REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR : NÉCESSITÉ ET FONDEMENT

Robert LUTZ,
Abdenacer MAKHLOUF,
Etienne MEYER
Irem de Strasbourg

1. INTRODUCTION

Il y a environs deux années, trois compères se sont rencontrés à Mulhouse à l'occasion d'une séance locale de L'IREM consacrée à l'examen de la question suivante : est-il possible et souhaitable de concevoir un enseignement de l'analyse élémentaire s'inspirant de la formalisation de la vieille analyse infinitésimale de Leibniz, l'un des sous-produits inattendus de la toute "récente" Analyse non-standard (ANS) née vers 1960 dans l'esprit du mathématicien et logicien américain Abraham Robinson ?

Il faut dire que quelques mathématiciens alsaciens, à la suite du regretté Georges Reeb qui en avait compris très tôt l'importance, ont développé depuis les années 70 un groupe très actif, qui a essaimé depuis à travers l'Europe, consacré à des applications variées de l'ANS dans divers domaines de la recherche mathématique. Parallèlement, quelques spécialistes avertis de la didactique, localisés à l'IREM de Paris, ont exploré sur le terrain diverses approches de type infinitésimal dans le second cycle des lycées et même le premier cycle universitaire.

Au cours de la discussion, il est apparu, preuves à l'appui, que si l'on voulait dépasser le stade des "bricolages pédagogiques" semi-intuitifs et semi-formels, et détecter les difficultés et les limites de l'entreprise, il fallait réfléchir sérieusement au type de fondement, simplifié mais rigoureux, sur lequel on pourrait asseoir une pédagogie où entreraient dans la conversation des notions infinitésimales. Un fondement clair, motivé du point de vue historique, épistémologique et didactique, qui puisse servir de base solide à un vaste débat au sein de notre communauté soucieuse de faciliter la pratique des mathématiques à un plus grand nombre d'élèves.

C'est pourquoi les trois compères évoqués plus haut ont conjugué leurs talents et leur enthousiasme pour mener une telle réflexion aussi loin que possible. L'un d'eux a été associé dès le départ à l'aventure intellectuelle de l'ANS en France, l'autre fait partie de cette jeune génération de mathématiciens qui en ont développé les applications avec un grand élan, le troisième a mis dans la corbeille les exigences issues de sa longue pratique des classes de Lycée.

Le résultat de leurs efforts est consigné dans une brochure intitulée *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, que l'APMEP se propose de publier afin de porter le débat sur la place publique. On n'y fournit évidemment pas de recette miracle, et on n'y prône pas de vérité indiscutable. Mais la matière présentée admet une cohérence qui porte la trace du décantage qu'a subie la conception et la présentation de l'ANS depuis vingt ans. Ce qui paraissait mystérieux et ardu dans les débuts est devenu limpide et naturel. C'est pourquoi il semble que l'époque et les esprits sont mûrs pour essayer d'en tirer quelque bénéfice concernant l'enseignement élémentaire des mathématiques (2^{e} cycle secondaire et 1er cycle universitaire).

2. AU CŒUR DES DIFFICULTÉS DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : LA CONTRAVARIANCE

La ligne de force majeure de ce bénéfice pourrait tenir du constat suivant : nous n'avons pas encore réussi à définir un contenu pour cet enseignement qui soit à la fois rigoureux mais proche de l'intuition, formateur à la déduction autant qu'à l'induction, compatible avec l'accession relativement massive de la jeunesse aux études secondaires et l'état d'esprit peu propice à la spéculation abstraite qui est la marque de cette fin de siècle, en prise directe avec l'expérimentation numérique permise par les moyens de calcul modernes qui fait *voir* ce qu'auparavant on ne pouvait concevoir qu'avec les yeux de l'imagination. Une part de la difficulté se trouve dans la nature de l'Analyse, assise sur une méthodologie qui nécessite de la part de l'élève une bonne disposition à construire une déduction suivant les branches non univoques d'un graphe dont il doit percevoir, à la suite d'une analyse globale, le "bon" chemin allant de l'hypothèse à la conclusion. Raisonner par un calcul direct nécessite simplement un certain entraînement pour en mémoriser les règles. Ceci est plus ou moins accessible à la plupart des élèves. Par contre raisonner "à l'envers" et globalement comme on doit souvent le faire en analyse exige une subtilité dont, statistiquement, la grande masse des élèves n'est pas capable, même si leur professeur déploie une ingéniosité pédagogique considérable.

Le problème se trouve dans la nature des concepts majeurs de l'analyse, celui de limite au premier chef. Les mathématiciens du XIX^{e} siècle ne furent pleinement rassurés que lorsque le concept de limite fut complètement débarrassé de toute connotation "métaphysique", c'est à dire lorsqu'il surent grâce à l'astuce géniale du epsilon-delta exprimer dans le style d'Archimède l'idée intuitive de "vraie valeur" d'une "quantité indéterminée" sans invoquer des accroissements "infiniments petits" qui, pourtant, avaient si bien réussi au XVIII^{e} siècle. Mais le prix à payer pour ne manipuler que des concepts bien définis à partir des notions algébriques sur les nombres a été la "contravariance" des raisonnements d'analyse, c'est à dire le fait qu'il faut raisonner à l'envers par rapport au cheminement heuristique et deviner le choix de la stratégie gagnante à chaque embranchement logique.

Il résulte de ces considérations que si l'on pouvait enseigner l'analyse de manière plus "covariante", on renforcerait certainement l'accessibilité des mathématiques pour la grande masse de nos élèves. Beaucoup de professeurs le font en remplaçant provisoirement la notion formelle de limite par le concept intuitif correspondant, en sachant bien que c'est "illégal" car la formalisation correspondante n'est pas possible sans "renverser les quantificateurs" en détruisant le concept intuitif. Dire "si x est très proche de 0 alors f(x) est très proche de f(0)" est accessible à l'intuition de l'élève et compatible avec le verdict de la calculette. Il s'agit d'un constat empirique érigé en fait mathématique à l'aide du concept informel de proximité, lequel n'a hélas aucune contre-partie formelle *dans la mathématique classique*. Le saut intellectuel qui mène à l'expression epsilon-deltaÏque usuelle n'est pas pour autant facilité. C'est pourquoi les concepteurs des programmes ont renoncé à l'imposer aux élèves en trouvant d'autres moyens pour asseoir le maniement des limites et leur calcul sur des règles admises. C'est bien là une tentative pour retenir essentiellement une partie covariante de la matière.

3. LES CONDITIONS D'UNE EXTENSION ACCEPTABLE DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

Nous proposons d'explorer une autre voie pour transgresser la difficulté : au lieu de s'interdire une covariance heuristique si sympathique, *il convient de renforcer la mathématique formelle afin qu'elle y trouve une contre-partie logiquement aussi fondée que la mathématique en usage.*

A-t-on le "droit" de faire une chose pareille? N'est-il pas dangereux de mêler étroitement l'intuitif et le formel ? Quels sont les critères de cohérence d'une telle extension de la mathématique ? Autant de questions qui peuvent susciter de légitimes inquiétudes, et qui doivent être abordées dans la clarté.

La mathématique a connu diverses extensions au cours de sa jeune histoire. L'enrichissement progressif de la notion de nombre, d'abord entiers, puis rompus et dotés d'un signe, étendue à des irrationnels réclamés initialement par la géométrie et enfin réels par rapport à d'autres dits imaginaires tant leur existence semblait longtemps une pure vue de l'esprit, se solde en fin de compte par un fait rassurant : il s'agit chaque fois d'une extension de la mathématique formelle dans laquelle tous les objets ou propriétés sont définissables en termes de la mathématique antérieure.

Ainsi s'est touvée formalisée une part considérable des mathématiques empiriques. Pour "avoir le droit" d'aller plus loin, il faut remplir deux conditions fondamentales :

– que l'extension formelle projetée soit logiquement cohérente avec la mathématique classique, c'est à dire que cette dernière ne devienne pas contradictoire dans le cadre axiomatique nouveau ;
– que cette extension soit la formalisation d'une part plus grande de mathématique empirique.

Alors seulement il devient légitime de rapprocher le formel de l'intuitif en un dialogue sans embarras.

Une troisième condition, plus subtile, porte le nom de *conservativité*. Elle signifie qu'un énoncé de la mathématique classique qui est un théorème dans la mathématique étendue est aussi un théorème dans la mathématique classique. La conservativité implique *ipso facto* la cohérence logique *relative* par rapport à la mathématique classique.

4. LE CONCEPT EMPIRIQUE DE GRANDEUR ABSOLUE

Or, quels sont les concepts empiriques que la mathématique classique, conçue autour de l'idée rassurante et démocratique que tous les nombres entiers ont le même statut, ne saurait formaliser ? Eh bien simplement tous ceux qui tournent autour de la notion de *grandeur* en tant que qualité absolue.

L'idée de grandeur est pourtant omniprésente dans nos conversations. On ne cesse de juger qu'un tel est grand, petit ou moyen, et cela ne "fait" pas "au moins" ou "au plus" tant de centimètres... Cette notion de grandeur a d'étranges vertus : si l'on enlève 1 à un grand nombre, il reste un grand nombre. Si l'on ajoute 1 à un nombre moyen il reste moyen... Montons l'escalier, direz-vous ! Alors nous trouvons par récurrence que tous les nombres entiers sont moyens ! D'ailleurs s'il y avait des nombres qui ne sont pas moyens, le dernier des moyens augmenté de un serait à la fois moyen et grand, ces deux notions étant contraires l'une de l'autre. Quelle horreur, cette notion est contradictoire !

Eh bien non ! Le raisonnement ci-dessus est *faux*... Car la récurrence ne consiste pas à "monter l'escalier", et n'importe quelle *collection intuitive* d'entiers ne mérite pas un dernier élément, même si elle est majorée... L'erreur provient ici du mélange entre concepts intuitifs et formels...

Voilà qui est bien tordu, penserez-vous ! Pas vraiment, parce que la difficulté ne provient pas des notions de grandeur, mais de *votre* compréhension trop informelle de la mathématique *classique*...

Que la grandeur n'ait pas de frontière précise est inscrit dans sa nature profonde. La plupart des phénomènes collectifs n'ont pas de frontière précise dans le monde empirique... De la foule au tas de sable en passant par l'évolution des êtres vivants, les changements d'état sont flous. Il n'est alors pas raisonnable que la mathématique ne contienne pas de concept formel ayant une caractérisitique si essentielle !

5. UNE AUTRE VOIE À EXPLORER : LA FORMALISATION DE LA GRANDEUR

Dans notre ouvrage le premier travail consiste donc à mettre quelque clarté dans le discours à propos des notions classiques de l'arithmétique, en particulier la récurrence, très généralement confondue avec "etc." Puis on est prêt à formaliser les ordres de grandeur. D'abord très simplement, et cela permet déjà de couvrir l'essentiel de l'analyse que l'on pratique au lycée. Puis de manière un peu plus élaborée, et l'on est capable de démontrer les théorèmes fondamentaux sur les limites de suites et de fonctions, les dérivées et les intégrales.

La conservativité de ces extensions successives résulte de celle de l'Analyse non standard, qui les contient.

L'analyse réelle que l'on peut développer à partir de là est considérablement plus covariante que l'analyse classique. L'équivalence des notions de limites, continuité, dérivées, intégrales exprimées dans le langage enrichi avec celles des mathématiques classiques couronne l'édifice et permet de rassurer ceux qui craignent que l'usage immodéré des ordres de grandeur dans l'enseignement n'engendre une rupture de la communication entre ceux qui ont été éduqués dans le style classique et les autres, voire une perte culturelle. Nous prônons résolument la double culture ! Mais au stade de l'initiation, il nous semble que l'approche en termes d'ordres de grandeur est plus cohérente et accessible au plus grand nombre d'élèves, tout en restant rigoureuse. La sensibilisation au double langage pourrait commencer dans le premier cycle universitaire et n'être pleinement développée que dans les études de mathématiques, lesquelles ne concernent qu'une part infime des étudiants. Les autres disposeraient alors de concepts largement suffisants, et surtout proches de la modélisation numérique des phénomènes concrets, pour leur permettre d'être à l'aise dans les activités où l'on utilise des mathématiques.

Cette vision ne préjuge pas des adaptations pédagogiques qu'une telle mutation suppose. Mais la vraie liberté d'esprit et la clarté conceptuelle du dialogue entre l'empirique et le formel sur lequel elle est assise ne saurait laisser indifférents les collègues qui aimeraient appuyer leur enseignement sur une base solide autorisant une créativité accessible à un plus grand nombre d'élèves. Nous espérons que notre travail sur le fond leur apportera quelque satisfaction.

Les quelques éléments techniques qui suivent ont pour objectif de présenter les aspects majeurs de notre proposition, dont le détail se trouve dans notre ouvrage. On y trouve en particulier les qualificatifs nouveaux qu'après une longue réflexion nous avons cru devoir introduire dans le langage mathématique formel, plutôt que les qualificatifs de l'ancienne analyse infinitésimale et ceux en usage chez les praticiens de l'analyse non standard. Il s'agit évidemment de choix discutables, dont la justification pourrait être la suivante : les vocables "infiniment petit" et "infiniment grand" ont une connotation métaphysique largement responsable de l'incompréhension à laquelle s'est heurtée l'analyse non-standard dans ses débuts. Plus profondément, l'analyse infinitésimale de Leibniz n'a pas survécu aux tentatives infructueuses pour définir les nombres infiniment petits et grands comme des entités mathématiques (ce qui n'était d'ailleurs pas dans l'intention de Leibniz, lequel y voyait surtout "une manière de faciliter l'invention" grâce à une façon de s'exprimer "qui diffère du style d'Archimède"). Or ces entités n'ont pas de contre-partie empirique, aucun nombre empirique ne mérite en soi un ordre de grandeur absolu qui le distingue des autres. Par contre la grandeur en tant que qualité entrant dans le discours sur les nombres empiriques est omniprésente, comme nous l'avons évoqué plus haut. La grande nouveauté est de l'admettre au sein du discours mathématique formel, avec ses propriétés constitutives. Quand au mot "standard", il rappelle que la première version de l'ANS était inspirée de la découverte, par les logiciens du début du siècle, des fameux modèles non-standard (c'est à dire non équivalents au modèle classique) de l'arithmétique du premier ordre (celle où l'on ne quantifie que sur les nombres et non sur l'ensemble des parties de N). Il y a bien des groupes, corps et des anneaux en mathématique qui n'ont rien à voir avec les notions correspondantes de la vie courante. Y adjoindre "standard" ne gène pas le mathématicien mais ne serait qu'un inutile snobisme dans l'enseignement des bases.

6. LES EXTENTIONS ZF+ ET ZF++

Notre objectif premier est d'introduire le plus simplement possible dans le langage mathématique un concept de grandeur concernant les nombres réels. Ce concept ne peut pas être *défini* dans le cadre de la théorie des ensembles usuelle notée ZF. C'est pourquoi nous adjoignons au langage de ZF le vocable *entier-modéré* avec le statut grammatical d'adjectif (c'est à dire dans le méta-langage des logiciens, un prédicat monadique). Dans le langage ainsi enrichi nous trouvons donc deux types d'expressions : celles qui sont *internes* au langage de ZF, c'est à dire ne contiennent pas le nouvel adjectif, et les autres, dites *externes*.

Les axiomes de la théorie élargie, appelée ici ZF+, comportent tous les axiomes de ZF, *restreints aux expressions internes,* et les axiomes suivants, qui donnent du corps au nouveau concept :

(i) *Tout n qui est entier-modéré est élément de N.*
(ii) 1 *est un entier-modéré.*
(iii) *tout élément de N inférieur à un n qui est entier-modéré est entier- modéré.*
(iv) *Si n et p sont entier-modérés alors* n + p, et n.p le sont aussi
(v) *il existe un élément de N qui n'est pas entier-modéré.*

A partir de là on peut *définir* des concepts parents :

un réel est dit *modéré* si sa partie entière est entier-modérée. Un réel positif non modéré est dit *très grand* (en abrégé *tg*). Un réel est dit *très petit* (en abrégé *tp*) s'il est nul ou si la valeur absolue de son inverse est très grande. Deux réels sont dits *très proches* (notation $\approx$) si leur différence est très petite.

On peut aisément déduire des axiomes ci-dessus des règles de calcul qui sont exactement celles de Leibniz. En voici quelques unes, écrites synthétiquement :

– concernant l'addition

tp +tp = tp ; tg + modéré
= tg ; modéré +modéré = modéré.
tg positif + tg positif = tg positif.
Mais tg positif - tg positif
= cela dépend des cas.

– concernant la mutiplication.

tp. modéré = tp ; modéré. modéré
= modéré.
"non tp. tg = tg "
car les inverses vérifient "modéré. tp = tp".

Dans ZF+ on peut développer une part considérable de l'analyse que l'on pratique au Lycée sur des fonctions explicites à caractère algébrique.

Par exemple trouver un nombre réel explicite très proche de $(w + w^2) / (2w + w^3)$ ou $w - (1 + w^3) / (2 + w^2)$ lorsque le réel w est très grand.

On peut même démontrer que pour tout réel $e \approx 0$, la racine carrée de 1+e se met sous la forme $1 + e/2 - e^2/8 + e^2h$ avec $h \approx 0$, ou trouver en toute légalité formelle tout autre développement à l'ordre 2, 3,... (s'arrêter quand on veut) concernant des expressions écrites (sans points de suspension !) sous forme de sommes et de produits explicites. Bien sûr on ne dira pas qu'on calcule une limite ou une dérivée, car on ne parle pas ici de fonctions. On obtient seulement ce que jadis on appelait "vraie valeur d'une forme indéterminée" dans un esprit purement numérique. Mais c'est essentiellement *cela* que l'on pratique au lycée, en se référant d'ailleurs (non explicitement, par prudence !) à une définition fonctionnelle de la limite.

Les "indéterminations" qui échappent à ZF+ concernent les expressions contenant des exponentiations. En effet, les axiomes ne permettent pas de montrer que si n est un entier modéré, alors 2^n l'est aussi. Cela peut choquer ceux qui pensent que l'on n'a qu'à appliquer n fois l'axiome sur les produits, étant donné que 2^n s'obtient en itérant n fois l'opération de multiplication par deux. Mais rien ne permet d'affirmer que tout exposant modéré peut être obtenu en "ajoutant 1 autant de fois qu'il faut", cette dernière expression n'étant pas exprimable dans le langage mathématique formel. Remarquons que le concept empirique de grandeur ne vérifie pas vraiment la propriété considérée ; on aurait même tendance à penser que 2^n croit si vite avec n que l'on pourrait modéliser le phénomène en introduisant l'axiome contraire "il existe un n modéré pour lequel 2^n est très grand". On aurait alors une analyse différente de l'analyse classique en ce qui concerne les propriétés de l'exponentielle, la notion de limite ne coincidant pas avec celle de l'analyse classique pour cette fonction. Malgré son utilité dans la modélisation des phénomènes à caractère "explosif", nous n'explorons pas cette voie inhabituelle, bien qu'elle soit parfaitement consistante.

Un axiome assez général pour rapprocher l'analyse des approximations de l'analyse classique est le suivant :

***axiome de récurrence modéré* :**

(vi) *Pour chaque propriété P_n de* ZF+ *indexée par un entier variable* n, *si pour tout* n *modéré à partir de* n_0, *P_n implique P_{n+1} (propriété héréditaire), et si P_n est vraie pour* n = n_0, *alors P_n est vraie pour tout* n *modéré supérieur à* n_0.

Si la propriété P_n est interne et héréditaire, elle est vraie pour tout n supérieur à n_0, d'après le théorème de récurrence classique. L'intérêt de l'axiome ci-dessus tient à son application aux propriétés externes. Par exemple il permet de montrer que pour tout réel modéré r et tout entier modéré n, le réel r^n est modéré.

Nous notons ZF++ la théorie ainsi renforcée dans son axiomatique. Elle est le cadre naturel de l'analyse des approximations, sur laquelle peut être fondée une grande part de l'activité mathématique dans le second cycle.

De nombreuses questions de nature psychologique se posent. Une des plus immédiates tient à la croyance très platonicienne et fortement ancrée que les objets mathématiques ont une "existence en soi", et donc que " très petits" ou "très grands" est une qualité que l'on doit pouvoir observer sur les "vrais" réels. Il est vrai que les objets de la mathématique empirique ont une existence suffisamment perceptible par nos sens pour que la question mérite d'être posée. La réponse qu'elle appelle est simplement le fait que la mathématique formelle est inspirée de la mathématique empirique mais n'en partage pas tous les aspects subjectifs. Le prix à payer pour la formalisation est justement l'abandon de tout caractère ontologique. Il n'y a pas *d'objets* en mathématique formelle, seulement un *discours sur des propriétés* exprimées dans un *langage* qui les codifie et une manière de les *déduire des axiomes* choisis en fonction de la véracité de leur interprétation en termes de mathématique empirique. Quand on parle du "nombre p" il ne s'agit pas d'un objet (à moins que l'on ne parle du signe écrit sur le papier) mais d'une abréviation pour un discours du style "il existe un unique nombre réel vérifiant la propriété à une variable libre A(x)" où A(x) est une propriété fort compliquée (par exemple une formule de récurrence qui définit une suite d'approximations convenables). Nous acceptons volontiers que les décimales de l'unique nombre ayant la propriété A soient difficiles à calculer, et en fait personne ne saurait trouver en peu de temps la millionième décimale de p. Par contre, sachant que 1000000 est un entier modéré, nous en déduisons immédiatement que la *millionième décimale d'un réel très petit est nulle*. En ce sens nous "connaissons mieux" les réels très petits que p, e, les racines carrées de 2, 3,5, etc. Ce fait devrait rendre l'introduction des ordres de grandeur plus facile à admettre !

7. LA THÉORIE ZFE ET LA NOTION DE LIMITE

L'analyse que l'on peut développer dans ZF++ ne permet pas de définir une notion générale de limite pour les suites et les fonctions de variable réelle. Pour une suite explicite (U_n) on peut évidemment étudier les valeurs du nombre U_n lorsque n est très grand et constater qu'elle est très proche d'un même réel explicite L. Une remarque analogue vaut dans le cas des fonctions pour les x très proches d'un x_0 ou bien très grands. On aura ainsi trouvé au coup par coup des "limites" sans avoir une définition de cette notion. Car une telle définition demande que l'on précise quel type de suites ou de fonctions elle concerne. Si l'on dit simplement "une suite U tend vers une limite L ssi pour tout n très grand U_n est très proche de L ", on risque de restreindre très fortement la notion de limite. En effet, nous nous attendons à ce que la suite $\frac{a}{n}$, où a est un paramètre réel, tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Cela correspond à l'idée intuitive que "si la valeur de a est fixée alors $\frac{a}{n}$ est aussi petit que l'on veut pourvu que n soit assez grand". Pour a modéré et n très grand, $\frac{a}{n}$ est très petit, de sorte que la définition s'applique avec L = 0. Par contre cela n'est plus le cas pour a très grand, puisque $a/a = 1$. Le problème vient de ce que notre idée intuitive suppose en fait le réel a *explicite*, c'est à dire descriptible par une propriété interne qui le caractérise, tel 1, 25, p, e, etc. Mais *explicite* n'est pas une propriété exprimable dans le langage de ZF. C'est pourquoi, pour passer de l'analyse des approximations numériques à celle des limites de suites et fonctions, il convient de formaliser cette notion en enrichissant le langage de ZF d'un adjectif nouveau et les axiomes de quelques schémas qui s'inspirent des propriétés empiriques du caractère *explicite*. On pourrait le faire seulement pour les nombres, mais ce serait restreindre inutilement la portée de l'extension. Il nous faut une formalisation des notions de nombres *et* de fonctions explicites.

Après une longue réflexion, nous proposons d'introduire dans le langage formel le prédicat *bien déterminé (bd)* qui rappelle adéquatement le concept empirique qui l'inspire. Il n'y a aucun risque de confusion puisque un nombre ou une fonction qui sont bien déterminés au sens empirique (c'est à dire on peut écrire la formule de ZF qui les définit) le sont automatiquement au sens formel (ceci résulte de l'axiome de transfert ci-dessous).

Les schémas d'axiomes de l'extension ZFE (E pour "externe") sont des affaiblissements de ceux de la théorie plus complexe IST qui formalise l'analyse non-standard dans toute sa force. Ce sont les suivants :

(i) *tous les axiomes de ZF mais restreints, chaque fois qu'une propriété y apparait, aux propriétés internes.*

(ii) *l'axiome de transfert* (on devrait dire plutôt le *schéma d'axiome,* car son énoncé comporte une propriété à choisir). Il s'énonce ainsi :

Soit P*une propriété interne concernant des objets fixés* $a_1, a_2, ..., a_n$ *et des objets variables* $x_1, x_2, ..., x_s$ *de divers types. Alors si tous les* a_i *sont bien déterminés, la propriété est vraie pour toutes les valeurs possibles des* x_j *si et seulement si elle l'est pour toutes les valeurs bien déterminées des* x_j.

(iii) *l'axiome de détermination* s'énonce ainsi :

pour tout ensemble bien déterminé E *et toute propriété mathématique* P(x) *à propos des éléments de* E, *il existe un ensemble bien déterminé* F *dont les éléments bien déterminés sont ceux de* E *vérifiant la propriété* P.

(iv) *l'axiome d'idéalisation* affirme que :

Un ensemble est bien déterminé et fini si et seulement si tous ses éléments sont bien déterminés.

En ce qui concerne (i), cela signifie que tous les théorèmes de ZF sont des théorèmes (internes) de ZFE. Mais il faut faire attention à ne les appliquer qu'à des affirmations internes.

L'exemple typique concerne les sous-ensembles définis par une propriété P : la propriété P doit être interne. Pas question de définir "l'ensemble des réels bien déterminés"...

De l'axiome de transfert on tire, comme annoncé, que tout théorème de ZF du type "il existe un unique x vérifiant la propriété interne A(x)" se transfère en "il existe un unique x bien déterminé vérifiant A(x) " ; c'est dire que les objets définis dans ZF sont bien déterminés dans ZFE.

L'axiome (iii) s'applique à toutes les propriétés internes ou externes exprimables dans le langage de ZFE.

On vérifie aisément que les axiomes (ii), (iii), (iv) ont une contre-partie empirique claire. Par exemple à propos de (iv) on constate bien qu'une collection d'objets est intuitivement finie si et seulement si nous pouvons caractériser explicitement tous ses éléments.

Il résulte de (iv) que tout ensemble bien déterminé infini admet au moins un élément non bien déterminé. Ceci ouvre la porte à l'immersion de la théorie ZF++ dans ZFE. En effet, si on définit *entier-modéré* par *entier bien déterminé* on montre facilement que les axiomes de ZF++ sont démontrables à partir de ceux de ZFE.

Dans **R** on aura alors des réels bien déterminés et des réels à partie entière bien déterminée, lesquels méritent comme dans ZF++ d'être qualifiés de modérés. Un réel modéré n'est pas en général bien déterminé. Mais il y a une consolation, le *théorème de l'ombre* :

pour tout réel modéré, il existe un unique *réel bien déterminé, appelé son ombre, dont il est très proche.*

Ce théorème exprime sous forme externe facile à utiliser que le corps des réels est complet. Il donne un critère pour s'assurer qu'une suite a une limite sans connaître de candidat limite. En effet, nous pouvons maintenant définir la notion de limite de la manière suivante (transcription immédiate pour les fonctions) :

Définition. *Une suite bien déterminée* U *tend vers une limite bien déterminée* L *si et seulement si pour tout entier* n *très grand* U_n *est très proche de* L.

Cette définition externe de la limite, uniquement valable pour les suites bien déterminées, est en concurrence avec la définition interne, valable pour toutes les suites, qui s'énonce

"*pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un rang* k *tel que* $n > k$ *implique* $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$"

En fait, pour les suites bien déterminées les deux définitions sont équivalentes. En voici la démonstration.

Soit U une suite bien déterminée qui tend au sens externe vers un réel bien déterminé L. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ bien déterminé, il existe un k tel que $n > k$ implique $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$, à savoir n'importe quel k très grand (il en existe d'après l'axiome d'idéalisation). En appliquant l'axiome de transfert, on en déduit bien que

"pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang k tel que $n > k$ implique $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$".

Dans l'autre sens, supposons que la suite bien déterminée U tende vers une limite L au sens interne. Comme la limite est unique, elle est bien déterminée comme tout objet défini de manière interne à partir d'objets bien déterminés (utiliser l'axiome de transfert). Puis on applique deux fois le transfert à l'expression

"pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang k tel que $n > k$ implique $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$".

On obtient d'abord " pour tout $\varepsilon > 0$ bien déterminé il existe un rang k tel que nk implique $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$". Puis "pour tout $e > 0$ bien déterminé il existe un rang k bien déterminé tel que $n > k$ implique $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$".

On en déduit que pour tout n très grand (c'est à dire supérieur à n'importe quel k bien déterminé), la valeur absolue de $U_n - L$ est inférieure à ε. Comme ceci est vrai pour tout ε bien déterminé, il en résulte que U_n est très proche de L.

Notons que la condition "$U_n \approx L$ pour tout n à partir d'un entier k très grand" est également équivalente à la définition classique (légère modification de l'argument ci-dessus).

On obtient des équivalents analogues pour ce qui concerne les limites de fonctions et donc aussi la continuité, les dérivées, les intégales etc.

Ayant établi une fois pour toutes l'équivalence des définitions internes et externes, on est libre d'utiliser l'une ou l'autre pour démontrer un théorème interne. Dans le cas où l'on souhaite utiliser une définition externe, il faut simplement mettre préalablement le théorème sous forme transférée. Voici un exemple pour donner le ton de ce genre de démonstration.

Soit à montrer que *toute fonction continue* f *sur un segment* [a,b] *telle que* f(a) < 0 et f(b) > 0 *s'annule en au moins un point du segment.*

L'énoncé transféré équivalent dans ZFE s'obtient en précisant que les "constantes du problème", ici a,b, f sont bien déterminées.

Soit alors w un entier très grand. Il permet de découper l'intervalle [a,b] en autant de sous-intervalles de longueur très petite $[p_n, p_{n+1}]$ où $p_n = a + n\,(b - a)/w$. Soit k le plus petit indice tel que $f(p_k) \geq 0$. Alors $f(p_{k-1}) < 0$. Soit c l'ombre commune de p_k et p_{k-1}. Comme a et b sont bien déterminés, c est entre a et b au sens large (car deux réels bien déterminés et très proches sont égaux). Mais alors, la continuité implique $f(p_k) \approx f(c) \approx f(p_{k-1})$, de sorte que le réel f(c), qui est bien déterminé car f et c le sont, est à la fois très proche d'un réel négatif et d'un réel positif. Il est donc nul.

On constate ici le caractère *"covariant"* de la démarche démonstrative. On obtient c par un *calcul* qui utilise le passage à l'ombre. Puis on vérifie la propriété annoncée.

Voici un autre exemple. Soit à montrer que *toute suite* U *croissante et majorée par une constante* m *admet une limite.*

Aprés transfert de l'énoncé, c'est à dire ici en se restreignant au cas où U et m sont bien déterminés, on découpe finement l'intervalle $[U_0,m]$ comme ci dessus, avec des points de subdivision $p_n = U_0 + n(m - U_0)/w$. Clairement il faut chercher la limite très près du premier des p_n qui majore la suite. Notons-le p_i et soit L son ombre. Alors il existe une valeur U_k comprise entre p_{i-1} et p_i. La croissance de U implique que pour tout n > k, on a $p_{i-1} < U_k \geq U_n \geq p_i$. Donc $U_n \approx L$, de sorte que L est limite de U.

Là encore nous avons *calculé* formellement la limite en faisant usage du passage à l'ombre, après un calcul combinatoire préalable.

On comprend pourquoi les démonstrations des théorèmes internes dans ZFE sont plus covariantes que dans ZF si l'on remarque que les axiomes nouveaux se présentent comme des *inversions de quantificateurs* par introduction de "bien déterminé" au bons endroits. Ainsi, si l'on utilise les équivalents externes des notions internes fondamentales, beaucoup de démonstrations de théorèmes internes deviennent après transfert des calculs directs qui peuvent être étroitement guidés par la transcription heuristique du problème. Ainsi la recherche de la limite d'une suite croissante par la méthode ci-dessus est inspirée d'un algorithme très naturel pour cerner l'endroit où les valeurs de la suite s'accumulent.

Ainsi la fécondité de ZFE pour fonder un enseignement de l'analyse plus accessible aux élèves est inscrite dans sa structure logique. Elle enrichit la mathématique de raccourcis qui sont en même temps des chemins proches des approches heuristiques. Cependant, faire de l'analyse en se plaçant dans un cadre admettant ZFE (ou si l'on est moins ambitieux ZF++) comme justification formelle n'est acceptable (compte tenu de la morale mathématiques de notre époque) que si ces extensions sont conservatives par rapport à ZF. C'est dire que tout théorème de ZFE qui a une formulation interne doit aussi admettre une démonstration dans ZF, c'est à dire dans "le nouveau style d'Archimède" pour paraphraser Leibniz. La preuve de conservativité a été présentée par E. Nelson pour la théorie IST, qui contient ZFE comme sous-théorie, les axiomes de IST étant plus forts que ceux que nous avons choisis pour ZFE. Il en résulte que ZFE est une extension conservative de ZF, ce qui lui assure une parfaite légitimité *relative*, en ce sens que celui qui est prêt à faire de l'analyse en se référant à ZF ne peut pas refuser ZFE *pour des raisons liées à la logique*, mais uniquement des inclinations subjectives liées à ses habitudes mentales.

8. QUELQUES LIGNES DE FORCE EN VUE D'UNE DIDACTIQUE NOUVELLE DE L'ANALYSE

La construction par enrichissement successifs qui précède suggère très naturellement les principales étapes d'une didactique cohérente de l'Analyse. Elle se nourrit d'un dialogue inlassable entre mathématique empirique, conçue comme un chantier de sensibilisation contenant en germe tous les concepts importants, et mathématique formelle, conçue comme la mise en forme syntaxique et logique de ces concepts dépouillés de leur habillement intuitif. La calculette fournit du matériau expérimental à la mathématique empirique, mais l'intuition, l'imagination et la logique naturelle de l'élève jouent un rôle capital.

C'est pourquoi nous pensons que la plus grande part de l'enseignement de l'analyse pourrait consister, après avoir clairement sensibilisé les élèves aux propriétés des entiers puis des rationnels, d'introduire les concepts de *modéré, très grand, très petit* en dégageant de la pratique empirique leurs propriétés constitutives du type ZF++. On peut ensuite aller très loin dans l'analyse des approximations concernant les nombres rationnels, sans considérer les suites et fonctions comme telles. Puis mettre en valeur le passage de **Q** à **R** en le préparant par l'étude de presque-équations du type $x^2 \approx 2$ dans **Q**, de rationnels du type $(1 + 1/n)^n$ etc.

Ensuite, acceptant le corps des réels avec ses propriétés, on étend les notions de grandeur aux réels et l'analyse des approximations aux expressions contenant des radicaux. On obtient des développements de nombres qui justifieront plus tard certains développements limités de fonctions. A ce stade on évalue des accroissements relatifs de fonctions explicites pour des accroissements très petits des variables en étroite liaison avec la modélisation de la mécanique du point matériel.

Puis vient le temps d'introduire la notion de réels bien déterminés à partir de la notion empirique de réel explicitement défini par une caractérisation interne. On en dégage les propriétés formelles les plus évidentes, mais sans aller très loin. Pour les suites et fonctions, on se contente de qualifier de bien déterminées les fonctions que l'on peut écrire explicitement à partir de variables et de constantes explicites. Et à leur sujet on définit la notion de limite de manière externe. On peut alors développer le calcul des dérivées, des asymptotes etc. Ainsi que le calcul des primitives, que l'on peut à bon compte mettre en relation avec un calcul intégral à base de sommes finies d'aires très petites.

En ce qui concerne l'ombre, on se contente longtemps de faire constater son existence dans des cas où le résultat est un réel explicite.

Le concept général d'ombre et les résultats d'analyse fonctionnelle élémentaire viennent plus tard, dans le premier cycle universitaire, où les axiomes de ZFE peuvent être énoncés et pratiqués, et les équivalences avec les définitions internes des limites établies.

Cette rapide ébauche comporte de nombreuses variantes. Mais ce qui nous paraît essentiel est de faire précéder le fonctionnel de l'approximatif numérique (empirique ***et*** formalisé) rendu "légal" par l'introduction d'une axiomatique de type ZF++. La pédagogie très ouverte que cela permet nous semble assez facile à mettre en oeuvre, puisque la cassure entre le raisonnement formel et son inspiration intuitive est obturée, libérant ainsi la créativité d'un élève qui n'est pas alourdi par des règles artificielles. Apprendre à raisonner juste sur les ordres de grandeur sans devoir se méfier de l'intuition nous paraît un confort mental qui mérite considération. Il reste à imaginer des programmes qui ne soient pas des compromis boiteux, mais la traduction éducative d'une progression fondée sur des objectifs clairement définis dictés par le contenu scientifique à faire comprendre et pratiquer à une *majorité* d'élèves. Nous souhaitons vivement que l'on s'attaque sérieusement au problème, sous peine de voir les mathématiques fortement délaissées par la jeunesse à une époque où leur utilité est plus grande que jamais et leur alliance avec l'ordinateur un ferment de progrès considérable.

BIBLIOGRAPHIE

DELEDICQ A., DIENER M. : *Leçons de calcul infinitésimal,* Armand Colin.

DIENER F., REEB G. : *Analyse Non standard,* Collection enseignement des Sciences, Hermann (1989).

DIENER F., DIENER M. : *Nonstandard analysis in practice,* Universitext Springer (1995).

LUTZ R., MAKHLOUF A., MEYER E. : *Fondements pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordre de grandeurs : les réels dévoilés,* Brochure APMEP (1996).
– *L'interprétation de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur : fondement pour une nouvelle pédagogie,* L'ouvert (IREM de Strasbourg) 72, (1993).

LUTZ R., GOZE M., : *Nonstandard Analysis. A pratical guide with applications,* Lecture Notes in Mathematics 881. Springer-Verlag (1981).

NELSON E. : *Internal set theory,* Bulletin American Mathematical Society n° 83 (1977).

ROBINSON A. : *Non Standard Analysis,* North-Holland (1966).

GLOSSAIRE

La première colonne présente le vocabulaire utilisé dans la brochure APMEP par Lutz, Makhlouf et Meyer, la deuxième colonne donne les termes habituellement utilisés en Analyse non standard et la dernière fournit les termes équivalents proposés par Deledicq et son équipe de l'Université de Paris 7. Dans le cadre de ZFE, les auteurs ont volontairement choisi un vocabulaire réduit qui n'utilise pas et ne suggère pas le vocable infini. Les différents termes introduits sont : bien déterminé, très grand, très petit, modéré et très proche.

ZFE	ANS	DELEDICQ
bien déterminé	standard	standard
très grand	infiniment grand ou illimité	i-grand
très petit	infiniment petit ou infinitésimal	i-petit ou infinitésimal
modéré	limité	
très proche	infiniment proche ou infiniment voisin	i-voisin
non très petit et non très grand	appréciable	appréciable
x/y est très petit		x est négligeable devant y
x/y n'est ni très grand ni très petit		x *et* y sont comparables
x/y est très proche de 1		x *et* y sont équivalents