REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

TANGENTE À UNE COURBE ET DÉRIVATION

Approche " traditionnelle" en environnement informatique

Philippe MICHEL,
Lycée Couffignal Strasbourg

La classe de Première S où j'enseignais en 1994/95, disposait en plus de son horaire normal de mathématiques de deux heures par quinzaine d'atelier informatique, centré sur la résolution de problèmes avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Les activités proposées durant ces séances, étaient un complément du cours de mathématiques, soit pour introduire une notion, soit pour la mettre en oeuvre. L'objectif principal était d'apprendre à résoudre des problèmes dans un environnement où l'activité de l'élève serait essentiellement centrée sur la compréhension et le sens. Il part du constat suivant : lors d'activités complexes, de nombreux élèves sont handicapés par leur faiblesse en calcul, et de ce fait, n'aboutissent pas dans leur recherche, ne savent plus quel en est l'objet. Remédier à cette situation nécessite un apprentissage soutenu en calcul algébrique d'une part, et la mise en place d'activités où la partie calculatoire serait confiée à un tiers. Le but étant, bien sûr d'allier les deux et non de les opposer, mais à ce stade de la formation, il me semble utile de séparer les deux objectifs.

Le choix du logiciel DERIVE a été fait pour des raisons de matériel et aussi de rapidité d'apprentissage par les élèves.

Cette expérience alimentait aussi les travaux du groupe "Activités mathématiques en environnement informatique", créé en septembre 1994 dans le cadre de l'IREM de Strasbourg.

La dérivation apparaît comme le point central du cours d'analyse en Première S. Trop souvent, les élèves n'en retiennent que l'aspect utilitaire lors de l'étude du sens de variations des fonctions, oubliant ainsi l'aspect local de cette notion qui en est l'essence même.

Aborder la dérivation par le problème de la recherche de la tangente à une courbe prépare l'élève à l'étude locale des fonctions et des courbes, permettant ultérieurement une meilleure compréhension de résultats plus fins tels les développements limités, les fonctions implicites.... Aborder ce problème et, qui plus est, le faire aborder par les élèves rencontre un certain nombre de difficultés. L'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ comprend deux paramètres et une fonction, ce qui est beaucoup pour des élèves qui ont encore besoin de clarification quant aux notions de variables, de constantes et de fonctions. En général, les meilleurs d'entre eux arrivent à simplifier ce genre d'expressions, à passer à la limite, mais l'aspect technique et calculatoire reste dominant pour ces bons élèves et insurmontable pour les autres.

Il est aussi nécessaire pour permettre un apprentissage de l'analyse de mettre en place des activités autour des notions de variable et de fonctions.

L'idée de tangente évoque principalement à un élève arrivant en Première S, celle de la tangente au cercle. Il en découle naturellement que *la tangente à une courbe est une droite coupant la courbe en un point unique*. Partant de cette définition inexacte, ma démarche va consister à faire évoluer cette première approche vers une définition plus rigoureuse nécessitant des outils mathématiques nouveaux : la limite en un point et surtout la dérivée.

Les élèves découvriront ainsi l'importance d'une définition rigoureuse et précise pour tout objet mathématique (et aussi qu'il est indispensable de la connaître, donc de l'apprendre !).

Cette démarche d'apprentissage, étalée d'octobre à mars, est articulée autour de quatre séquences liées directement aux contenus du cours de mathématiques.

1. tangentes à une parabole

En cours, les élèves viennent de terminer l'étude du second degré.

Cette séquence permet d'utiliser les nouveaux acquis des élèves sur le second degré, de faire la liaison graphique-calcul algébrique. La première partie traite d'un exemple de recherche d'intersection d'une famille de droites passant par un point de la parabole. Dans la suite intervient le mot tangente. Ce mot n'a pas encore été défini. Ceci me permettra de faire émerger les représentations préalables des élèves par rapport à cette notion. Il en découle une définition de la tangente, limitée au cas des paraboles d'équation : $y = ax2 + bx + c$.

Texte donné aux élèves

Séquence 1 : tangentes à une parabole

1. P est la parabole d'équation $y = x^2$. A est le point de P d'abscisse 3. D_a est une droite d'équation $y = ax + b$, passant par A.
   1) Quelle relation relie a et b ?
   2) Déterminer les coordonnées de l'intersection de D_a et de P.
   3) Faire tracer P, D_1, D_{-2},D_5.
   4) Pour quelle valeur de a, D_a ne coupe-t-elle P qu'en un seul point ?
   5) Faire alors tracer D_a.
2. Reprendre la même question avec le point B de coordonnées $(-1,1)$.
3. Considérons alors le point M de P de coordonnées (α,α^2) déterminer en fonction de α l'équation de la tangente à P au point M. Quel est son coefficient directeur ?
4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse α de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 5x - 1$

2. Recherche de tangentes à d'autres courbes

Au niveau du cours, nous travaillons la notion de limite d'une fonction.

La première partie montre, d'abord, qu'il faut préciser les choses : certaines droites coupent la courbe en un point unique sans être tangente et certaines tangentes coupent la courbe en deux points notamment pour le troisième degré.

La suite de l'activité induit l'idée de faire varier la sécante. La tangente n'est toujours pas définie. C'est le débat avec les élèves lorsqu'ils vont aborder cette question, qui permettra de donner la définition liée à la "droite limite". La deuxième partie permettra d'étudier divers exemples et surtout d'élaborer une méthode.

Texte donné aux élèves

Séquence 2 : étude locale des fonctions, tangente à une courbe.

Première partie

1. On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit A le point de coordonnées (1 ;1), D une droite d'équation $y = ax + b$.

1) Déterminer une condition sur a et b pour que A soit sur D.

2) Déterminer l'intersection de C et de D. Pour quelles valeurs de a est-elle réduite à A ?

3) On considère le point de C d'abscisse 1,001, noté $M_{1,001}$.

- Déterminer l'équation affine de la droite $(AM_{1,001})$
- Tracer C et cette droite en utilisant diverses échelles.

4) Reprendre la question 3 avec le point M_{1+h}.

Quelle est l'équation de la tangente à C passant par A.

2. Reprendre la question précédente pour un point A de coordonnées (t, t^3).

Deuxième Partie

1. En vous inspirant de la première partie, déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse t, à la courbe représentative des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

c) $h(x) = \sqrt{1+x}$.

2. Décrire avec précision, la démarche permettant de déterminer l'équation d'une tangente au point d'abscisse t, à la courbe représentative d'une fonction f.

Est-ce toujours possible ?

3. Dérivation des polynômes

La notion de nombre dérivé a été vue en cours. L'objectif de la séquence est de faire le lien entre un calcul purement formel (à une fonction f, j'associe une fonction f') , l'activité précédente et le cours qui vient d'être fait ; cela permettra de passer alors du *nombre dérivé* à la *fonction dérivée.* Ainsi le lien entre la question 1 et 2 est essentiel. Tout est dans la synthèse, car sinon la question 1 est vide de sens.

La question 3 n'est qu'un essai, me permettant de vérifier si une telle conjecture est possible pour mes élèves.

Texte donné aux élèves

Séquence 3 : Dérivée d'un polynôme

1. En utilisant la commande de dérivation du logiciel, déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes (pour une fonction f, on note sa fonction dérivée f') :

$f(x) = x^2 + 3x - 1$
$g(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 5$
$h(x) = x^5 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 2.$

A partir des résultats obtenus grâce au logiciel, déterminer sans l'aide du logiciel, les dérivées des fonctions suivantes :

$l(x) = 5x^2 + 6x - 1$
$m(x) = x^4 - x^3$
$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

Vérifier vos résultats à l'aide du logiciel.

Enoncer la règle de dérivation de la fonction q définie par $q(x) = x^n$, où n est un entier naturel non nul.

2. En reprenant les résultats de la séquence 2, déterminer pour chaque fonction ci-dessus le coefficient de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse t.

Conclure.

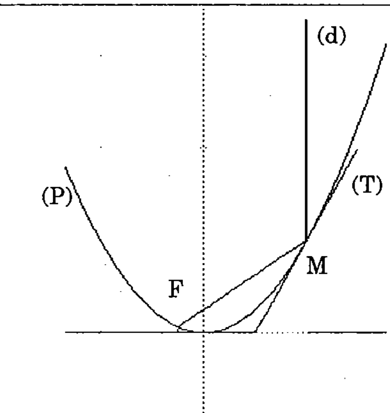
3. En faisant tracer la fonction et sa dérivée, quel lien semble-t-il y avoir entre la fonction et sa dérivée ?

4. Séquence 4 : Etude de la parabole

Cette étude de la parabole est une activité de synthèse nécessitant un réinvestissement des acquis par rapport au cours de mathématiques et par rapport à la pratique du logiciel. Elle illustre bien l'idée d'étude locale car dans la recherche d'applications concrètes à ce résultat intervient le fait que l'on confond localement la parabole et sa tangente. Il me semble important de donner aux élèves ce type d'activités où ils ont à reprendre les idées et les techniques acquises précédemment. Aucune indication quant aux choix méthodologiques n'est donnée.

Texte donné aux élèves

Séquence 4 : Parabole



On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$. M est le point de (P) d'abscisse t.

La tangente à (P) en M forme un angle α avec l'axe des abscisses.

(d) est la droite d'équation $x = t$. On considère la droite passant par M formant avec (T) un angle égal à celui formé par (T) et (d). Cette droite coupe pour t non nul l'axe des ordonnées en F.

1) Déterminer en fonction de α l'angle formé par (MF) et l'axe des abscisses.

2) Déterminer en fonction de t l'équation de la droite (MF).

3) Calculer les coordonnées de F. Que remarquez-vous ?

4) Enoncer le résultat sous forme de théorème. Trouver des applications concrètes de ce théorème.

Cette démarche est en elle-même, on ne peut plus traditionnelle. Mais j'ai souvent rencontré des difficultés lorsque je l'abordais en environnement "papier-crayon", car elle présente des difficultés techniques au niveau du calcul algébrique difficilement surmontables par des élèves moyens ou faibles, pour lesquels, alors, le calcul occulte les idées et la compréhension.

Organisation des séquences

Pour chaque séquence, les binômes d'élèves disposent d'une ou deux séances de deux heures. Ils travaillent le plus possible en autonomie. En début, lorsque cela s'avère nécessaire, je leur précise les fonctions du logiciel qu'ils n'ont pas encore utilisées. Ils ont obligation d'une trace écrite qui sera corrigée. La synthèse de chaque séquence se fait soit en cours, soit à la fin de l'activité. Les énoncés sont volontairement rédigés comme des problèmes ou exercices de mathématiques et de manière très brève avec un minimum de questions intermédiaires. En effet, l'objectif essentiel n'est pas d'apprendre toutes les subtilités d'un logiciel, mais bien d'utiliser celui-ci pour résoudre un problème de mathématiques et non d'une longue succession de sous-questions permettant à un élève n'ayant rien compris d'arriver au bout (ce qui est tout à fait possible avec l'aide d'un logiciel). Les questions peuvent être posées de manière très générale, mais l'activité commence par l'étude d'un exemple précis pour fixer les idées de manière concrète.

Les élèves sont amenés à calculer de nombreuses équations de droites. C'est pourquoi, ils ont élaborés un fichier dans *DERIVE*, de géométrie analytique leur permettant d'obtenir rapidement les résultats (équation d'une droite passant par deux points donnés, dont on connaît le coefficient directeur et un point, perpendiculaire à une droite donnée...)

Déroulement des séquences

Les élèves intègrent rapidement le fonctionnement général du logiciel. Plutôt que de mettre en place une séquence formelle d'apprentissage, je donne au début de chaque séquence les nouvelles fonctions et possibilités du logiciel qui seront utiles. L'apprentissage est ainsi progressif et débarrassé des exercices *a priori*, peu motivants et souvent sans intérêt. Ce sont les élèves les plus faibles en mathématiques qui par la suite font le plus d'erreurs de manipulations (mauvais choix dans les menus, fenêtre trop petite...). Dans la plupart des cas, il semble que cela soit dû à un manque de concentration, et aussi une certaine paresse consistant à tâtonner plutôt que de consulter ses notes ou la documentation.

Dans toutes les activités proposées, les élèves sont confrontés aux objets fondamentaux de l'analyse : les variables et les fonctions. Une des premières difficultés rencontrées se situe au niveau de la déclaration des fonctions par "F(x) := ...". Le logiciel distingue deux signes =, et oblige alors son utilisateur à déterminer le sens de sa phrase mathématique : "F(x) = 5" désigne-t-il la fonction constante ou l'équation ? Ce problème s'est souvent posé lors des diverses séquences et il est important que chaque élève comprenne qu'il ne s'agit pas d'une simple erreur de manipulation, mais d'une erreur de compréhension du problème posé.

Dans la première séquence, il faut déterminer plusieurs droites passant par un même point et par la suite les tracer. Toutes ces droites ont une équation affine dépendant exclusivement de leur coefficient directeur a. Il s'agit donc d'un problème comprenant un paramètre. Au niveau du logiciel, je leur propose alors d'utiliser une fonction de deux variables D(a,x). Dans les séquences suivantes, les élèves utiliseront naturellement des fonctions de deux, trois voire quatre variables étant entendu que pour eux une seule de ces variables varie ! Là aussi, le logiciel permet de privilégier le sens (en se posant la question : "Quelle est la variable du problème ?"). Ce travail avec deux variables a provoqué quelques incidents de manipulation au niveau des graphiques : D(a,x) devenait un plan. Ce type d'incidents est très riche. Non seulement, il permet de repréciser le sens de a et de x, mais encore d'évoquer des notions à venir. Cela fut bien évidemment aussi le cas lorsque le logiciel a résolu des équations du second degré.

La possibilité de visualiser sur le même écran calculs et graphiques est un des avantages du logiciel, surtout dans le cadre de l'apprentissage de l'étude locale des fonctions. Visualiser soi-même les sécantes à la courbe passant par un point fixe et approcher la tangente est plus parlant que tout dessin à la main. Ainsi on voit ce que l'on cherche. La possibilité d'agrandir la courbe autour d'un point précis donne une idée physique de l'étude locale. Cependant elle est source de nouvelles interrogations : Comment agrandir pour voir ? Quelle précision choisir pour avoir la certitude que la droite trouvée est effectivement tangente à la courbe ?

Lors de la deuxième séquence, les élèves devaient faire tracer la représentation graphique de la courbe d'équation $y = x^3$ et la droite ($AM_{1,001}$) et observer la configuration à diverses échelles. Certains affirment que cette droite pourrait être la tangente en voyant le premier graphique. D'autres les contredisent en s'appuyant sur l'étude de l'intersection de la courbe et de la droite. En agrandissant (même fortement), la configuration rien ne distingue la droite de la courbe. Ce qui m'amène à les interroger sur le pourquoi. un élève expliquera qu'il s'agit d'un problème de différence d'ordre de grandeur entre les abscisses et les ordonnées et que pour visualiser le phénomène, il faut choisir convenablement les échelles sur chaque axe. Cela me permet d'affirmer aux élèves que toute représentation graphique nécessite un travail préalable de prévision des phénomènes. Ce n'est d'ailleurs pas le moindre paradoxe que de constater que le graphique supposé être un outil pour expliquer, visualiser, persuader nécessite des études aussi approfondies. Cela me suggère de mettre en place un travail de fond, sur les représentations graphiques dans divers environnements.

Demeurait lors de cette deuxième séquence, le problème de la tangente. La question 4 de la première partie reposait la question.

– C'est la droite qui frôle la courbe.
– C'est quand $h = 0$.
– Ce n'est pas possible car quand $h = 0$ le point M_{1+h} est égal à A !
– Il faut que h tende vers 0.

La bonne idée était apparue. Un des élèves avait fait le lien avec son cours sur les limites. Les autres approuvèrent. Leurs comptes-rendus sur la deuxième partie de la séquence 2 révélèrent que ce passage à la limite, si consensuel en apparence, cachait des réalités bien différentes selon les élèves. Il faut savoir qu'à ce moment là, je ne leur avais pas encore signalé que le logiciel pouvait déterminer certaines limites. Voici une proposition de démarche par un élève :

"*Je fais déterminer l'équation affine de la droite passant par $A(t,f(t))$et $M(t+h,f(t+h))$*" (en utilisant le programme de géométrie analytique élaboré par les élèves).
Je fais simplifier cette équation et puis je remplace h par 0."

Sa méthode permet d'aboutir dans les cas simple où la simplification permet de lever l'indétermination, mais montre bien que pour cet élève, passer à la limite en 0, c'est remplacer par 0. Il avait d'ailleurs éprouvé des problèmes pour la fonction racine carrée. D'autres affirment qu'il faut déterminer des limites et donnent donc une méthode juste mais ont-ils compris pour autant ? C'est d'ailleurs le départ d'un travail à long terme.

Cet événement souligne un des dangers du travail en environnement informatique. L'efficacité du logiciel permet dans les cas simples d'obtenir facilement un résultat, ce qui est le plus important pour l'élève. Il convient, en introduisant des exemples de plus en plus complexes, de montrer que telle ou telle méthode est peut-être efficace dans certains cas, mais inopérante dans d'autres.

Aucun élève n'a soulevé le problème de l'existence des tangentes, ni celui des tangentes verticales dans le cadre de cette séquence. Je n'ai d'ailleurs pas obtenu de réponse à la toute dernière question. Ces points ont été abordés en cours.

Si les possibilités graphiques sont utiles pour conjecturer, il y a des limites : aucun élève n'a trouvé le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée à partir des représentations graphiques. Ce théorème, souvent présenté comme le plus important du programme de première, est loin d'être une évidence du fait du caractère local de l'outil (la dérivée) et du caractère global des propriétés à déterminer (le sens de variation d'une fonction). On peut, bien sûr, faire constater ce lien sur le dessin. Le logiciel, ici, m'aide dans ma tâche de "montreur" de mathématiques. Car il s'agit bien de montrer dans la troisième séquence. Le fait d'observer puis de conjecturer la dérivation des polynômes n'a qu'un aspect ludique si l'on ne fait pas le lien avec les études faites lors de la séquence 2. Il s'agit là d'une approche expérimentale cherchant à montrer comment on calcule la dérivées des polynômes et comment les formules utilisées par tous ont été établies.

La différence la plus marquée entre un travail mathématique en environnement informatique et "papier-crayon" se situe au niveau de l'attitude des élèves face à l'activité elle-même. Tous les élèves ont travaillé. L'attraction exercée par l'écran, la prise en charge par le logiciel des calculs, souvent difficiles pour eux, et l'obligation de production argumentée en fin de séquence en sont les causes les plus évidentes. J'ose espérer que l'intérêt pour les problèmes posés en fait aussi partie !

Mais surtout, cet environnement crée, dans la mesure où les problèmes posés sont suffisamment ouverts, un espace de liberté et d'autonomie. Liberté d'essayer, d'expérimenter, de s'organiser, de choisir sa méthode.

Lors de la première séquence, il faut déterminer le coefficient directeur a de la droite d'équation : $y = ax + 9 - 3a$, passant par le point (3,9) de la courbe représentant $y = x^2$, coupe cette parabole en ce point uniquement, ce qui revient à savoir pour quelle valeur de a, l'équation : $ax + 9 - 3a = x^2$ admet une solution double. Les élèves ont suivi deux pistes :

– déterminer la valeur de a qui annule le discriminant ; c'est ce qui est le plus fréquent.
– Faire résoudre par le logiciel l'équation de départ en x, puis celle d'inconnue a, pour laquelle les deux racines (dont l'une est 3) sont égales. Ici apparaît l'idée de point double qui peut être reprise pour d'autres courbes que les

paraboles. Cette deuxième méthode comporte une équation faisant figurer des racines carrées et peu d'élèves auraient persévéré à la main (même si ici c'est très simple).

Cette diversité des méthodes présente aussi des inconvénients. Un élève renonce semble -t-il difficilement à "sa" méthode même lorsqu'on lui en propose une plus performante. Certains ont continué à déterminer des limites de taux de variations pour la détermination du coefficient directeur d'une tangente bien après le cours sur la dérivation, ce qui ne pose pas de problème en environnement informatique, mais est plus délicat en environnement "papier-crayon".

La répartition des tâches entre l'élève et le logiciel a provoqué de nombreuses difficultés. C'est à ce moment que j'ai été sollicité et que je suis intervenu le plus fréquemment.

Au départ, les élèves pensent qu'il suffit de bien choisir sa fonction dans le menu et qu'il n'y a plus rien à faire. C'est au fur et à mesure que la nécessité d'une feuille et d'un crayon se fait sentir, quand par exemple il faut utiliser une expression conjuguée pour lever une indétermination, ce que le logiciel est incapable de faire. L'ordinateur ne va exécuter que des tâches subalternes. Celles-ci devront être parfaitement claires pour l'élève, afin de donner à la machine les instructions précises nécessaires à leur exécution. Cela permet d'égratigner quelques mythes comme celui de la machine intelligente et celui de la limitation des mathématiques au calcul. Pour bien faire sentir cela, il est nécessaire de proposer aux élèves des problèmes comportant des points où le logiciel n'est d'aucune utilité.

Conclusion : à l'issue des séquences

Durant ces séquences, les élèves ont défini des fonctions, fixé des paramètres, fait tendre une variable vers un nombre, remarqué qu'en même temps cela faisait se rapprocher une sécante d'une position limite, ils ont agrandi des courbes autour d'un point. Et surtout, ils se sont interrogés sur le sens de ce qu'ils faisaient et manipulaient.. La quatrième séquence a montré que la plupart des élèves avaient été capables de traiter l'ensemble des exercices en autonomie, d'utiliser le logiciel à bon escient et de développer des stratégies de résolution de problèmes. Confier les calculs à la machine leur a permis de progresser dans la compréhension de certains concepts. Cela me semble déjà une justification à poursuivre dans cette voie.

Pour eux $f(x)$ a un sens, une raison d'être. C'est un premier pas.

La démarche axée sur la découverte progressive d'une notion, découverte dont ils sont les acteurs, a modifiée la vision qu'ils avaient des mathématiques. Une idée "simple" *a priori comme celle de tangente évolue, pose des questions de plus en plus fines et difficiles. Ce premier passage à la limite est une étape importante dans leur formation mathématique. Je pense qu'il a été franchi par beaucoup. Mais c'est une idée qui se construit à long terme, souvent difficilement, c'est pourquoi, comme pour le petit enfant faisant ses premiers pas, il convient d'éviter les chutes, celles qui font mal, celles qui enlèvent l'envie de recommencer.*