REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

EST-IL POSSIBLE D'ENSEIGNER L'ANALYSE AUJOURD'HUI ?

André DELEDICQ
Irem de Paris 7

Que le lecteur se rassure, il n'aura pas à lire une dissertation avec thèse, antithèse et synthèse sur le sujet, ni à attendre la conclusion de cet article pour connaître la réponse de l'auteur à cette question. Cette réponse est clairement "non !"

Cependant, bien heureusement, l'impossibilité d'enseigner certaine connaissance n'a jamais entraîné celle de l'apprendre.

Et c'est donc avec l'optimisme du mineur de fond didacticien que j'essaierai simplement d'exposer les arguments qui me laissent croire aujourd'hui à cette impossibilité, en terminant par quelques propositions qui pourraient rendre cet enseignement possible dans l'avenir.

QUEL SAVOIR ? ENSEIGNÉ À QUI ? PAR QUI ?

Dans le contexte de l'enseignement de l'analyse, que se passe-t-il aujourd'hui autour des trois pôles du classique schéma triangulaire Élève / Enseignant / Savoir ?

Le savoir est en pleine réinvention.. ; chacun le sait qui a déjà rencontré l'analyse non standard ou qui comprend bien qu'il devra l'apprivoiser pour son propre compte (voir [1] [2] et [3]). Ce nouveau savoir présente certes des perspectives intéressantes pour l'enseignement de l'analyse (voir [4], [5] et [6])et pour la relecture de son histoire (voir [8]); il apporte aussi des aides précieuses à une étude épistémologique renouvelée ; mais il confirme aussi les difficultés de sériation des concepts et il nous fait aussi voir plus clairement la grande complexité du sujet (voir [7]).

[Pour ceux qui ne connaîtraient pas encore suffisamment l'analyse non standard, voyez [3], [9] et [11] ou l'annexe "L'ANS en cinq notes"]

Pensant que notre expérience pourrait être utile et nos expériences reproductibles nous avons essayé, dans cet article, d'exposer ce que nous avons rencontré dans nos études et qui a pu nous amener à reconsidérer nos propres conceptions. En particulier nous tenterons de suggérer au lecteur que... :

– ... le "concept de limite" est peut-être une illusion. Il nous semble, en effet, qu'il y a en fait au moins deux concepts dont la confusion a pu, jusque là, troubler, sinon empêcher, les courageuses tentatives d'enseignement : un concept de nature plutôt numérique (celui d'**ordre de grandeur**) bâti sur l'idée que les choses qui sont trop loin ou trop petites ne sont pas, pour nous, de la même nature que celles qui sont à notre échelle ; et un concept de nature plutôt géométrique (celui d'**ombre**), bâti sur l'idée que lorsqu'un nombre infini de choses sont très voisines les unes des autres, c'est qu'elles s'accumulent autour d'un certain objet qui se trouve ainsi caractérisé), (voir [7]),

– ... le cadre classique, en restreignant aux fonctions et donc en interdisant aux nombres les notions d'équivalence ($\lim \frac{f}{g} = 1$) et d'approximation ($\lim f = \lim g$), empêche la constitution d'images mentales correctes et efficaces concernant le comportement des opérations (soustraction et division) dans les problèmes de limite,

– ... un modèle hétérogène de $\mathbb{R}$ (avec des petits, des moyens et des grands) permet d'éliminer les paradoxes dus au changement de forme des objets à différentes échelles de grandeur, et que ce modèle peut aller jusqu'à poser ce changement de forme en connaissance efficace,

– ... les problèmes d'approximation, d'ordre de grandeur ou de limites dans le plan ou l'espace sont maltraités par l'analyse classique qui se voit obligée d'introduire des artefacts bâtisseurs d'obstacles dès que sont présents plusieurs variables simultanées ; et que ces problèmes au caractère géométrique faussement naïfs débouchent sur des difficultés théoriques souvent ignorées.

Devant ces constatations, on ne peut qu'être effrayé par la nature et la complexité du savoir mis en jeu dès les bases mêmes de l'analyse mathématique. Il importe donc d'être très modeste et d'envisager tout enseignement avec la conviction que l'épistémologie de notre savoir n'est pas suffisamment solide et fondée pour que nous puissions espérer apporter autre chose à l'apprentissage qu'une aide cohérente et point trop génératrice d'obstacles (voir [0B]).

Et ce d'autant plus que les **élèves** apprennent maintenant l'analyse dans un contexte lui aussi très nouveau :

D'abord, notre enseignement de lycée est en effet destiné aujourd'hui à une proportion majoritaire de la population. Cette heureuse démocratisation a été très rapide, puisque cet enseignement était réservé, il y a seulement trente ans, à 10% d'une tranche d'âge ; il est donc normal que l'on ait voulu aplanir les difficultés, et c'est ainsi que les programmes prétendent fonder les débuts de l'analyse sur des situations d'apparence plus expérimentales et "intuitives", en essayant de gommer les difficultés techniques inhérentes au savoir lui-même.

Dans ce contexte, l'usage du vocabulaire infinitésimal et la rencontre de quelques notions non standard serait évidemment assez indiqué (voir [4], [5] et [11]). Mais il faudrait alors choisir, selon les circonstances, tel ou tel modèle (standard ou non) dans lequel les calculs seraient menés de manière cohérente et conforme aux questions étudiées.

Or, cela est strictement impossible dans le cadre de l'enseignement des mathématiques tel qu'il est aujourd'hui conçu ; en effet, cet enseignement n'a pas pour objectif d'initier les élèves à la manipulation de **modèles,** concurrents ou complémentaires, selon les problèmes ou situations rencontrés.

On peut juger cet état de fait regrettable, car il induit chez les élèves l'idée que les mathématiques sont une voie unique qui peut être confondue avec la **vérité** des choses ; alors qu'on devrait plutôt leur faire vivre l'idée que la valeur de vérité d'un énoncé dépend de la théorie au sein de laquelle il est émis (le jeu des géométries non euclidiennes serait certainement lui aussi utile dans cet apprentissage).

Ainsi, devant l'impossibilité de montrer aux élèves le modèle non standard qui formaliserait leurs intuitions, et celle d'enseigner correctement le modèle standard tenu pour trop difficile, on semble se satisfaire d'une étude zoologique des espèces de fonctions, aidée par les calculatrices.

Cependant, il faut se garder d'être trop pessimiste : depuis quelques siècles, la majorité des élèves qui l'ont souhaité ont, semble-t-il, réussi à apprendre l'analyse !

Et les **enseignants** ?

Dans l'état actuel des choses, toute action volontaire générale concernant l'enseignement de l'analyse pour les élèves me paraît donc dangereuse : l'introduction de l'ANS serait sûrement aussi génératrice de problèmes que le retour à un formalisme classique "dur" (c'est à dire fondé sur les définitions complètes et des démonstrations). Il ne me semble pas y avoir d'autre choix que de laisser se développer la multiplicité des actions individuelles jusqu'à ce qu'une tendance réfléchie apparaisse.

Ne rien faire de généralisé pour les élèves, soit, mais à condition d'avoir par contre une attitude volontariste très forte concernant la formation des enseignants (ce qui ne semble pas être le cas malheureusement). Car l'ignorance du formateur n'est-elle pas la plus grave ?

Risquons une comparaison : *un professeur peut-il aujourd'hui enseigner correctement la géométrie analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ s'il est totalement ignorant de l'algèbre linéaire ?* On pourrait répondre tranquillement "oui" à cette question puisque cela s'est fait ainsi pendant près de deux siècles. Cependant, n'est-il pas mieux (même s'il n'en parle pas ainsi aux élèves) qu'il connaisse la (petite et simple) théorie où vient se mouler le sujet dont il parle ?

Alors, aujourd'hui, un professeur peut-il enseigner correctement l'analyse à ses élèves s'il est totalement ignorant de l'analyse non standard ?

C'est donc un problème de formation des maîtres auquel il faut d'abord s'attaquer. Car, après tout, ce que l'on enseigne aujourd'hui n'est-il pas exactement ce que les professeurs d'aujourd'hui peuvent enseigner aux élèves d'aujourd'hui ?

Et s'il est impossible de faire "bien", ne reste-t-il pas possible de faire "mieux" !

FORMER LES PROFESSEURS D'ANALYSE A L'ANS ?

Mais pourquoi les professeurs d'analyse classique voudraient-ils se former à l'ANS ?

Et, à supposer qu'ils le veuillent, où pourraient-ils trouver une "bonne" formation à ce nouveau savoir ?

Il faut bien reconnaître que les livres parus jusqu'en 1990 sur l'ANS étaient particulièrement indigestes, et inutilement compliqués, en particulier parcequ'ils insistaient sur des problèmes de logique qui n'ont finalement rien à faire depuis (témoins [3], [5], [8], et le tout dernier [9]) mais c'est aux lecteurs d'en juger... et à chacun de s'y lancer.

L'objectif de cet article n'étant pas du tout d'exposer des rudiments (ou plus) en Analyse Non Standard, on voudrait simplement que les paragraphes suivants incitent les professeurs d'analyse à un approfondissement de leur culture...

Pour cela, nous avons voulu simplement développer ici deux types d'arguments :

– *Un argument épistémologique :* il nous semble aujourd'hui que la notion de "limite" est une notion composite en aval de laquelle nous croyons apercevoir plusieurs concepts, constitutifs de plusieurs "analyses".

Nous disons, en effet, qu'il y a une "analyse" des NOMBRES et qu'il y a une "analyse" des FONCTIONS.

Et nous disons qu'il y a encore une autre "analyse" : celle des OBJETS GÉOMETRIQUES, contenant en particulier celle des graphes de fonctions et où le concept d'**ombre** puise sa signification.

L'"analyse" des nombres est simple : c'est celle qui manipule les **ordres de grandeurs** et dont il nous semble dommage de priver les enfants. Mais il n'existe pas de mots pour en parler en analyse classique ; alors comment faire ?

L'"analyse" des fontions est, on le sait, difficile à apprendre à un niveau élémentaire. Quant à **l'"analyse" des objets géométriques**, elle est quasi totalement inconnue des enseignants normaux (voir [TO]) bien qu'elle semble parler clairement à l'intuition.

L'énorme avantage de l'ANS réside dans la possibilité de séparer l'analyse des nombres (résumée par ce que nous avons appelé les **règles de Leibniz**) et l'analyse des fonctions ; cela permet, tout en évitant la confusion des concepts, de proposer une graduation des difficultés dans l'enseignement de l'analyse.

Un autre avantage vient de la possibilité de traiter proprement, sans trop de mal, les problèmes de (soi-disant) "**limite**" d'objets géométriques grâce à la notion **d'ombre d'un objet** ; cette notion éclaire très agréablement pour la compréhension profonde de certains phénomènes (par exemple la non-uniformité) ce qui se passe pour les graphes de fonction et donc partiellement sur les fonctions elles-mêmes.

– *Un argument pragmatique :* il y a des situations dont le modèle classique ne sait pas parler. Ce sont pourtant des situations bien réelles et auxquelles le vocabulaire du modèle non standard est, lui, bien adapté. Et il permet de répondre à des questions pratiques posées dans la situation.

Ces situations sont celles où interviennent simultanément deux variables, et on peut comprendre pourquoi l'analyse non standard y réussit mieux car on est là plutôt sur le terrain géométrique.

Pour développer ces arguments, nous avons choisi de nous appuyer sur trois exemples relativement simples :

– L'énoncé $\lim_{x \to 0} ax = 0$ pour illustrer les conceptions relatives à la notion de "limite" et les traductions (classique et non standard) du fait que "Si x est petit, et ax grand, alors c'est que a est grand".

– L'équivalence, pour x voisin de zéro : $(1 + x)^n \sim nx$, qui nous permet de mettre l'accent sur la possibilité d'existence d'une "analyse des nombres" ou la différence entre l'équivalence et la proximité pourrait s'appuyer sur une intuition qui ne demande que ça.

– L'étude du comportement pratique de la fonction $x \mapsto x^a$ pour x petit (positif) et a voisin de 1 (plus grand que 1) qui montre comment l'ANS traduit et démontre ce que l'analyse classique ne sait pas exprimer.

On termine sur une tentative pour préciser ce que pourrait être le concept géométrique d'ombre et comment il pourrait éclairer et donner un sens à certains phénomènes délicats du domaine des fonctions.

LE CONCEPT DE LIMITE EXISTE-T-IL ?

Pour essayer de mieux apprécier les obstacles à l'enseignement de l'une des premières notions rencontrées en analyse, celle de limite, voyons si l'on pourrait la regarder comme un véritable "concept" au sens de Gérard Vergnaud (voir [OC]) ; et tentons de préciser, pour cet éventuel "concept de limite", les trois termes du triplet (situations, représentations, invariants) censé le cerner ; pour cela, explicitons d'abord les situations susceptibles de lui donner un sens.

Deux conceptions :

Il n'est pas question ici de reproduire exhaustivement cette explicitation. Simplement à la lecture des manuels ou à l'écoute des professeurs intéressés, on remarque assez vite que ces situations se répartissent en deux grandes familles induisant deux types d'images mentales très différents :

– Dans l'un de ces types d'images, on pense à un *mouvement* ou à une *évolution*. Le temps est la variable universelle à laquelle sont liées toutes les fonctions ou variables considérées. Alors, on dit des choses comme...

...lorsque t se rapproche indéfiniment de t_0, $x(t)$ se rapproche indéfiniment de x_0
...lorsque t se rapproche de t_0, $x(t)$ grandit indéfiniment
...lorsque le temps passe (t croissant indéfiniment), $x(t)$ finit par se rapprocher aussi près qu'on veut de x_0

Et lorsqu'il s'agit d'une fonction f d'une variable x, le temps est supposé commander à la fois la variation de et de . Ainsi, l'image mentale associée à $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ peut être ainsi racontée :

"Lorsque le temps passe, (indéfiniment ou bien en se rapprochant d'un instant fatidique), la variable x se rapproche indéfiniment de x_0, et $f(x)$ se rapproche indéfiniment de ℓ.

Ainsi Newton écrivait : "Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, et qui avant la fin de ce temps approche tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales". (Premiers mots des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*).

On sait que cette vision "dynamique" ne suffit pas pour installer l'invariant que traduira la définition classique d'une limite ; elle peut même se dresser en obstacle car l'idée d'un mouvement réel est liée à celle de monotonie au moins locale, et interdit la compréhension de situations plus ou moins chaotiques où l'important n'est pas le chaos mais le fait de savoir le contenir entre des bornes.

– Dans l'autre de ces types d'images, on pense à une liaison plus statique entre les valeurs de la variable et de la fonction ; alors on verbalise plutôt le phénomène par une phrase ressemblant à ceci...

...lorsque x est très petit, $f(x)$ est très petit,
...lorsque x prend des valeurs très proches de x_0, $f(x)$ prend des valeurs très proches de ℓ.

Cette manière de penser est assez naturelle à partir d'exemples numériques. L'utilisation de la calculatrice l'a beaucoup mise en avant et elle est très explicitement appelée par les programmes et commentaires officiels pour l'enseignement de l'analyse dans nos lycées.

C'est avec une telle idée dans la tête que l'on évalue, par exemple, la dérivée de f en x_0 en calculant
$1000\,[f(x_0 + 1/2000) - f(x_0 - 1/2000)]$.

Remarquons cependant que le "temps" où encore la succession éventuelle d'actions reste sous-jacent dans cette vision ; On se réserve en effet la possibilité de reconduire le calcul en remplaçant 10^{-3} par 10^{-6} et cela jusqu'à ce que le résultat soit "satisfaisant" (c'est-à-dire veuille bien rentrer dans certaines bornes).

Mais le temps qui intervient ici est plutôt celui de la dialectique ; c'est celui de la succession des étapes virtuelles "donne moi un ε, je te donnerai un η" "donne moi un ε plus petit,..."

Finalement, on imagine plutôt ici l'existence d'un seuil pratique en dessous duquel on ne pense plus explicitement à un mouvement de rapprochement : En dessous de ce seuil, lorsque $|x - x_0|$ est devenu "négligeable" on est simplement sûr que $|f(x) - \ell|$ est lui aussi "négligeable".

Malgré cette retouche nécessaire dans laquelle le temps reprend son aspect fondamental, cette vision de "proximité" ne suffit pas plus que la précédente. Elle occulte en effet (pour une provisoire meilleure compréhension) la succession **infinie** des instants ; et elle aussi pourrait se dresser en obstacle en imposant une vision trop algébrique et trop "finie", qui n'est qu'un des aspects du concept alors en jeu.

L'énoncé noir

L'apprentissage de la notion de limite suppose donc la rencontre et la familiarisation avec les deux types de situations. Dans notre recherche d'isolement ou de séparation des concepts, il nous faut alors maintenant en venir à l'expression de leur(s) "invariant(s)" formels et de leurs représentations symboliques.

Il s'agit essentiellement des symboles comme $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et de leurs traductions dans des énoncés du type "la limite en zéro de $x \mapsto ax$ est nulle". Comme on va le voir, c'est dans des énoncés aussi simples que peuvent se cacher les plus noirs obstacles...

Observons le cas le plus simple, exhibé le premier dans nos classes

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

et prenons pour f la plus simple des fonctions, la fonction linéaire : $x \mapsto nx$.

L'énoncé

pour tout n entier positif, quand x tend vers zéro, nx tend vers zéro,

est très simple à démontrer.

Il est vrai, sans contestation possible, en analyse classique.

(Il est évidemment vrai aussi en analyse non standard, mais, dans ce contexte, il peut être précisé par un corollaire dont nous verrons l'importance tout à l'heure).

Retraduisons cet énoncé dans les termes pratiques des situations qu'il prétend formaliser. Pour le premier type de situations, cela donne :

"Pour tout n entier positif, quand x se rapproche indéfiniment de zéro, nx se rapproche indéfiniment de zéro".

Rien à dire !

Pour le deuxième type :

"Pour tout n entier, quand x est très petit, nx est très petit".

Rien ne va plus ! Car cette dernière phrase, en effet, exprime manifestement une *idée fausse*, et, de plus, dangereuse ; il suffit de prendre n très grand en effet pour que nx ne soit pas forcément petit, même si x l'est. (Par exemple, si $n = 10^9$, quand $x = 0{,}000001$, nx n'est pas vraiment "petit").

Autre exemple, on sait qu'en plaçant une année bissextile tous les quatre ans, le décalage avec la durée réelle d'une année est très petit. Il n'empêche qu'au bout de 400 ans, ce décalage a atteint un jour : il n'est plus très petit.

Conclusions provisoires

De ce divorce constaté entre invariants formels et représentation mentale, nous tirons trois types de conséquences :

i. D'abord que *l'analyse classique ne traduit pas bien les images mentales du deuxième type*. En effet, le modèle proposé par l'analyse classique ne formalise pas correctement les situations où l'on rencontre des nombres "très petits", "très grands", "négligeables"...

Pire : ce modèle mathématique démontre des énoncés théoriques dont l'inadéquation est patente lorsqu'ils sont retraduits en termes pratiques.

Il faut donc prévoir de sérieux gardefous dans les "illustrations" que nous proposons aux élèves, en particulier :

Si nous souhaitons aller vers l'enseignement de la notion classique (et nous ne pouvons que le souhaiter), il nous faut présenter des situations qui préservent la dialectique $\forall \varepsilon \ldots \exists \alpha$; il nous faut en effet pouvoir jouer sur le fait que si, pour un x très petit, nx n'est pas ("encore") très petit, on puisse prendre un x encore plus petit de manière que ("finalement") nx soit effectivement très petit ; et aussi petit que soit le ε en dessous duquel on veut descendre pour nx on arrivera à trouver un α tel que les valeurs inférieures de x assurent cette très petitesse de nx ; et tout ceci quelle que soit la valeur de n initialement fixée.

On voit bien (et on connaît bien) la complexité de ce concept-là et, donc, des situations qui le traduisent. Les situations du premier type (que le temps soit explicite ou non) semblent mieux traduire la formulation classique ; par contre, les situations du deuxième type, très statiques, nous semblent plutôt illustrer un *autre concept* qui ne serait pas confondu avec celui de "limite" et qui serait plus élémentaire, ce serait un concept que l'on pourrait faire rencontrer et manipuler avant "l'autre" et qui permettrait aux élèves de se familiariser avec ses invariants et les situations qui lui donnent un sens. Nous suggérons d'appeler ce concept du nom d'**ordre de grandeur**.

Une représentation schématique en est une "échelle" à trois barreaux : les petits, les appréciables, les grands ; et ses invariants formels s'expriment par des règles de calculs du type

"petits $\times$ appréciables = petits"

et des énoncés du genre de ceux que l'on rencontre en Analyse Non Standard. L'ANS permet en effet de les étudier et de prononcer à leur sujet des phrases qui ont à la fois un sens pratique et une cohérence mathématique.

Ainsi, par exemple, sur la simple égalité y=nx, voici ce qu'il est juste d'affirmer :

(J1) Pour tout n non très grand, quand x est très petit, nx est très petit.

Le contraposé de cet énoncé est aussi très utile :

(J2) Si x est petit et que nx ne l'est pas, alors c'est que cet n est très grand.

ii. Il me semble qu'il devrait y avoir là une très forte motivation à l'apprentissage de l'ANS :

– On se trouve en présence d'une idée que l'on sent profondément juste ; c'est l'idée qui est la nôtre devant la prospérité du boucher : le papier qui enveloppe la viande est sûrement très léger, mais s'il sert de très nombreux clients, alors il en retirera un bénéfice "non négligeable". Plus poétiquement, c'est l'idée qu'une goutte d'eau est certainement négligeable devant l'océan mais que, cependant, un nombre fini de gouttes suffit à le former.

– Cette idée juste est-elle formulable, exprimable par des propriétés mathématiques classiques ?

– Cette idée juste est-elle exprimable dans une théorie mathématique non classique ?

Si la réponse à cette dernière question est "oui" et si cette théorie n'est pas plus difficile qu'une autre, qu'est ce qui pourrait m'inciter à l'ignorer ? D'autant plus que cette théorie me permet de manipuler et donc d'apprivoiser, sans aucun arsenal technique, des situations où les formulations classiques obligent à la rencontre de "formes indéterminées".

Par exemple, la référence [4] donne de nombreux exemples de travaux avec des élèves permettant d'étudier les différents cas qui peuvent se produire dans des situations où l'on s'intéresse à un produit

$n \times x$ dans lequel n est grand et x est petit. Et l'on n'y voit aucun "paradoxe", puisqu'il y a un simple calcul de type algébrique que l'on peut préciser par des phrases comme :

> Si x est petit et si n est négligeable devant $\frac{1}{x}$, alors nx est petit.
>
> Si x est petit et si $\frac{1}{x}$ est négligeable devant n, alors nx est grand.

iii. Notez que l'assertion

> *Pour tout n non très grand, quand x est très petit, nx est très petit*

ne peut pas se traduire dans le modèle classique sans l'apparition d'un artefact entièrement dû à cette modèlisation : il s'agirait en effet, dans cette modèlisation, d'étudier nx quand n tend vers l'infini *et* x vers zéro ; et voilà ce que nous dit à ce sujet l'analyse classique :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} nx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} nx = \infty .$$

Ainsi, dès qu'il y a deux variables en jeu, la définition classique se trouve en défaut de pragmatisme.

On se trouve en effet devant l'obligation de préciser :

– soit que l'une des variables varie *avant* l'autre, et l'on étudie par exemple

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) ,$$

– soit que les deux variables varient ensemble mais alors de manière liée et l'on étudie alors par exemple $\lim_{n\to+\infty} f_n(x(n))$.

Pourquoi donc faudrait-il, dans la pratique, que l'une des deux variables tende vers zéro avant l'autre ? Bien sûr, lorsqu'une liaison fonctionnelle existe entre n et x on peut étudier plus précisément la question. Mais lorsque n et x sont de simples valeurs numériques (365 et 0,007 par exemple), qu'est-ce qu'il est intelligent de dire ?

On résoud généralement le problème *mathématique* par une demande plutôt irréaliste. On peut en effet conclure lorsque la limite par rapport à l'une des variables s'effectue "uniformément" par rapport à l'autre ; techniquement, cela signifie que la distance entre $f_n(x)$ et sa limite pour n tendant vers l'infini, est majorée indépendamment de x. Cependant, cette demande est exorbitante dans les cas concrets qui se présentent. La non uniformité produit alors des phénomènes intraduisibles dans le modèle classique et ces phénomènes sont vus comme autant de paradoxes.

En résumé : l'analyse classique n'est (parfois) pas un bon modèle des situations où l'on voudrait traduire être "petit" ou être "grand" par "tendre vers zéro" ou "tendre vers l'infini". Ce défaut apparaît spécialement lorsque plusieurs variables interviennent simultanément ; l'analyse oblige alors à des précautions de préséance ou à l'introduction de concepts qui, comme l'uniformité des convergences, apparaissent comme des artefacts de la théorie.

Aujourd'hui qu'il existe une théorie mathématique qui modélise bien les notions pratiques de "petit" et de "grand" n'est-il pas vraiment dommage de s'en passer ?

COMMENT DES NOMBRES PEUVENT-ILS ÊTRE "PROCHES" ?

La simplicité de l'exemple $x \mapsto n$ ayant pu cacher l'énormité de l'anomalie, examinons une classe de situations très fréquentes dans la vie courante et en physique : celles où l'on est amené à considérer la quantité $(1 + x)^n$ pour x voisin de zéro.

Il peut s'agir, par exemple, d'un processus de type exponentiel où n représente le temps, découpé en unités, et où le taux d'accroissement par unité de temps est généralement petit car on choisit justement une unité suffisamment petite pour pouvoir étudier finement le phénomène.

Équivalence ou proximité ?

L'étude de la fonction $q(x) = (1 + x)^n$ au voisinage de zéro conduit à démontrer le résultat suivant :

$$(1 + x)^n = 1 + nx + x\,\varepsilon_n(x),$$

où $\varepsilon_n(x)$ est une fonction qui tend vers 0 avec x.

Ce résultat, qui se traduit par l'équivalence

$$(1 + x)^n - 1 \sim nx,$$

est le plus souvent interprété (à tort bien entendu, et c'est là tout le problème) en disant :

Pour x petit, $1 + nx$ *est une bonne approximation de* $(1 + x)^n$.

Cette phrase, au demeurant non mathématique, est extrêmement utilisée dans nombre de calculs numériques et d'applications pratiques.

Cependant le fait mathématique (vrai en analyse classique) :

$$\forall n \in N\ (1 + x)^n - 1 \sim nx$$

a du mal à ne pas induire l'interprétation pratique :

Pour tout n entier et pour tout x petit, $1 + nx$ *est très voisin de* $(1 + x)^n$.

Or, comme chacun le sait, cette phrase exprime une idée totalement fausse ! Pour s'en convaincre il suffit par exemple de faire quelques calculs avec $x = 0{,}01$.

Il est vrai que $(1{,}01)^2$ est voisin de 1,02, mais il est faux que $(1{,}01)^{100}$ soit voisin de 2 ; ce nombre est plutôt voisin de 2,718 ; comme on peut d'ailleurs le justifier, en montrant que $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Le physicien sait bien cela, lui qui préfère dire

"$(1 + x)^n$ est voisin de $1 + nx$ dès lors que nx est petit".

Mais l'élève mathématicien reste très frustré de voir un modèle, souvent efficace (celui dans lequel la "tendance vers zéro" traduit la "petitesse"), devenir apparemment non valide.

Dans la pratique, cette circonstance est d'autant plus ennuyeuse que l'unité de temps ayant été choisie petite, on s'intéresse naturellement à d'importantes valeurs de n . D'ailleurs, Euler et les mathématiciens de son temps savait parfaitement que, pour a "infiniment" petit, tout nombre (fini) peut s'écrire $(1+a)^n$, avec n infiniment grand (voir [8]).

La difficulté ici rencontrée est à l'origine de l'obstacle dressé par la croyance à la "détermination" de la forme 1^∞ qui est vue comme "valant" 1. Plus généralement, elle est certainement dûe à la confusion spontanée entre **nombre** et **fonction** (c'est d'ailleurs la possibilité de cette écriture de tout réel sous une forme soi disant indéterminée qui lui a fait comprendre que le logarithme était une fonction "multiforme" prenant une infinité de valeurs puisqu'on pouvait l'écrire comme une certaine racine n ième pour n très grand, à savoir époustouflamment : $\ln(x) = n\sqrt[n]{x} - n$!)

Nombre ou fonction ?

Cette confusion s'est longtemps traduite (et se traduit encore) dans le vocabulaire par l'emploi de mots pouvant prendre l'une ou l'autre acception, par exemple, le mot "quantité" (ou encore le mot "variable" dont l'emploi, qui favorise cette confusion, me paraît d'ailleurs catastrophique. Mais ceci est une autre histoire...).

Ainsi, trouve-t-on, dans l'Analyse des infiniments petits (L'Hospital - 1696) la demande suivante :

> "*On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même.* "

La demande est en fait double, la première partie de cette demande pourrait se noter aujourd'hui avec le signe $\approx$:

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y \approx 0$$

(x est très proche de y, si x-y est très petit).

Mais cette demande ne suffirait pas à conclure dans les démonstrations où L'Hospital ne prend pas x + dx pour x, ni pour x + 2dx, ce que sa demande lui permettrait, mais où il néglige dxdy, non pas parce que la différence (xdy + ydx + dxdy moins xdy + ydx) est très petite, mais parce que dxdy, divisé par dx, est très petit alors que ydx, divisé par dx, ne l'est pas.

C'est en fait la deuxième partie de la demande qui est utile dans les démonstrations (et qui n'est donc pas comme il le prétend *la même chose* que la première partie) :

$\frac{\varepsilon}{x}$ est très petit $\Leftrightarrow \frac{x+\varepsilon}{x} = 1 + \frac{\varepsilon}{x} \approx 1$; ce que l'on peut noter $x \sim x + \varepsilon$ (voir [9]).

Il y a donc ici deux choses très différentes : "être équivalents" et être "très proches".

Il est bien connu, aujourd'hui, que l'équivalence et l'infinie proximité ne sont pas "la même chose" et on sait le dire avec des fonctions :

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - g(x)] = 0 \ \text{(infinie proximité)}$$

n'est pas du tout pareil que

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) / g(x)] = 1 \ \text{(équivalence)}$$

La présentation non standard sépare ces notions en travaillant simplement sur des nombres au lieu de compliquer les situations par l'étude de limite de fonctions.

Il est en effet facile, lorsque les nombres très grands et très petits existent, d'exhiber des exemples comme ceux-ci :

– Si N est très grand, N + 1 et N ne sont pas très proches mais sont équivalents.
– Si ε est très petit, ε et 2ε sont très proches mais ne sont pas équivalents.
– Si x et y ne sont ni très grands, ni très petits, alors
$x \approx y$ équivaut à $x \sim y$

C'est cette dernière propriété qui peut excuser (s'il le fallait) la "confusion" affirmée dans la demande de L'Hospital. Dans le contexte qui est le sien, en effet, les nombres très petits n'existent pas vraiment ; il a donc, en un certain sens, raison d'affirmer que ces deux demandes sont la même chose à partir du moment où elles ne portent que sur des *quantités*, c'est-à-dire, pour lui, sur des *valeurs appréciables*.

La morale de ces histoires est que nous devrions aujourd'hui porter plus d'attention à la manipulation de symboles comme $\sim$, ou $\approx$; la distinction que nous proposons entre eux ne trouve évidemment son sens (pour les nombres) que dans l'analyse non standard. Mais elle est importante et pratique car elle permet de gérer avec cohérence la compatibilité des "approximations" avec les opérations.

Malheureusement, il existe une facheuse tendance (des professeurs comme des élèves) à traiter parfois ces relations comme des égalités sans en expliciter les (importantes) différences.

Par exemple, on peut sûrement prétendre que $\pi \approx 3{,}141$ et $\pi \approx 3{,}142$; et il n'est pas idiot de penser que l'écriture de ces deux relations suppose la validité pratique, dans le même contexte, de celle ci : $0{,}001 \approx 0{,}002$.

Mais il serait catastrophique d'accepter la multiplication des deux nombres par 1000.

La distinction entre $\approx$ et $\sim$, est, ici comme ailleurs, fondamentale, car si l'une est plutôt compatible avec la multiplication, l'autre l'est plutôt avec l'addition et il vaut mieux avoir les mots pour le dire.

LES ÉTUDES LOCALES AVEC DEUX VARIABLES SIMULTANÉES

Comme on l'a déjà vu plus haut, le modèle mathématique classique traite généralement assez mal, sinon pas du tout, les situations où deux variables indépendantes se rapprochent chacune de valeurs données.

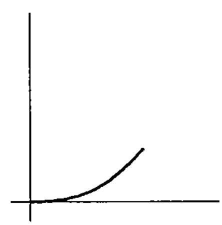


Figure 1

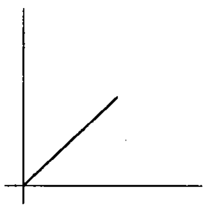
Intéressons nous, par exemple, au comportement de la fonction définie par $p(x) = x^a$ pour a proche de 1 (avec $a > 1$) et x proche de 0 (avec $x > 0$) ; il s'agit précisément d'étudier la valeur de $\frac{p(x)}{x}$ pour avoir une idée du graphe de p au voisinage de l'origine dans ces conditions.

Une étude naïvement rapide pourrait conclure que, puisque $p'(0) = 0$, la courbe reste, au voisinage de 0, proche de sa tangente à l'origine et que le graphe ressemble donc au dessin de la figure 1.

Mais, puisque a est voisin de 1, le graphe est par ailleurs proche de la première bissectrice (dessin de la figure 2), y compris au voisinage de l'origine.

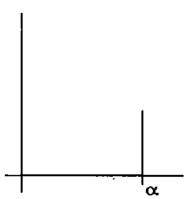
Le paradoxe apparent pourrait se dresser en obstacle (voir [OB]), et c'est ce qu'il fait dans une théorie (classique) où la notion **d'ordre de grandeur** n'est pas modélisée (voir plus loin : la forme des objets).

Figure 2



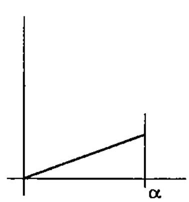
Cependant la vision classique et standard donne du graphe une certaine idée qui voudrait le faire ressembler à ceci :

Figure 3



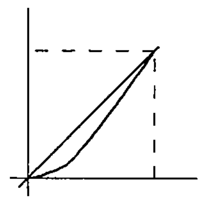
le graphe "part" horizontalement (fig. 3), puis lève un peu le nez (fig. 4), pour suivre ensuite la première bissectrice (fig. 5).

Figure 4



Or les expériences numériques montrent l'impossibilité de "photographier" le moment où il lève le nez. En effet le tracé (et on peut le vérifier avec une machine) du graphe sur [O,α] , pour α petit, est toujours un segment :

Figure 5



– Si α^a est trop petit pour être vu (étant donné les unités choisies), le graphe est un segment horizontal, morceau de tangente à l'origine.

– Si α^a est assez grand pour être "vu" (c'est-à dire est appréciable), le graphe est alors un segment oblique, de pente appréciable α^{a-1}.

Les deux modèles

Le modèle mathématique classique consiste à traduire " a proche de 1" par "a tend vers 1" et "x proche de 0" par "x tend vers 0". Ce modèle ne dit rien sur la valeur éventuelle de ce qui pourrait se noter

$$\lim_{\substack{x\to0^+ \\ a\to1^+}} x^{a-1} .$$

Que le modèle ne dise rien n'est pas forcément grave. Mais ce qui est plus grave, c'est que le modèle classique amène à se poser des questions curieuses, simples artefacts de l'utilisation de la théorie ; il propose en effet de lever l'indétermination (dite de la forme 0^0 si les variables a et x étaient fonctionnellement liées) en indiquant que

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{a\to 1^+}\frac{p(x)}{x} = 1 \text{ alors que } \lim_{a\to 1^+}\lim_{x\to 0^+}\frac{p(x)}{x} = 0,$$

et incite à se préoccuper de la préséance d'une variable sur l'autre : est-ce x ou a qui tend le premier vers sa limite ?

Or cette question n'a, dans la pratique, aucune signification.

Le modèle non standard, lui, permet de *démontrer* les résultats illustrés par les deux figures ci-dessus.

En fait, la première de ces figures ne pose aucun problème d'interprétation (ni avec le modèle classique, ni avec le modèle non standard) étant donné la dérivée à l'origine et la monotonie de la fonction. C'est la deuxième figure qui est intéressante. Voici la démonstration non standard qui explique l'obliquité constatée du segment représentatif :

"L'intervalle d'étude $[0,\alpha]$ est tel que α est très petit. Le graphe de p est donc tracé après une homothétie, de centre l'origine, transformant en un appréciable, par exemple l'homothétie de rapport $\frac{1}{\alpha}$. Faisons jouer cette homothétie :

Posons $X = \frac{1}{\alpha}x$ et $Y = \frac{1}{\alpha}y$, on a

$$Y = P(X) = \frac{1}{\alpha}(\alpha X)^a = \alpha^{a-1}X^a = \alpha^{a-1}(X^{a-1})X .$$

Alors, sur tout l'intervalle $x \in [0,\alpha]$, c'est-à-dire $0 < X < 1$, la différence entre P et la fonction linéaire égale à $\alpha^{a-1}X$ est très petite. En effet, elle vaut $\alpha^{a-1}(X^{a-1}-1)X$, dans lequel le premier facteur est appréciable, le deuxième est très proche de 0, et le troisième inférieur à 1 ; cette différence est donc très proche de 0. Le graphe de P est donc bien très proche d'un segment de droite."

On a bien ainsi démontré que, pour aucune échelle de représentation, on ne voit la courbe partir tangentiellement de l'origine, puis lever le nez ; la représentation graphique est un segment de droite (non horizontal dès que le graphique présente un intérêt pratique).

Il ne semble pas que le modèle classique puisse correctement traduire et démontrer cette "propriété" qui a été constatée expérimentalement...

Le concept d'ombre

L'exemple de la fonction $q_n(x) = n^3x^n(1-x)$ étudiée sur $[0,1]$ relève lui aussi des pathologies rencontrées pour cause de non uniformité.

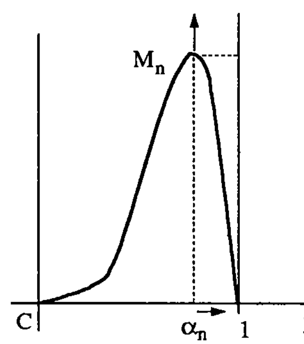


Figure 6

C'est en effet une fonction qui admet pour limite, quand n tend vers l'infini, la fonction nulle sur $[0,1]$. Et pourtant son intégrale de 0 à 1 (c'est-à-dire la mesure de l'aire comprise entre son graphe et l'axe des abscisses) tend vers l'infini. Le graphe de la fonction semble s'écraser sur l'axe des abscisses tout en laissant, entre lui-même et cet axe, la place pour une aire infinie.

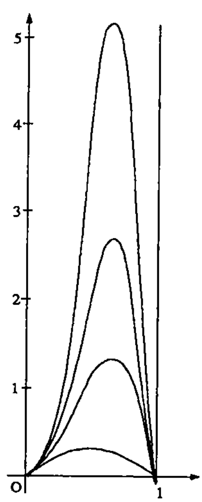
Le paradoxe n'est pas bien méchant puisqu'on peut, assez facilement, expliquer le phénomène :

La fonction présente un maximum dont l'abscisse tend vers 1 quand n tend vers l'infini mais dont l'ordonnée tend vers l'infini.

En une abscisse donnée x_0, même très proche de 1, la fonction "finit" toujours par devenir plus petite que tout nombre donné à l'avance ; il suffit d'attendre un n pour lequel l'abscisse du maximum a dépassé x_0.

La fonction tend bien vers la fonction nulle ; cependant, à y regarder de plus près, on a envie de dire que son graphe ne "tend" pas vers le segment [0,1] mais plutôt vers l'espèce d'equerre dessinée ici (fig. 7)

Figure 7



Il n'est donc pas étonnant que d'une part la fonction prenne, pour tout x entre 0 et 1, des valeurs petites pour n grand, mais que d'autre part, la surface enfermée par son graphe soit très grande dans la mesure où il "tend" vers une figure de grandeur infinie.

Pour absorber l'obstacle, on pourrait donc être tenté de dire :

"Le graphe de la limite d'une suite de fonctions n'est pas forcément *la limite* des graphes de cette suite de fonctions".

L'idée est juste mais, malheureusement, le modèle mathématique classique ne donne aucun sens (simple) à cette phrase. En effet parler de *la limite d'une partie de* $\mathbb{R}^2$ (serait-ce un graphe) nécessite la définition d'une topologie dans $P(\mathbb{R}^2)$, (Attention *dans les parties* de $\mathbb{R}^2$, pas *dans* $\mathbb{R}^2$). Cela n'est pas impossible mais cela n'est pas vraiment facile ; de plus les topologies possibles sont assez différentes les unes des autres sans qu'aucune soit très naturelle (voir [TO]).

Encore une fois le modèle non standard permet, lui, de traduire par une définition (presque simple) ce que pourrait être la limite d'une figure F_n quand n tend vers l'infini. En fait le vocabulaire non standard parle de l'*ombre* de F_n pour n grand. (Précisément, cette ombre est l'ensemble standard dont les points standards sont exactement ceux qui sont très proches d'un point de F_n).

Ce concept d'**ombre** semble être mieux reconnaissable (parce que plus géométrique ?) que le concept supposé de **limite** qui ne le distinguait pas de celui d'**ordre de grandeur**. Il permet en tout cas de bien traduire les phénomènes qui apparaissent dans de nombreuses situations pratiques.

Par exemple, l'équerre précédente est aussi l'ombre du monôme $x \to x^n$ pour n grand.

On comprend assez bien alors qu'il y ait, au voisinage de $x = 1$, des points d'ordonnées proches de 0 (comme celui d'abscisse $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$), proches de 1/e (comme celui d'abscisse $1 - \frac{1}{n}$), proches de 1 (comme celui d'abscisse $1 - \frac{1}{n^2}$), proches de e (comme celui d'abscisse $1 + \frac{1}{n}$), ou proches de $+\infty$ (comme celui d'abscisse $1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$).

Et par exemple, pour n grand, on comprend que x^n est beaucoup plus grand que e^x pour des valeurs appréciables de x, ce qui est *pratiquement* beaucoup plus utile que le fait de savoir que, pour x grand, x^n est négligeable devant e^x (le tracé sur un même graphique de x^4 et de e^x est très instructif à ce sujet, même et surtout dans un cadre classique...).

La "forme" des objets

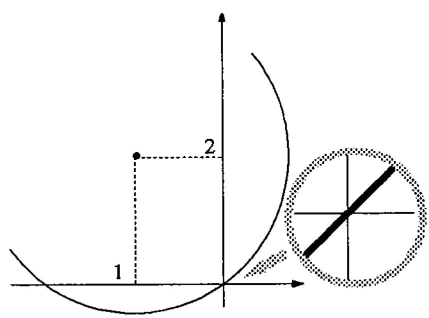
Avec les exemples précédents, on a vu apparaître une bien intéressante "catégorie" ; celle de **forme** : tel objet a-t-il la "forme" d'une droite horizontale, d'une équerre, d'un plan incliné, d'une courbe ?

Car l'expérience montre très vite que la "forme" d'un objet dépend de l'ordre de grandeur auquel on regarde.

Même les objets les plus simples changent ainsi de "forme".

Par exemple, le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ passe par l'origine, où il présente une certaine "courbure". Faisons l'homothétie de centre O, de rapport k : $X = kx \quad Y = ky$. L'équation du cercle devient $\frac{x^2+y^2}{k} + 2X - 4Y = 0$ et donc $2X - 4Y \approx 0$ lorsque k est très grand...

On a ainsi *démontré* qu'un morceau de cercle, vu à la loupe, a la forme d'une droite.



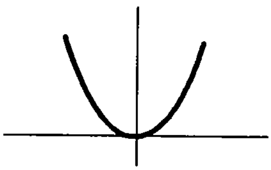
Les "mêmes" homothéties, appliquées à la parabole d'équation $y = x^2$ montrent que le graphe de cette parabole peut être dessiné selon les cas comme...

...une demi droite verticale

$X^2 = kY$,

pour k très petit

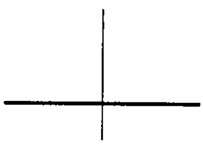
...une "courbe"



pour k appréciable

$$\frac{1}{k}X^2 = Y,$$

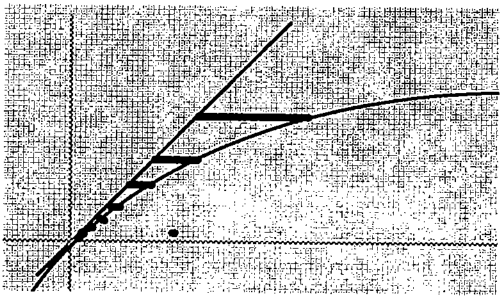
...une droite horizontale



$$Y=\frac{X^2}{k}$$

pour k très grand

Il n'y a pas beaucoup d'objets qui ne changent pas de forme lorsqu'on les regarde au microscope (de très près, grâce à une homothétie de rapport très grand) ou au macroscope (de très loin, grâce à une homothétie de rapport très petit).



En fait, deux classes d'objets présentent cette particularité fondamentale :

– les uns sont assez compliqués ; ce sont les *objets fractals* et leur succès médiatique témoignent de l'intérêt qu'on leur porte dans le contexte mathématique d'aujourd'hui ;

– les autres sont très simples : ce sont les *droites*. Leur importance est essentielle car, on le sait, de très nombreux objets prennent la "forme" d'une droite dès que l'on quitte l'ordre de grandeur des appréciables, soit que l'on s'intéresse à leur comportement asymptotique (très loin) ou au voisinage d'un point (très près) ; ce sont justement ces derniers que l'on qualifie de "différentiables".

Cependant, il y a plus, et le jeu des ordres de grandeur est plus surprenant que ne le laissent supposer les exemples élémentaires. Par exemple, ce qui est vu comme un segment de droite à l'échelle des appréciables peut n'être constitué que de morceaux verticaux à l'échelle du très petit (les graveurs qui ne savent tracer avec leurs outils que des petits traits, le savent bien) :

Autre exemple plus mathématique :

L'ensemble des segments horizontaux, graphe de

$$y = 1 / (1 + \mathrm{int}(1/x)),$$

est "vu", très près de l'origine, comme la première bissectrice.

Le type de discours précédent peut certainement se tenir en analyse classique comme en analyse non standard. Mais les raisonnements qui justifient ce discours sont bien plus élémentaires dans le modèle non standard. Ainsi là où l'analyse non standard dit par exemple "soit une homothétie de rapport très grand", l'analyse classique, dans ses démonstrations, se voit obligée d'introduire une famille d'homothéties dont le rapport tend vers l'infini.

La simplification de l'outil permet évidemment de mieux faire porter l'effort de compréhension sur l'essentiel ; mais le remplacement, à ce niveau, de l'idée de *limite* et d'*infini* par celle d'*ordre de grandeur* semble aller plus loin qu'un simple échange d'outil : car il y a, en effet, coexistence cohérente d'outils de représentation et traitement, d'illustrations et d'invariants formels. De sorte que l'on peut voir ici un véritable *concept*. : nous retrouverons ici l'idée que le "concept" de *limite* se "casserait" en deux concepts distincts : celui d' *ordre de grandeur* et celui d'*ombre*.

En tout cas, l'habitude de manipuler les ordres de grandeur, et l'existence d'une théorie non contradictoire qui les assume, élimine l'impression de paradoxe apparaissant lors des changements de forme, et évite l'apparition d'obstacle du type de l'exemple donné ci-dessus : comment croire, en effet, qu'un graphe constitué de segments tous horizontaux puisse avoir une tangente inclinée à 45º...? Comment comprendre, aussi, les fantastiques changements de forme constaté sur le graphe de $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, illustré en annexe I ?

Pourquoi, comme l'expérience quotidienne le prouve pourtant, la plupart des choses changent radicalement de forme lorsqu'on change d'ordre de grandeur, et cela, sans que l'on puisse observer "continûment" le passage de l'une à l'autre ? (Sur cette interrogation, voir dans [8] la discussion d'un paradoxe étudié par Galilée).

Tout se passe comme si, à la lisière des ordres de grandeur, il existait une zone inaccessible à nos regards et à nos instruments. Or cette zone est non seulement postulée mais constitutive du modèle non standard (voir [9] dernier chapitre "*Teaching with infinitesimals*"). La manipulation de ce modèle non standard et des phénomènes associés à cette zone, sans jamais rencontrer de contradictions, nous familiarise à son existence nécessaire ; en précisant et en confortant les images mentales associées aux ordres de grandeur, elle nous fait "absorber" l'obstacle du changement de forme. Alors que la vision classique homogène de $\mathbb{R}$ (associée à l'intuition de continuité) ne donne pas à l'esprit les images adéquates pour la résolution de ce paradoxe.

Pis, ce paradoxe, que semble être l'inexistence d'un nombre venant boucher le trou entre les nombres très petits et ceux qui ne le sont pas, s'érige en obstacle quasiment insurmontable pour des analystes classiques. Car cet obstacle est un des plus grands qui soient puisque, d'après Bachelard [OB], il est d'autant plus insurmontable que la connaissance qui le fabrique est la plus efficace et la mieux établie qui soit.

En effet, avant Dedekind, personne n'était véritablement capable de dire ce qu'était un NOMBRE, c'est à dire l'objet qui (avec la FORME) est le plus constitutif des mathématiques. C'est pourquoi, lorsque Dedekind nous apprend, avec modestie mais enthousiasme que :

"Si tous les nombres sont répartis en deux classes, telles que tout nombre de la première classe est plus petit que tout nombre de la deuxième classe, alors il existe un et un seul nombre qui opère cette partition de tous les nombres en deux classes, cette coupure du système des nombres en deux portions... j'ai longtemps réfléchi sur l'essence de la continuité mais, finalement, j'ai trouvé ce que je cherchais, même si la plupart des gens en trouveront le contenu bien trivial..." (*Continuité et nombres irrationnels*, 1872).

nous sommes à la fois comblés et émerveillés. Il n'est pas très étonnant, alors, que nous refusions de mettre en question cette conception qui semble en contradiction avec cette nouvelle théorie qui, cent ans plus tard, se voudrait à la fois plus générale et plus pragmatique.

EN CONCLUSION

Nous avons voulu essayer d'apporter quelques arguments pour que les professeurs d'analyse classique veuillent bien apprendre sérieusement l'analyse non standard.

Outre que cet apprentissage ne présente plus aujourd'hui de réelles difficultés (voir [6] ou [11], par exemple), il s'avère nécessaire pour comprendre à la fois l'histoire de l'analyse depuis quatre siècles et l'articulation des concepts, dans ce domaine si difficile à enseigner dans sa formulation classique.

Car l'**analyse des fonctions**, qui oblige à la dialectique des quantificateurs à cause du caractère particulier de ces objets (un unique élément sur chaque fibre d'un produit), est beaucoup moins simple (à tout point de vue) que l'**analyse des nombres**, laquelle peut se réduire aux énoncés décrivant les **compatibilités entre les opérations** et les **ordres de grandeur** : mais elle est aussi beaucoup moins proche de l'intuition immédiate que l'**analyse des objets géométriques**, complexe à formuler dans un cadre classique mais riche du point de vue des représentations.

Il se trouve que l'ANS propose un modèle fidèle et facile de l'analyse des nombres (règles de Leibniz) ainsi qu'un début de modélisation bien pratique pour celle des objets géométriques (l'ombre).

Ayant observé et conclu provisoirement à l'impossibilité d'introduire ce modèle dans notre enseignement des lycées, nous mettons notre espoir dans la formation des enseignants à cette nouvelle connaissance ; elle pourrait permettre l'émergence de quelques ingénieries didactiques qui pourraient s'appuyer sur une familiarisation des élèves à une ANALYSE aux difficultés hiérarchisées, en introduisant successivement :

– une ANALYSE DES NOMBRES, qui pourrait commencer au collège ;
– une ANALYSE DES OBJETS GÉOMETRIQUES, comme on la voit apparaître parfois au début du lycée (mais avec quels invariants formels sous-jacents ?) ;
– une ANALYSE DES FONCTIONS qui s'exposerait dans le cadre classique en s'appuyant sur les apprivoisements précédents et les représentations mentales préalablement baties sur des concepts plus élémentaires.

Au travail, donc !

Références

(1) REEB G. : 1981, *Mathématiques non standard (essai de vulgarisation)*, Bulletin APMEP n° 328, Paris.

(2) DELEDICQ A. et DIENER M. : 1989, *Leçons de calcul infinitésimal*, Ed. Colin.

(3) LOBRY : 1990, *Et pourtant ils ne remplissent pas* , Lyon.

(4) DELEDICQ A., DIENER M. *et alii* : 1992, *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal,* IREM, Université de Paris 7.

(5) DELEDICQ A. : 1992, "De l'analyse non standard au calcul infinitésimal", *in L'enseignement de l'analyse aux débutants*, ed. Erasme, Louvain la Neuve, pages 55, 86.

(6) LUTZ R. et MAKLOUF A. : 1993, *Les bases théoriques sur lesquelles l'enseignement de l'analyse au lycée pourrient être fondées,* Faculté de sciences et techniques, Mulhouse.

(7) DELEDICQ A. : 1994, "Conceptions relatives aux limites", *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, édition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 321-327.

(8) DELEDICQ A. : 1994, Relectures infinitésimales, *Histoire d'infini*, IREM de Brest, pp. 333-350.

(9) DIENER *et alii* : 1995, *Non standard Analysis in practice*, Springer, Berlin.

(10) DELEDICQ A. : 1996, *Analyse Non Standard et représentation graphique*, Compte-rendu de la rencontre CIAEM - IREM de Toulouse.

(11) DELEDICQ A. et GAUTHERON V. : 1996, *Apprentissage de l'Analyse Non Standard,* Ellipses.

(OB) Pour la notion d'*obstacle* , on consultera :

BACHELARD G. - 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, VRIN.

BROUSSEAU G. : 1988, "Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques", *in Construction des savoirs, obstacles et conflits,* Montréa, CIRADE, pp. 41-63.

(CO) Pour ce qui concerne les *concepts* , on consultera :

VERGNAUD G. : 1985, "Concepts et schèmes dans une théorie opérationnelle de la représentation", *Psychologie Française,* n° 30.

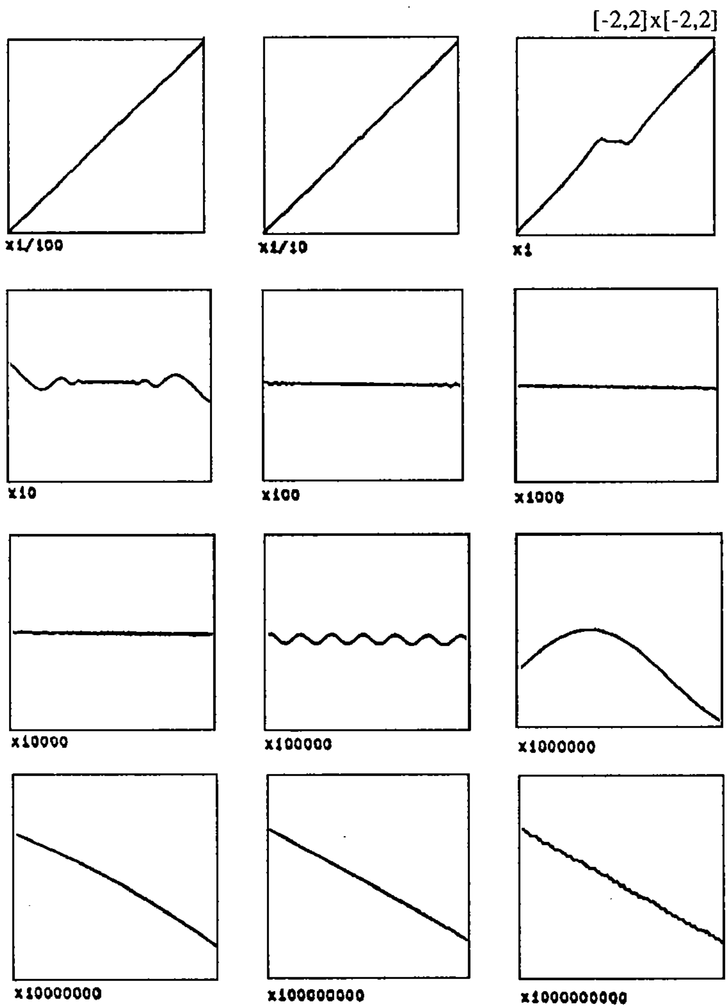
VERGNAUD G. : 1991, "Théories des champs conceptuels", *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 10/2.3.

(TO) Pour ce qui concerne les topologies sur l'ensemble des parties d'un espace topologique, citons Tewfic S. : 1995, chapitre "Topologie" de *Infinitésimal calculus and Non Standard Analysis,* Springer-Verlag, où l'on trouvera une bibliographie détaillée sur le sujet :

"De nombreuses topologies ont été définies sur l'ensemble des parties d'un espace topologique de façon très desordonnée comme on peut le constater en remarquant

que la *topologie semi-finie inférieurement* de (iv) est appelée *topologie* dans (iii) et *topologie locale* dans (ii), que la *topologie semi-finie supérieurement* de (iv) est appelée *K-topologie* dans (v), que la *topologie globale* de (ii) a été proposée longtemps auparavant par Choquet (i) dans le même but, a savoir la topologisation de la notion de *convergence de famille d'ensembles.* La raison principale de cette situation peu courante en mathématiques est que chaque auteur a défini sa topologie en en décrivant une base, voire une sous-base et qu'il ne s'est pas aperçu que les topologies des autres auteurs, qu'il cite bien souvent, étaient identiques à la sienne bien qu'elles étaient décrites différemment."
La définition non standard d'une topologie (standard) permet de mieux comprendre l'imbrication de ces topologies sur les ensembles de parties d'un ensemble; ainsi, par exemple, la *topologie dite de Viétoris* se définit comme l'intersection des topologies semi-finie inférieurement et semi-finie supérieurement de Michael, par "deux parties A et B sont très voisines *si* B est dans le halo de A et A est dans l'intérieur de B".

ANNEXE 1



Quelques tracés du graphe de $x^2 \sin \frac{1}{x}$ centrés sur le point $\left(\frac{1}{1000}, \frac{\sin 1000}{1000000}\right)$

ANNEXE 2
Le modèle non-standard de ℝ en cinq notes

Aujourd'hui, il existe deux modèles mathématiques permettant de travailler dans le champ des nombres pour y faire de l'*analyse.*

– Dans le premier de ces modèles, dit *standard,* ℝ est partout homogène, on ne sait pas parler de nombre réel "petit" et on se sait pas non plus définir, par exemple, les nombres "voisins" de π, d'une manière non arbitraire et satisfaisant le "bon sens".

– Dans le second de ces modèles, dit *non standard,* les nombres réels positifs sont partagés en trois classes : les "petits", les "appréciables" et les "grands".

– Ces deux modèles ne sont ni concurrents, ni incompatibles !

Précisément, le modèle non standard contient le modèle standard : il a un vocabulaire plus riche.
C'est simple : on reconnaît que l'on travaille dans le modèle non-standard dès que l'on trouve les adjectifs "petits", "grands", "proches", "négligeables", associé à des nombres (adjectifs qui n'ont aucun sens dans le modèle standard).

On a résumé en cinq courtes notes les propriétés servant de base à l'analyse non-standard.

DO - La Différenciation des Ordres de grandeur :

– Il y a des nombres mesurant des choses "petites", des nombres mesurant des choses "grandes" et des nombres mesurant des choses ni petites ni grandes (appelées "appréciables").

(DO) affirme l'existence de trois classes de réels auxquels on peut penser comme des "infiniment petits", des nombres appréciables et des "infiniment grands" (mais il faut rester conscient que l'infini n'a rien à voir dans cette affaire).

Dans ℕ, il existe alors deux classes d'entiers : les "grands" et les "standard".

RE - La Répétition (en grand nombre) des Etapes (petites) :

– Pour changer d'ordre de grandeur par étapes petites, il faut un nombre d'étapes grand.

(RE) équivaut à l'affirmation plus formelle :

Si *e* est petit et *ne* non petit, alors c'est que *n* est grand.

Cette propriété est liée à deux énoncés classiques fondamentaux :

– l'axiome d'Archimède, affirmant que, pour tout e (éventuellement petit) et tout a (éventuellement non petit), il existe un n tel que $ne > a$.

– le principe de Récurrence que l'existence d'ordres de grandeurs oblige à modifier très légèrement en un principe de "récurrence pragmatique" :
"Si une propriété est vraie pour 0, et si, supposée vraie pour (n), elle est démontrée vraie pour (n + 1), alors cette propriété est vraie pour tous les entiers non grands".

(Les deux derniers mots n'ont pas lieu

d'être dans la théorie classique ; il sont importants dans la théorie non-standard. Car si on se contentait de l'énoncé classique, on pourrait dire ceci : si *e* est non-grand, alors, si *ne* est non-grand, *(n+1)e* est aussi non-grand, et donc tout nombre serait aussi non-grand : on ne pourrait pas changer d'ordre de grandeur !)

MI - Le Mécanisme des Inverses :

– Si x est petit non nul, alors $\frac{1}{x}$ est grand (et réciproquement !)

(MI) est la "règle de Leibniz" qui affirme l'existence de "petits" dans $\mathbb{R}$ dès qu'on postule l'existence de "grands" dans $\mathbb{N}$ dépassant les entiers standard (qui, comme d'autres l'on dit, "ne remplissent pas $\mathbb{N}$" – voir [2].

FA - Les Frontières Absentes :

– Il n'existe pas de "frontière" définissable entre les petits et les non-petits, entre les non-grands et les grands, ...

Certains débutants en analyse non-standard, souvent déjà "forts" en analyse classique, ressentent cet énoncé comme un véritable obstacle. Il en est d'ailleurs de même pour l'énoncé du "principe de recurrence pragmatique". Pour le franchissement de ces obstacles, on pourra lire [3].

SOL - Le "sol algébrique" des propriétés de base sur lequel se fondent les calculs, est appelé, par nous, "Règles de Leibniz".

Ces règles algébriques (données par exemple dans [3], [4] et [8]) ne font que traduire les "intuitions" que l'on peut prétendre avoir dans la tête, comme

petit + petit = petit,

appréciable + grand = grand, ...

Dans quelques cas, le résultat d'une opération dépend des valeurs prises par ses termes et ne peut être donné en général lorsqu'on ne connait qu'un ordre de grandeur. Ainsi, (petit x grand) n'est pas mieux connu que le signe de la somme (positif + négatif)...