de la figure d'origine et celles de son agrandissement (ou bien sûr de sa réduction). Ce schème de l'harmonisation des unités apparaît en effet comme très insuffisamment construit chez la grande majorité des élèves de notre échantillon.

Un travail spécifique sur les différents types de rapports internes et externes ainsi que leur expression sous la forme d'une fraction nous semble également nécessaire. Nous avons par ailleurs souligné dans notre thèse (Levain, 1994) tout le mal que nous pensions d'une utilisation trop systématique ou trop précoce des procédures de type produit en croix généralement peu porteuses de sens.

Enfin, outre le fait que l'expression fractionnaire d'une échelle ne soit pas toujours la forme la plus utile ou la plus fonctionnel pour raisonner sur les grandeurs en jeu, tout travail concernant des changements d'écriture de l'échelle devrait impérativement se fixer pour règle l'interdiction pour toute représentation cartographique de trahir la réalité représentée. Nous constatons, comme d'autres avant nous, une assez grande fréquence d'erreurs parfois totalement aberrantes. Nous sommes par contre beaucoup plus surpris de la difficulté à confronter ces erreurs, c'est à dire à entraîner l'élève sur le terrain du réel afin qu'il analyse les effets ou les conséquences des calculs mis en œuvre. Certains entretiens présentés sont, de ce point de vue, particulièrement révélateurs de ces réponses d'élèves qui traduisent un véritable "déni épistémologique". Ce constat déborde par ailleurs assez largement le domaine que nous avons développé. Il convient néanmoins de relever que la plupart de ces élèves (le plus souvent en difficulté) ne considèrent pas (ou plus) vraiment les mathématiques comme des outils de compréhension et d'analyse du réel mais bien plutôt comme un monde plus ou moins clos, disposant de ses propres règles. L'enjeu scolaire se limite alors trop souvent à assimiler et à appliquer ces règles d'une manière ou d'une autre sans plus vérifier la cohérence et la véracité des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

BODIN, A. : 1989, "Les échelles : préparation d'une situation d'enseignement en classe de cinquième", *Petit x*, n°20, 35-44.

DOUADY, R. : 1986, "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Recherches en didactique des mathématiques,* 7.2, 5-31.

KARPLUS, R., KARPLUS, E.F. : 1972, "Intellectual development beyond elementary school : Ratio, a longitudinal study", *School, Science and Mathematics,* 72, 735-742.

LEVAIN, J.-P. : 1992-1993, "Proportionnalité, agrandissement et échelle", *Petit x,* n°31, 15-34.

LEVAIN, J.-P. : 1994, "Proportionnalité et acquisition des concepts d'agrandissement et d'échelle", *Thèse de doctorat,* Université Paris V.

VERGNAUD, G. : 1988, "Multiplicative structures", *in* Hiebert, J. and Behr, M (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale, N.J : Erlbaum/Reston, VA : National Concil of Teachers of Mathematics, 141-161.

VERGNAUD, G. : 1991, "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 10 / 2.3, 135-169.