LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Dans ce numéro, elle donne la parole à Rudolf Bkouche qui aborde les questions posées dans l'enseignement des notions de limite et de continuité des fonctions d'une variable réelle.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages.

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

Point de vue

DES LIMITES ET DE LA CONTINUITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT

Rudolf BKOUCHE
Irem de Lille

Il y a quelques années, j'apprenais au cours d'une réunion sur l'enseignement de l'analyse au lycée, pourquoi mon cours d'analyse à l'Université de Lille (1) était en contradiction avec les nouvelles normes de l'enseignement secondaire, ce qui a d'abord provoqué mon étonnement et ma colère, mais celle-ci s'est apaisée lorsque j'ai compris, plus tard, que la connaissance des mathématiques n'était plus l'objet du cours de mathématiques (2). On pouvait ainsi fabriquer des programmes sans grands liens avec les mathématiques des mathématiciens (les *mathématiques savantes* pour reprendre une expression aujourd'hui bien connue), voire contradictoires avec ces mathématiques ; cela importait peu pourvu que les *mathématiques enseignées* se situent dans la norme définie par les programmes (3).

Il est donc de peu d'importance que ce

(1) J'enseignais, à l'époque, la théorie des fonctions d'une variable complexe.

(2) C'est ainsi que l'on peut comprendre l'incohérence des programmes actuels (*cf.* Rudolf Bkouche, "L'achèvement de l'enseignement des mathématiques", *Repères-IREM*, n°21, octobre 1995). Reste alors à comprendre les raisons d'un tel enseignement, question que nous n'abordons pas ici.

(3) Il est bien connu que les programmes sont l'œuvre d'une machine mystérieuse appelée *noosphère* ; l'on sait aujourd'hui que cette machine a pour objet de transformer le savoir des savants en savoir à l'usage de l'enseignement en usant de ce que certains milieux savants (mais ce ne sont pas les mêmes savants, faut-il le préciser) appellent la *transposition didactique* (*cf.* Yves Chevallard, *La transposition didactique* (deuxième édition augmentée), La pensée sauvage, Grenoble 1991, et Michel Develay (éd.), *Savoirs scolaires et didactique des disciplines*, ESF éditeur, Paris 1995). La transposition didactique, telle qu'elle est racontée dans les ouvrages cités, pourrait alors permettre de comprendre pourquoi et comment l'enseignement n'a plus rien à faire avec le savoir.

que l'on appelle "mathématiques" dans l'enseignement secondaire coïncide avec le savoir de ceux dont le métier implique une activité mathématique, mathématiciens dits professionnels ou utilisateurs de mathématiques. Ces remarques étant faites, nous pouvons aborder, avec la tranquillité d'esprit nécessaire à la rédaction d'un article sur l'enseignement, les questions posées dans l'enseignement des notions de limite et de continuité des fonctions d'une variable réelle.

On trouve dans la vieille littérature mathématique la définition suivante :

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel $\mathbf{I}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et soit a un point d'accumulation de $\mathbf{I}$, nous dirons que la fonction f tend vers une *limite* l lorsque la variable x tend vers a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $x \in \mathbf{I}$ et $0 < |x - a| < \eta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Nous dirons alors que la fonction f est *continue* en un point a de son domaine de définition si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a.

Cette définition semblant quelque peu surannée, la noosphère (voir note 2) a proposée la définition suivante (4),

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel $\mathbf{I}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et soit a un point d'accumulation de $\mathbf{I}$, nous dirons que la fonction f tend vers une *limite* l lorsque la variable x tend vers a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\in \mathbf{I}$ et $|x - a| < \eta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Nous dirons alors que la fonction f est *continue* en un point a de son domaine de définition si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a ; la continuité en a est alors équivalente à l'existence d'une limite.

Comme toujours la nécessité du renouvellement de l'enseignement des mathématiques demande que celui-ci se renouvelle périodiquement ; c'est ainsi que, au nom de l'innovation, certaines définitions peuvent changer ; dans ce cas il importe que les professeurs se plient aux nouveaux usages afin d'amener les élèves, qui ne connaissent pas encore les usages, à user des seules nouvelles normes. Au fond l'activité mathématique consiste à connaître les normes pour pouvoir en user lorsque le professeur ou l'examinateur le demande, la signification importe peu pourvu que les élèves connaissent le bon usage enseigné par les professeurs (5).

Ces remarques peuvent paraître quelque peu anachroniques si l'on remarque que le renouvellement permanent des programmes a conduit à supprimer toute référence au couple (ε,η) de la définition de la limite, celle-ci se définissant en termes de fonctions de référence. Reste que, quelle que soit la définition (ou la non-définition) de la limite d'une fonction en un point, la noosphère semble tenir à ce qu'une

(4) On m'a appris aussi que la définition moderne était celle pratiquée dans l'enseignement supérieur ; à ce jour je ne m'en suis pas encore aperçu, mais c'est peut-être que le milieu mathématique que je fréquente dans mon université est trop archaïque pour comprendre les subtilités de la modernité pédagogique.

(5) Reconnaissons ici que, les élèves ne connaissant aucune norme, les changements de normes nécessités par le renouvellement de l'enseignement ne saurait gêner les élèves. La nouvelle définition de la limite ne saurait donc poser problème si n'était l'archaïsme de certains professeurs qui croient encore que leur métier consiste à faire connaître les mathématiques à leurs élèves.

fonction étant définie dans un intervalle contenant un point a, l'existence de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a implique que $f(x)$ tend vers $f(a)$, laissant entier le problème de la limite des fonctions admettant une discontinuité de première espèce [(6)].

Ces remarques faites, je me propose d'expliquer pourquoi je me range dans le camp des archaïques qui continuent d'user de l'ancienne définition.

Lorsque l'on enseigne les diverses notions de convergence d'une suite de fonctions, on exhibe souvent un exemple pour expliquer comment la limite d'une suite de fonctions continues qui ne converge pas uniformément sur un intervalle fermée peut ne pas être une fonction continue. L'exemple est classique, on considère la suite de fonctions définie sur l'intervalle fermé $[0,1]$:

$u_n(x) = x^n$.

On sait que la limite est la fonction u ainsi définie :

$u(x) = 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,1[$

$u(1) = 1$

Il est alors clair que la fonction u n'est pas continue puisque la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers 1 est 0 (au sens ancien) et n'est donc pas égale à la valeur de la fonction u en 1.

Il faudrait dire, selon les nouvelles normes, que la fonction u(x) n'a pas de limite lorsque x tend vers 1, ce qui semble contraire à l'intuition de la notion de limite. On peut évidemment arguer que l'intuition n'a pas sa place dans un enseignement rigoureux de l'analyse, mais ce refus de prendre en compte l'intuition risque de transformer l'enseignement des mathématiques en une vaste construction quelque peu "in-sensée", la rigueur se réduisant à un jeu fabriqué par quelques esprits retors appelés mathématiciens [(7)].

Nous pourrions poursuivre notre comparaison des deux définitions avec quelques exemples liés à la représentation des fonctions par des séries, en particulier les séries trigonométriques, ce que nous ne pouvons faire dans le cadre de cet article, renvoyant à un article futur sur les concepts de limites et de continuité.

Cela dit, la question n'est pas celle d'une bonne définition de la limite donnée *a priori*. Ce qui importe pour définir une notion, c'est le type de problème que l'on étudie et c'est en fonction des problèmes où cette notion intervient que l'on explicite une définition.

S'il s'agit d'introduire *a priori* une notion considérée comme nouvelle, le seul problème est celui de la cohérence du discours ; dans ce cas la question de la définition est essentiellement une question de vocabulaire, le choix du mot qui représente la notion. S'il s'agit au contraire de définir une notion à l'intérieur d'une problématique, la question du vocabulaire devient seconde, la notion

(6) On rappelle qu'une fonction admet une discontinuité de première espèce en un point a de son domaine de définition si la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est distincte de $f(a)$.

(7) Si cela était, je n'aurais jamais écrit cet article, tout simplement parce que je n'aurais jamais fait le choix de pratiquer et d'enseigner un tel jeu.

considérée se précisant au fur et à mesure de son étude ; la définition, loin d'être un préalable à l'activité mathématique, est un premier aboutissement (8).

La question se pose alors de la part de ce premier travail dans l'enseignement. Faut-il, au nom d'une efficacité à courte-vue, énoncer une définition *a priori* et demander aux élèves de se contenter de l'appliquer avec l'inconvénient (ou l'avantage!) d'un semblant de réussite occultant une incompréhension des notions étudiées ? faut-il au contraire expliciter le caractère problématique de la notion considérée, au "risque" de ce que certains considèrent comme une perte de temps ? (9)

La notion de limite se situe moins dans une définition formelle (l'ancienne ou la nouvelle) que dans les problèmes qui y ont conduit. La difficulté vient alors de la multiplicité de ces problèmes, multiplicité qui a donné lieu à plusieurs tentatives de définitions sur lesquelles nous reviendrons (*cf.* annexe). Devant cette multiplicité, la tentation est grande de chercher la "bonne approche", laquelle devrait conduire à la "bonne définition", celle à laquelle on demandera aux élèves de se conformer afin de réussir les exercices qu'on leur proposera, sachant que ces exercices seront conformes à l'approche considérée. Ainsi vide-t-on, avec bonne conscience, l'enseignement de toute consistance, ce qui conduit à ce semblant de réussite dont j'ai déjà parlé et à mettre en avant ce que j'ai appelé la conception logicialiste de l'enseignement (10).

On peut considérer la notion de limite d'un double point de vue, une notion cinématique d'une part, une notion d'approximation d'autre part ; si ces deux notions se rencontrent, on ne peut pour autant les confondre même si aujourd'hui la définition (ε,η) apporte une unification de forme, en précisant que cette unification de forme ne supprime pas la multiplicité de sens de la notion.

La signification cinématique est, comme son nom l'indique, liée au mouvement. Si une grandeur variable (11) x tend vers une valeur a de cette grandeur (au sens qu'elle prend des valeurs de plus en plus proches de la valeur a), alors une grandeur y qui dépend de la grandeur x (qui est fonction de la grandeur x) tend vers une valeur b si, au fur et à mesure, que la grandeur x se rapproche de la valeur a, la grandeur y se rapproche de b.

On voit dans cette définition le rôle du mouvement (12), c'est alors, pourrait-on dire, la grandeur variable x qui *tire* la grandeur y. C'est cette conception cinématique qui conduit à la notion d'infiniment

(8) autant dire que la question du "pourquoi" de la définition est aussi important que le problème de l'énoncé.

(9) Je ne parle pas ici de ces semblants de problématisations qui consistent à faire découvrir une notion par les élèves, caricature d'enseignement aujourd'hui à la mode qui constitue ce que j'ai appelé l'activisme pédagogique (*cf.* Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *Repères-IREM* n° 9, octobre 1992). Je renverrai par contre au remarquable travail du groupe AHA qui nous apprend comment problématiser les notions de l'analyse, travail qui sera présenté dans un prochain article de *Repères-IREM*.

(10) Rudolf Bkouche, "L'achèvement de l'enseignement des mathématiques" *o.c.*

(11) Il faut prendre ici le terme variable dans son sens premier, une grandeur qui "varie", c'est-à-dire qui peut prendre plusieurs valeurs.

(12) On peut considérer le cas à la fois particulier et exemplaire où la variable x est le temps et la variable y une grandeur qui varie avec le temps.

petit, une grandeur infiniment petite étant une grandeur qui *devient* aussi petite que l'on veut [13] ; dire que la grandeur variable x tend vers a signifie que la différence $x - a$ est un infiniment petit, dire que la grandeur y, fonction de la grandeur variable x, tend vers b lorsque x tend vers a signifie que $y - b$ est un infiniment petit lorsque $x - a$ est un infiniment petit ; la continuité de la fonction $y = f(x)$ exprime alors que lorsque l'accroissement Δx de la variable est infiniment petit, l'accroissement $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ de la fonction est aussi infiniment petit (*cf.* Annexe : définition de Cauchy). Ces définitions "qualitatives", si elles sont à préciser sur le plan opératoire, expriment essentiellement le caractère intuitif de la notion de limite en même temps qu'elles en déterminent le concept. En ce sens la rigueur de Cauchy s'appuie sur l'intuition ; la rigueur est ici moins élimination de l'intuition (au sens des méthodes formalistes) que réécriture d'une notion à des fins opératoires.

La notion d'approximation se situe dans un autre contexte au sens où elle s'appuie sur une problématique différente. L'exemple canonique d'approximation est aujourd'hui l'approximation décimale d'un nombre a par la suite des décimaux (a_n) tel que pour tout entier n on ait l'inégalité $a_n \leq a < a_n + 10^{-n}$. La définition en (ε,η) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation ; ainsi nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n\in N}$ tend vers une limite l si, pour tout ε "aussi petit que l'on veut" [14], on peut trouver un entier m (lequel dépend de ε) tel que, si $n > m$, alors $|x_n - x| < \varepsilon$.

La définition de la limite pour une fonction se construit d'une façon analogue, si l'on considère qu'une suite peut être considérée comme une fonction de **N** dans **R**. Cependant, malgré l'identité formelle, la notion de suite ne se réduit pas à la notion de fonction, ce qui demande une étude séparée des deux notions ; c'est une telle étude séparée qui peut mettre en évidence la part commune des deux notions, en particulier l'étude des limites d'une fonction $f(x)$ lorsque la variable x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire peut prendre des valeurs "aussi grandes que l'on veut".

On peut alors donner la définition en (ε,η) sous l'une des formes énoncées au début de cet article ; notons que l'on rencontre ici un obstacle (que la seconde définition occulte), c'est que la limite est ce vers quoi on tend, c'est-à-dire dans le langage courant, ce que l'on n'atteint pas (ou que l'on atteint "à la fin") [15]. La question se pose alors de la nécessité de dépasser le langage courant, mais ce dépassement est un acte en ce sens que celui qui s'initie à l'analyse doit prendre conscience de la nécessité de ce dépassement et non seulement de l'accepter comme une donnée. La définition (ε,η) apparaît

(13) c'est cette notion qui reste prégnante dans les nombreuses définitions de type (ε,η) qui précisent que le ε est "aussi petit que l'on veut", précision inutile dans le cadre formel où se situe la définition mais précision nécessaire dans la mesure où elle rappelle le sens de la notion de limite.

(14) Nous avons déjà dit que l'expression "aussi petit que l'on veut est redondante" mais qu'elle est utile pour la compréhension de la notion de limite ; c'est en ce sens qu'il nous semble utile de l'employer au début de l'enseignement de l'analyse, quite à mettre l'accent, dans un second temps, sur son caractère redondant.

(15) Ainsi la notion de limite d'une suite constante pose problème malgré (ou à cause de) son évidence ; la formalisation a pour effet de supprimer cet obstacle, mais il s'agit alors d'un travail de formalisation (la formalisation comme acte), non d'une donnée formelle.

ainsi dans sa signification pleine et entière, la nécessité de donner une définition opératoire prenant en compte les divers "cas de figure", y compris celui d'une fonction constante au voisinage de la valeur où l'on cherche la limite.

Se pose alors la question du lien entre les deux points de vue, celui du mouvement et celui de l'approximation. On voit apparaître ici une contradiction entre les deux notions, si dans la notion cinématique c'est la variable qui "tire" la fonction (au sens déjà dit que si l'accroissement de la variable est infiniment petit alors l'accroissement de la fonction est infiniment petit), dans la notion d'approximation, c'est le degré d'approximation que l'on veut qui fixe l'approximation de la variable (c'est le ε qui fixe le η). On ne peut évacuer cette contradiction en renvoyant au seul point de vue aujourd'hui canonique de l'approximation ; s'il est vrai que ce qui a conduit à la prédominance de ce point de vue c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse, il serait dangereux de rejeter le point de vue cinématique dans la mesure où il reste le cadre intuitif dans lequel se pense la notion de limite.

On peut alors penser l'analyse comme un lieu où se rencontrent, à propos de l'une de ses notions fondamentales, un cadre intuitif trop flou pour assurer une sécurité opératoire, autant sur le plan du raisonnement que sur le plan du calcul, et un cadre formel qui prend en charge cette sécurité opératoire, sans oublier que ce cadre formel s'appuie sur une problématique antérieure liée à la notion d'approximation.

On peut alors regretter que les programmes de l'enseignement de l'analyse au lycée ne prennent pas en compte ce double point de vue, celui du mouvement et celui de l'approximation, ou si l'on préfère le cadre intuitif et le cadre théorique, encore qu'une identification : mouvement – cadre intuitif et approximation – cadre théorique serait réductrice.

Ce sont ces questions que nous voudrions développer dans un prochain article, en espérant dépasser la cadre factice d'une opposition lycée-université, le lycée se définissant comme un préapprentissage de l'analyse, considéré par les uns comme un *bricolage* (au sens péjoratif du terme) et par d'autres comme une préparation à un enseignement plus théorique ; ce qui me paraît dans les deux cas une façon réductrice de penser l'enseignement des mathématiques. D'abord parce que toute activité mathématique, aussi élémentaire soit-elle, relève d'une pensée théorisante ; ensuite parce que toute activité mathématique s'appuie sur une problématique qui relève elle-même des trois aspects mis en évidence par Gonseth, l'intuitif, l'expérimental et le théorique [(16)]. Mais cela demande de remettre en question l'un des dogmes de l'enseignement actuel, la dichotomie savoir/savoir faire [(17)].

(16) En ce qui concerne la pensée de Gonseth nous renvoyons aux articles de Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)" *in La Démonstration mathématique dans l'Histoire* (Colloque Inter-IREM *Epistémologie*, Besançon 1989), Editions IREM Besançon-Lyon 1990 et Hourya Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Gonseth (1890-1975)" *in La Figure et l'Espace* (Colloque Inter-IREM *Epistémologie*, Lyon 1991), Editions IREM de Lyon 1993.

(17) Sur les dogmes de l'enseignement actuel, nous renvoyons au dossier publié par la revue *Sciences Humaines*, "Eduquer et Former", n° 12, février-mars 1996.

ANNEXE : QUELQUES DÉFINITIONS DE LA NOTION DE LIMITE

Encyclopédie Méthodique : Mathématiques

DIFFERENTIEL : On appelle, dans la haute *Géométrie*, quantité différentielle ou simplement différentielle, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable. On l'appelle *différentielle* ou *quantité différentielle*, parce qu'on la considère ordinairement comme la différence infiniment petite de deux quantités finies dont l'une surpasse l'autre infiniment peu.

INFINIMENT PETIT : On appelle ainsi, en Géométrie, les quantités qu'on regarde comme plus petites que toute grandeur assignable (renvoi à l'article Différentielle)

LIMITE : On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur, qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité *à la limite* est absolument inassignable.

Louis-Augustin Cauchy, *Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique* (1823)

Extrait de l'avertissement

Mon but était de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites.

Première leçon : *des variables, de leurs limites, et des quantités infiniment petites*

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres.On appelle au contraire quantité constante toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successives attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

...

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Seconde leçon : *des fonctions continues et discontinues, représentation géométrique des fonctions continues*.

Si la variable y est exprimée en fonction de la variable x par l'équation

$$y = f(x)$$

Δy, où l'accroissement de y correspondant à l'accroissement Δx de la variable x, sera déterminé par la formule

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

...

Soient maintenant h et i deux quantités distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite, et $\mathrm{a} = \frac{i}{h}$ le rapport infiniment petit de ces deux quantités. Si l'on attribue à Δx la valeur finie h, la valeur de Δy, donnée par l'équation ci-dessus, deviendra ce qu'on appelle la différence finie de la fonction $f(x)$, et sera ordinairement une quantité finie. Si au contraire l'on attribue à Δx une valeur infiniment petite, si l'on fait par exemple

$$\Delta x = i = \mathrm{a}h$$

la valeur de $\_y$, savoir,

$$f(x + i) - f(x) \text{ ou } f(x + \mathrm{a}h) - f(x)$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite.

...

Lorsque le fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence $f(x + i) - f(x)$ est toujours une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit.

Karl Weierstrass (cours de 1861, rédigé par H.A. Schwarz) (18)

S'il est possible de déterminer une borne δ telle que, pour toute valeur de h plus petite en valeur absolue que δ, $f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε, aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction.
La notion de continuité en résulte.

E.T Whittaker & G.N. Watson, ***A Course of Modern Analysis*** **(first edition 1902, fourth edition 1927)**

Chapter II *the theory of convergence*

Let $z_1, z_2, z_3, \ldots$ be an unending sequence of numbers, real or complex. Then, if a number l exists such that, corresponding to every positive number (19) ε, no matter

(18) cité par Pierre Dugac *in* Jean Dieudonné (ed.) *Abrégé d'histoire des mathématiques* (1700-1900) (2 volumes), Hermann, Paris 1978, volume 1, chapitre VI.

(19) The number zero is excluded from the class of positive numbers.

how small, a number n_0 can be found, such that

$$|z_n - l| < \varepsilon$$

for all values of n greater than n_0, *the sequence* (z_n) *is said to tend to the limit* l *as n tends to infinity.*

Chapter III *continuous functions and uniform convergence*

Let $f(x)$ a function of x defined when $a \le x \le b$.
Let x_1 be such that $a \le x_1 \le b$. If there exists a number l such that, corresponding to an arbitrary positive number ε, we can find a positive number η such that

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

whenever $|x - x_1| < \eta$, $x \ne x_1$, and $a \le x \le b$, then l is called limit of $f(x)$ as $x \to x_1$.

It may happen that we can find a number l_+ (even when l does not exist) such that

$$|f(x) - l_+| < e$$

when $x_1 < x < x_1 + \eta$. We call l_+ the limit of $f(x)$ when x approaches x_1 from the right and denote it by $f(x_1 + 0)$. ; in a similar manner we defined $f(x_1 - 0)$ if it exists.

If $f(x_1 + 0)$, $f(x_1)$, $f(x_1 - 0)$ all exists and are equal, we say that $f(x)$ is continuous at x_1 ; so that if $f(x)$ is continuous at x_1, then, given ε, we can find η such that

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

whenever $|x - x_1| < \eta$ and $a \le x \le b$.

Notons que pour les fonctions d'une variable complexe, Whittaker et Watson se bornent à définir la continuité.

Let $f(z)$ a function of z defined at all points of a closed region (one or two-dimensional) in the Argand diagram, and let z_1 be a point of the region.
Then $f(z)$ is said be continuous at z_1, if given any positive number ε, we can find a corresponding positive number η such that

$$|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$$

whenever $|z - z_1| < \eta$ and z is a point of the region.

Georges Valiron, *Théorie des fonctions* **(1948)**

Valiron définit une fonction (à valeurs réelles ou complexes) sur un ensemble **E** *(sous-ensemble de* $\mathbf{R}^n$*). La notion de limite est ainsi définie :*

Soit **Q** un point d'accumulation de l'ensemble **E** (**Q** peut appartenir ou ne pas appartenir à **E**), ou un point d'accumulation d'une portion $\mathbf{E_Q}$ de **E**. On dit que la fonction $f(\mathbf{P})$ tend vers une limite L lorsque **P** tend vers **Q** dans $\mathbf{E_Q}$ lorsque $f(\mathbf{P})$ est, pour $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$, aussi voisin de L que l'on veut pourvu que **P** soit suffisamment voisin de **Q**.

Valiron étudie les divers cas qui peuvent de produire, selon que **Q** *est à distance finie ou à l'infini et que* L *est fini ou infini, écrivant les inégalités correspondantes. Il définit alors la notion de fonction continue en un point :*

Une fonction f(P) définie sur un ensemble **E** admettant l'un de ses points comme point d'accumulation est dite *continue au point* Q *si* f(P) *a une limite finie lorsque* P *tend vers* Q *et si cette limite est* f(Q).
Ceci revient à dire que, à tout nombre positif donné ε, on peut faire correspondre η tel que

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\overrightarrow{PQ}| < \eta$$

Walter Rudin, *Principes d'analyse mathématique* **(première édition 1953, édition française 1995)**

Si X et Y sont deux espaces métriques, E un sous-ensemble de X, f une application de E vers Y et a un point d'accumulation de E, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a s'il existe l de Y ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $d_Y(f(x),l) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$ vérifiant $0 < d_X(x,a) < \alpha$.

Chenevier, *Cours d'Algèbre* **(classe de Mathématiques, 1930)**

On dit qu'une fonction f(x) tend vers une limite a quand x tend vers b, si on peut trouver un intervalle assez petit contenant b et tel que pour toutes les valeurs de x de cette intervalle la différence f(x) –a reste, en valeur absolue, inférieure à tout nombre positif donné à l'avance, si petit qu'il soit.

D'une manière plus précise, à un nombre positif ε donné, fixe et aussi petit que l'on veut, on peut associer un nombre α tel que l'inégalité :

$$|x - b| < \alpha$$

entraîne :

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Notons que la définition de Chenevier est analogue à la définition moderne ; cela n'empêche pas l'auteur de définir la continuité de la façon suivante :

On dit qu'une fonction f(x) est continue pour la valeur a de x si f(x) tend vers f(a) quand x tend vers a.

REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

UN BRIN DE DICTIONNAIRE

Francine DIENER

L'analyse non standard a aujourd'hui une trentaine d'années. Même si le nombre de mathématiciens qui l'ont adoptée reste modeste, il est indéniable que son développement a fourni de précieux enseignements sur l'analyse en général. Les deux textes qui suivent posent, chacun à sa façon, la même question : n'est-il pas temps, lorsque nous enseignons l'analyse aujourd'hui au lycée ou à l'université, de profiter de ce que nous avons appris en étudiant l'analyse non standard ?

Le fait que nous ayons du mal à enseigner l'analyse au plus grand nombre ne vient-il pas précisément de ce qu'elle nous a été enseignée sans l'usage de l'idée originelle d'infiniment petit qui avait permis de l'inventer. Au moins, en réhabilitant l'usage des mots infiniment petit ou infiniment grand, sur lesquels un tabou avait été jeté, l'apprentissage de l'analyse non standard devrait-il nous permettre de questionner le savoir que nous essayons de transmettre et donc de mieux situer les difficultés et les blocages (Deledicq en analyse quelques uns) rencontrés par nos élèves.

Pour rendre ce questionnement plus concret, Lutz, Makhlouf et Meyer tentent de cerner ce qu'ils diraient effectivement à un élève pour lui enseigner l'analyse avec ce point de vue. Ils proposent au passage de modifier le vocabulaire utilisé habituellement par les non standardistes pour l'*adapter* aux élèves. Pour que cette question de vocabulaire, qui n'est assurément qu'un point de détail, ne perturbe pas ceux qui ont déjà eu des lectures ou des conversations sur le sujet, voici un brin de dictionnaire.

Les nombres entiers naturels (éléments de **N**) sont de deux sortes, les nombres tels que 0, 1, 2, 1000 ou $10^{10^{10}}$, qui sont *limités* et ceux qui sont plus grands que tous les limités, $\{..., \omega - 1, \omega, \omega + 1, ...\}$, qui sont *infiniment grands* ou *illimités.* Les premiers sont appelés ici *modérés* et les seconds *très grands.*

Les nombres réels (éléments de **R**) sont de trois sortes (on peut raffiner ensuite ces trois ordres de grandeur, si besoin est), les *infiniment petits* ou *infinitésimaux,* les *infiniment grands* ou *illimités* et les *appréciables,* qui ne sont ni infiniment petits ni infiniment grands. Les premiers et les seconds sont appelés ici simplement *très petits* et *très grands.* Si l'on regroupe les infinitésimaux et les appréciables, on trouve les *limités,* qui sont ici appelés, comme dans le cas des nombres entiers, des *modérés..* Deux réels qui diffèrent d'un infinitésimal, dits *infiniment voisins,* sont ici appelés *très proches.* A côté de ces divers ordres de grandeur qui permettent de faire du calcul infinitésimal, l'adjectif *standard* est un peu moins intuitif car il n'est pas un ordre de grandeur. Un objet standard est simplement un objet défini par une formule du langage mathématique usuel. Ainsi 0, 1, e ou π sont standard. Par contre, lorsque ω est un entier infiniment grand, le nombre $1 + \frac{1}{\omega}$ est non standard de même que le polynôme $x^{\omega} + 1$. Les objets standard sont appelés ici *bien déterminés.*

On pourrait discuter de l'importance ou du danger qu'il y a *à parler bébé* avec des élèves quand on veut transmettre un savoir nouveau qui jusque là appartenait aux seuls mathématiciens professionnels (il y a probablement eu aussi par le passé un collègue bien intentionné pour proposer d'appeler autrement les nombres complexes, qui n'ont assurément rien de complexes). Mais la question est secondaire à côté de celle-ci : en quoi ce nouvel éclairage de l'analyse modifiera-t-il notre enseignement s'il est apprivoisé par tous ?