
ITINÉRAIRE D'UN ENSEIGNANT ENTRE CONCRET ET ABSTRAIT

Etienne MEYER
Irem de Strasbourg

C'est d'un parcours dont je voudrais parler ici, d'un parcours qui suit l'évolution de ma conception de l'enseignement des mathématiques.

On y trouvera des considérations sur les mathématiques "appliquées", "abstraites", "concrètes", sur la notion de sens, de problématique, de dévolution.

On y trouvera aussi j'espère matière à création de questions mathématiques pour les élèves.

Ce parcours est marqué par mon passage dans l'enseignement technique, affectivement et par la formation technique reçue.

Il est marqué aussi par une critique assez sévère que j'ai toujours faite envers les sujets de bac, succession de questions permettant de résoudre parfois un pro-

blème, mais dans lesquelles l'élève est l'exécutant d'une démarche qu'il ne construit pas.

J'ai fait mes études secondaires dans le technique à partir de la classe de quatrième. (4^e industrielle, CAP de dessinateur en construction mécanique, bac technique et mathématique en 1966 puis classes préparatoires T' et ENSET Math) : pour les gens de ma génération et de ma condition sociale, l'enseignement technique a joué parfaitement son rôle de promotion sociale en reconnaissant en particulier la possibilité du développement de l'intelligence et de la personnalité à travers une formation et une culture technique.

Cette liaison affective à l'enseignement technique m'a beaucoup marquée en début de carrière et je me suis fait un devoir et un plaisir de devenir enseignant en lycée technique. C'est ainsi que j'ai souvent

 ITINERAIRE D'UN
 ENSEIGNANT

enseigné dans les classes anciennement dénommées F et E, ainsi qu'en BTS industriels, que j'ai longtemps participé aux travaux du groupe IREM "mathématique en lycée technique", et que j'ai plusieurs années de suite fait passer des colles en Sup et Spé TA.

Mes études secondaires ont donc été fortement imprégnées par une formation technique.

Mon passage à l'ENSET dans la section mathématique (ENSET : Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, mais qui n'a, pour la section math, de technique que le nom) a marqué un tournant très fort dans ma formation : c'est là que j'ai été nourri à la théorie des ensembles et j'y ai pris un grand plaisir. Les mathématiques sont devenues pour moi à cette époque un jeu, dans le sens où elles consistaient essentiellement à démontrer des choses en appliquant rigoureusement les règles de la déduction logique, à partir d'une axiomatique clairement énoncée.

Et puis ce fut le début dans le métier d'enseignant et les premières surprises : les élèves ne voulaient pas jouer à mon jeu ; ils me disaient qu'ils ne comprenaient rien. Mais en même temps et de façon indirecte, ils me disaient qu'ils voulaient comprendre et que le jeu que je leur proposais ne le leur permettait pas.

Je me disais à l'époque que mon enseignement était trop abstrait et que les élèves avaient besoin de concret pour comprendre. Ce sera le point de départ de l'évolution de ma conception de l'enseignement des mathématiques : de l'échec de la présentation axiomatique prématurée en passant par l'utopie du faux concret pour aboutir à l'importance de la présence d'une

problématique que les élèves peuvent s'approprier.

A la même époque, j'animais un groupe IREM de liaison math-physique, essentiellement constitué de physiciens d'ailleurs, un groupe de liaison math-mécanique-atelier et un groupe de recherche IREM intitulé "heuristique".

En schématisant de façon grossière, j'avais donc un pied dans le monde où l'on applique des mathématiques et un pied dans le monde où les mathématiques se suffisent à elles-mêmes pour se nourrir. Ce sera l'occasion de deux importantes découvertes : le rôle central de la résolution de problèmes et les liens dialectiques entre les mathématiques et les autres sciences.

Par contre, ma conception des mathématiques et l'objectif général de leur enseignement n'ont finalement pas évolué de façon significative. Les mathématiques sont pour moi une construction formelle, modèle descriptif et explicatif du monde des nombres et des figures. L'objectif de l'enseignement des mathématiques est double : participation à la formation générale, au développement de l'intelligence et de la personnalité d'une part et, d'autre part, acquisition d'un outil pour comprendre des phénomènes et résoudre des problèmes dans d'autres disciplines.

Revenons de façon un peu plus détaillée sur l'évolution de ma conception de l'enseignement.

L'échec de la présentation axiomatique

En fait, je ne veux pas seulement parler de la présentation axiomatique mais plus généralement de cette façon d'enseigner consistant à présenter les notions sous leur

forme la plus achevée, la plus synthétique, la plus générale, la plus fine, avant même que ceux à qui on s'adresse aient une expérience, une pratique, une connaissance, du domaine concerné. L'énoncé de résultats synthétiques d'un domaine inconnu est prématuré, incompréhensible. Il ne suffit pas de quelques analogies du genre "est dans la même classe que" pour enseigner de façon compréhensible les relations d'équivalence ; la définition des espaces vectoriels ne permettra pas d'initier à la compréhension des vecteurs du plan ; s'appuyer sur l'addition des nombres ne suffit pas pour introduire la notion de groupe. L'étude d'un modèle d'une réalité pour connaître (prendre connaissance, non pas approfondir) cette réalité est un leurre. La définition axiomatique de la droite affine en quatrième n'a pas fait long feu : les enseignants de mathématiques ont rapidement compris (pour ceux qui, comme moi, en avaient besoin) qu'il n'est pas possible de mettre la charrue (la synthèse) devant les boeufs (l'expérience). Dommage que notre expérience en mathématique n'ait pas été transférée dans d'autres disciplines... qui connaissent aujourd'hui nos excès de hier.

L'illusion du concret : le faux-concret et le concret bien plus complexe que l'abstrait

L'abstraction prématurée ne favorisant pas la compréhension, c'est tout naturellement que je m'oriente alors vers un enseignement résolument tourné vers le concret, ou du moins ce que j'appelais ainsi à l'époque. Il s'agissait d'introduire les notions à partir de situations de la vie courante ou issues des autres disciplines et de poser des exercices dans un langage extra-mathématique. Mais sans grande réflexion sur la nature des difficultés

qu'éprouvent les élèves, cela ne conduira qu'à des habillages superficiels dans le meilleur des cas ou à augmenter sérieusement les difficultés dans de nombreuses situations.

Dans le genre "habillage superficiel" (faux-concret) on peut citer les exercices consistant à calculer des masses, des positions de centre de gravité, des moments d'inertie de plaques au contour définie par des fonctions numériques parachutées. La difficulté dans ce genre d'exercice est la recherche de primitives des fonctions données et le fait d'avoir affaire à des plaques matérielles ne simplifie en rien cette recherche.

Dans le genre "augmentation sérieuse des difficultés" on peut citer ces exercices d'électricité aboutissant à des équations différentielles mais nécessitant de bonnes connaissances physiques pour utiliser les relations liant les grandeurs entre elles (et pour éviter par exemple des erreurs dans la dérivation d'expressions dans lesquelles la variable ne figure pas explicitement partout).

A cette époque, je pris connaissance de l'excellent ouvrage de G. Glaeser, dans la collection "formation des enseignants" (Mathématiques pour l'élève professeur, chez Hermann). G. Glaeser y écrit notamment : "On comprend mieux l'abstrait que le concret", illustrant son propos d'une part, en présentant un schéma du tube digestif de l'homme pour l'abstrait et d'autre part, une photographie de l'intérieur d'un corps humain pour le concret : c'est très probant !

Pour progresser dans l'efficacité de mon enseignement, il me fallait approfondir ma connaissance de la réalité et de la nature

ITINÉRAIRE D'UN
ENSEIGNANT

des difficultés des élèves (la didactique des mathématiques n'en était qu'à ses débuts) et ma réflexion sur cette distinction naïve entre abstrait et concret.

Sur ce dernier point, voici quelques passages de l'ouvrage cité ci-dessus.

Une opinion très répandue consiste à prétendre que l'on comprend mieux le concret que l'abstrait. Ce préjugé prend racine dans la confusion entre la *motivation* et la *compréhension*.

Il est clair que l'on intéresse davantage les élèves en *motiv*ant les études que l'on va entreprendre par des considérations tirées de la vie courante... Mais d'un autre côté, un exposé "concret" obscurcit les problèmes en agrémentant les explications de considérations étrangères à l'essentiel.

Les élèves professeurs devront se convaincre par de nombreuses observations, avec des élèves de tout âge et de tout niveau, que l'abstrait, *préalablement motivé par du concret*, est mieux compris.

Il faut s'efforcer de rattacher toute notion nouvelle à des considérations auxquelles l'élève est habitué.

En somme, pour illustrer une notion abstraite, on utilise une autre notion abstraite, plus familière. "Le concret, a écrit Paul Langevin, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage."

Chaque problème particulier doit être abordé à un niveau d'abstraction approprié : si l'on se place trop bas, on est distrait par des particularités qui dissimulent le noeud de la question ; si l'on vise trop haut, on est amené à manipuler un formalisme que l'on ne maîtrise pas encore

avec suffisamment d'aisance, et qui ne se rattache pas naturellement aux niveaux inférieurs. On se trouve alors aux prises avec des difficultés inhérentes au formalisme, mais étrangères au problème examiné.

Tout n'est pas réglé par ces quelques lignes, mais il y figure déjà une part importante des conclusions auxquelles je vais aboutir. Poursuivons plus lentement mon évolution pour examiner en détail une étape importante de celle-ci : l'utilisation d'exercices à support concret, le mot "concret" étant encore pris ici dans un sens relativement naïf.

Les exercices de mathématiques à support concret

Le faux concret étant débusqué et les exercices de physique pure écartés, ce n'était pas pour autant l'abandon des exercices à support concret. Il s'agit maintenant d'exercices posés dans un contexte non mathématique, mais un contexte familier à l'élève ⁽¹⁾ ; les questions sont posées dans un langage lié au contexte ; elles sont directement compréhensibles, elles ont un sens dans la situation, mais leur résolution nécessite de faire des mathématiques.

Ce sont des exercices du genre "optimisation" (recherche de telle dimension pour rendre le volume maximal, programmation linéaire), recherche sous contrainte (recherche de forme vérifiant telles conditions), calculs de diverses grandeurs.

(1) Il faut insister sur ce point : le lien complexe entre abstrait et concret développé dans cet article concernant les mathématiques s'adresse tout autant à d'autres disciplines comme les sciences physiques par exemple. Par ailleurs, la frontière même entre les mathématiques et les autres sciences est bien floue.

La démarche mise en œuvre dans ces exercices est la démarche classique de mise en équation (traduction en termes mathématiques, choix de l'inconnue), résolution, retour au contexte initial. Il m'est assez rapidement apparu que cette démarche devait faire elle-même l'objet d'un apprentissage, qu'elle n'est pas innée ni très simple, qu'elle est la clef pour rendre les mathématiques utiles et qu'en plus elle prépare à la démarche de modélisation et d'abstraction. (Plus tard, s'y ajoutera la richesse de la réflexion des didacticiens concernant les changements de cadres ou de registres.)

Ces exercices possèdent des difficultés spécifiques (en physique par exemple, l'aspect fonctionnel est rarement présent dans l'énoncé lui-même et doit être dégagé à partir de relations entre grandeurs ; les notations "naturelles" dans ces exercices à support concret ne sont pas celles des exercices classiques de mathématiques ; les représentations graphiques s'accompagnent généralement de difficultés de choix d'échelle et il n'est pas rare d'avoir à utiliser des repères dans lesquels l'origine ne figure pas). Mais pour que les mathématiques puissent effectivement jouer leur rôle de discipline de service, ces difficultés ne doivent pas être écartées mais faire l'objet d'un enseignement. En retour, on gagne un approfondissement des notions mathématiques. Cet aspect dialectique (apprendre des mathématiques pour résoudre des problèmes d'un autre domaine et ce faisant approfondir ses connaissances en mathématiques) me paraît très intéressant. (S'y ajoutera également la richesse de la réflexion des didacticiens concernant la dialectique outil-objet.)

Ce que ces exercices m'ont appris, entre autres choses, c'est l'importance de la

présence d'une problématique et que celle-ci est apportée par le contexte lui-même qui procure assez naturellement des questions (sans fournir en même temps les réponses, mais la validité des résultats obtenus peut être contrôlée grâce à la présence de ce contexte) : pour qu'il y ait quelque chose à chercher, il faut qu'il y ait quelque chose à trouver ! (Ceci sera tout naturellement prolongé par la notion de situation-problème.)

Mais il est primordial que cette problématique puisse être appropriée par l'élève : pour que les questions posées aient un sens pour l'élève (ce qui est fondamental pour qu'ils les comprennent et aient envie de les résoudre), il est nécessaire que la situation exploitée lui soit familière. D'un point de vue pédagogique, il faudra veiller tout particulièrement à la phase de dévolution : laisser du temps à l'élève pour s'imprégner de la situation et l'aider à faire sien le problème posé.

Les exercices de mathématiques à support mathématique

Le fait d'avoir à enseigner dans des classes non techniques (série S), voire même non scientifiques (seconde générale, formation en IUFM), d'avoir de nouveaux collègues peu coopératifs dans les disciplines techniques, de devoir changer les situations "concrètes" à cause des changements de programmes en physique et en technologie, (de plus, dans ces disciplines la part mathématique s'amenuisait), d'avoir plus d'élèves moins motivés a priori par les études, plus critiques sur le sens de celles-ci et demandeurs d'apports immédiats, de résultats rapidement tangibles, tout ceci m'a amené à diminuer l'importance que j'accordais aux exercices à support concret. Mais l'essentiel était acquis je

 ITINERAIRE D'UN
 ENSEIGNANT

pense : un enseignement guidé par l'apprentissage d'outils permettant de résoudre des problèmes.

Pour qu'il y ait problème, il faut une *situation riche et quelque chose à chercher*.

Très souvent, pour que le problème soit intéressant, il faut que les questions soient posées dans le langage du contexte et que leur résolution nécessite d'en sortir.

Pour que l'élève ait envie de chercher et qu'il puisse comprendre ce que l'on cherche, il faut que le problème soit posé dans un *contexte* qui lui est *familier* : c'est cela le sens profond du mot "concret". Il faut aussi que la question posée devienne **sa** question, mais cette motivation n'est pas aisée à obtenir et dépend de nombreux facteurs (ambiance dans la classe, type d'élèves, rapport au savoir, personnalité de l'enseignant...) : une apparence ludique, un aspect interdisciplinaire, une présentation sous forme de défi peuvent, selon le cas, y contribuer.

Enfin , ce contexte familier à l'élève dans lequel se situe la problématique n'est pas nécessairement à chercher à l'extérieur des mathématiques : *les mathématiques elles-mêmes peuvent être ce support concret*, riche, motivant apportant par lui-même son lot de questions, à condition précisément d'exploiter des situations où

interviennent des objets mathématiques que l'élève connaît bien déjà. Les objets et les questions qui ont du sens ne sont pas figés, ils évoluent avec l'enseignement : un outil peut devenir objet d'étude.

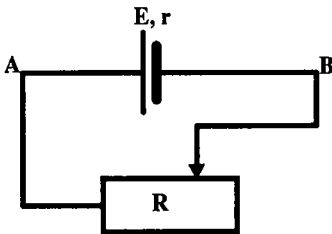
Finalem^{ent}

Finalem^{ent} je reste persuadé qu'il serait intéressant d'enseigner les mathématiques comme outils pour résoudre des problèmes et comprendre des phénomènes physiques, économiques, biologiques, mécaniques... et mathématiques ! Mais que devant la difficulté réelle d'un enseignement interdisciplinaire, *il faudrait au moins enseigner les mathématiques pour résoudre des problèmes de mathématiques*.

Pour illustrer et préciser certains des points évoqués ci-dessus, je vous propose de me suivre dans deux petits jeux artificiels : l'un va consister à partir d'un énoncé de physique et à le dépouiller au fur et à mesure de son habillage physique pour en faire un énoncé de mathématique (mais il ne faudra pas aller trop loin si l'on veut maintenir la présence de questions intéressantes) ; l'autre consistera à partir d'un énoncé de mathématique et à le plonger de plus en plus dans un contexte (mais là aussi, il ne faudra pas aller trop loin si l'on veut rester dans le domaine de la formation en mathématiques).

Une situation à exploiter

Une résistance variable **R** est montée aux bornes d'un générateur de force électromotrice **E** et de résistance interne **r**.



On veut étudier le comportement de la puissance **P** absorbée par la résistance **R**, en fonction de **R** et suivant la valeur de la résistance interne **r**. On donne $E = 6 \text{ V}$. On fixe les ordres de grandeur des résistances :

$$\begin{cases} 0 < R < 30 \\ r : \text{"petit"} \end{cases} \text{ (en Ohm)}$$

A partir de la relation $P = U.I$, on établit :

$$P = \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 \cdot R$$

Remarque : on est en présence d'une **relation** entre plusieurs grandeurs et non pas d'une **fonction réelle à variable réelle**. Parmi ces grandeurs, même représentées littéralement, on peut distinguer :

- des constantes (**E**)
- des variables de base (**R**)
- des grandeurs à étudier (**P**)
- des paramètres (**r**)

1°) On suppose $r = 0$.

Étudier les variations de **P** en fonction de **R**.
Représenter graphiquement **P**, fonction de **R** (courbe Γ_0).

P a-t-il un maximum ?

Quelles valeurs sont possibles pour **R** sachant que **P** ne peut dépasser 6 W ?

On obtient $P = \frac{36}{R}$ et les questions posées ne soulèvent pas de grandes difficultés.

Remarques :

- Il s'agit d'étudier **P** en fonction de **R** et non pas $y = f(x)$ ou même $x \mapsto f(x)$
- L'ensemble de définition de la fonction et l'étendue de la variable pour la représentation sont donnés par le contexte ; une réflexion est nécessaire pour le choix des unités sur les axes (l'unité n'est pas forcément le cm et le repère n'est pas nécessairement orthonormal).
- Les questions sont posées dans le contexte et sont issues du contexte ; elles ont un sens et une interprétation physiques ; elles sont à traduire dans le langage mathématique (en particulier la dernière question).

- C'est une fonction classique ($x \mapsto \frac{k}{x}$) qu'il faudra reconnaître dans la relation $P = \frac{36}{R}$.

2°) On suppose $r = 2$.

Étudier les variations de **P** en fonction de **R**.

Représenter graphiquement **P**, fonction de **R** ; **P** a-t-il un maximum ?

Quelles valeurs sont possibles pour **R** sachant que **P** ne peut dépasser 6 W ?

En notant **P**₀ la valeur de **P** lorsque $r = 0$ et **P**₂ la valeur de **P** lorsque $r = 2$, montrer que :

P₂ est toujours inférieur à **P**₀
et que, pour $R > 30$, on a $|P_2 - P_0| < 0.2$

ITINÉRAIRE D'UN ENSEIGNANT

On obtient :

$$P = \frac{36 \cdot R}{(R+2)^2} ; \quad \frac{dP}{dR} = 36 \cdot \frac{2-R}{(R+2)^3} ;$$

$$P_0 - P_2 = 144 \cdot \frac{R+1}{R \cdot (R+2)^2} \leq \frac{144}{R \cdot (R+2)} .$$

A partir de là, les questions posées se résolvent bien.

Remarques :

- La notation différentielle pour la dérivée apparaît naturellement
- Etude de fonction, inéquation, comparaison de fonctions ont ici un sens, un objectif dans le contexte étudié.

3°) On suppose $r \neq 0$:

Montrer que P admet un maximum pour $R = r$. Calculer ce maximum.

On note r la représentation graphique de P, fonction de R et M_r le point maximum.

Représenter graphiquement, sur un même dessin, l'ensemble C des points M_r ainsi que les courbes Γ_0 et Γ_2 .

On obtient

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \cdot \frac{r-R}{(R+r)^3} = \frac{36(r-R)}{(R+r)^3} \text{ et } M_r \left| \begin{array}{l} R=r \\ P=\frac{9}{r} \end{array} \right.$$

Remarques :

- un contrôle d'homogénéité est possible (souhaitable) sur ces calculs littéraux
- les grandeurs qui interviennent ont une signification (résistance, puissance)

4°) On suppose encore $r \neq 0$:

Chercher le coefficient directeur de la tangente à l'origine à Γ_r .

Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec Γ_0 ?

En déduire pour Γ_5 la construction de la tangente à l'origine, le maximum et l'allure de la courbe.

Pour quelles valeurs de r est-on assuré que P ne dépassera pas 6 W (quelle que soit la valeur de R) ?

On obtient :

Pour la tangente : $P = \frac{36}{r^2} \cdot R .$

Pour l'abscisse du point d'intersection : $R = r$. Ceci permet une construction rapide de la courbe pour $r = 5$ par exemple et l'ensemble de l'étude permet une interprétation graphique simple de la dernière question (voir ci-dessous, figure 1).

Création d'énoncé de problème de mathématiques à partir de cette situation

Nous allons proposer deux énoncés de problème à partir de la situation physique ci-dessus, aboutissant à des calculs analogues : leur point commun est la disparition de toute référence à la physique ; mais ces deux énoncés me paraissent bien différents dans la mesure où le premier garde une problématique et que le deuxième se contente de poser des questions parachutées, sans fil directeur, sans objectif.

Premier énoncé : où il reste un peu de relief

Soit m un réel positif ou nul et f_m la fonction définie sur $] 0 ; 50 [$ par $f_m(x) = \frac{36x}{(x+m)^2}$.

Soit Γ_m la représentation graphique de f_m . On se propose d'étudier quelques propriétés de cette famille de courbes.

1°) On suppose $m = 0$.

Etudier les variations de f_0 et représenter graphiquement f_0 . (courbe Γ_0).

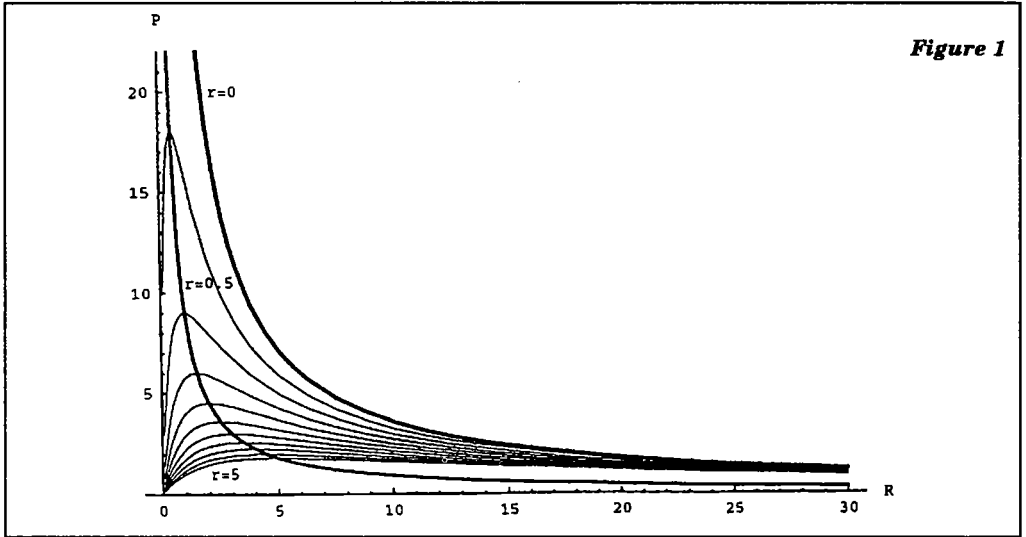


Figure 1

Pour quelles valeurs de x est-ce que :
 $f_0(x) < 6$?

2°) On suppose $m = 2$.

Etudier les variations de f_2 et représenter graphiquement f_2 . (courbe Γ_2).

Pour quelles valeurs de x est-ce que :
 $f_2(x) < 6$?

Montrer que $f_2 < f_0$ et que pour $x > 30$,
on a $|f_2(x) - f_0(x)| < 0,2$.

3°) On suppose $m \neq 0$.

Montrer que Γ_m admet un maximum A_m . Chercher les coordonnées de A_m .

Pour quelles valeurs de m est-on assuré que $f_m(x)$ ne dépassera pas 6 (quelle que soit la valeur de x) ?

Représenter sur un même dessin l'ensemble C des points A_m ainsi que les courbes Γ_0 et Γ_2 .

Chercher le coefficient directeur de la tangente à l'origine à Γ_m .

Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec Γ_0 ?

En déduire, pour Γ_5 , la construction de la tangente à l'origine, le maximum et l'allure de la courbe.

Remarques : dans cette première version, la situation de référence n'est déjà plus "physique" ; c'est une famille de courbes. L'objet à manipuler, à étudier, à questionner, est une courbe : on pose des questions sur son allure, sa forme à l'origine, sur son évolution en fonction du paramètre... Pour que ces questions puissent avoir un sens pour les élèves auxquels elles s'adressent, il faut que ceux-ci aient déjà une assez bonne familiarisation avec les fonctions numériques et leurs représentations graphiques.

Deuxième énoncé : où il reste peu de relief

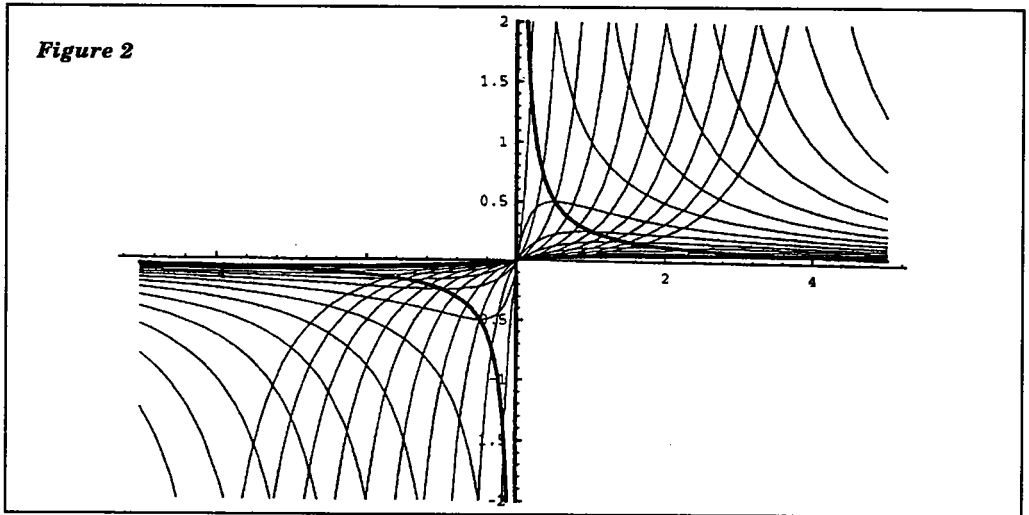
Soit m un réel et f_m la fonction numérique à variable réelle définie par $f_m(x) = \frac{x}{(x+m)^2}$.

Soit Γ_m la représentation graphique de f_m .

1°) On suppose $m = 0$.

Etudier les variations de f_0 et représenter graphiquement f_0 . (courbe Γ_0).

2°) On suppose $m = 2$.



Etudier les variations de f_2 et représenter graphiquement f_2 . (courbe Γ_2).

Résoudre l'inéquation $f_2(x) > -1$.

Etudier la position relative des courbes Γ_0 et Γ_2 .

Résoudre l'inéquation $|f_2(x) - f_0(x)| < 10^{-2}$.

3°) On suppose $m \neq 0$.

Montrer que Γ_m admet un extremum A_m . Chercher les coordonnées de A_m .

Représenter sur un même dessin l'ensemble C des points A_m ainsi que les

courbes Γ_0 et Γ_2 et Γ_{-1} .

Remarques :

Dans cette deuxième version, les questions sont parachutées, les solutions ne servent à rien, on ne voit pas d'objectif autre que celui d'étudier une famille de fonctions (et sans contrainte sur m et x , cela devient bien plus difficile, peu contrôlable et rapidement inextricable : voir figure 2).

Une question plate à enrichir

Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Premier enrichissement : en situation "mathématiques pures"

Déterminer a , b et c pour que la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie : $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $f'(1) = -2$.

Remarques : on aboutit au même système que ci-dessus, mais cela me paraît déjà nettement "meilleur" (il y a quelque chose à trouver en fonction de contraintes à traduire).

Et si un élève astucieux fait le raisonnement suivant ?

f est nécessairement de la forme $k(x - 2)(x - r)$; on a alors

$f'(x) = k(2x - 2 - r)$ et les contraintes se traduisent par

$$\begin{cases} -k(1-r) = 1 \\ k \cdot r = 2 \cdot k = 1, \end{cases}$$

$r = 2$ est solution . D'où $f(x) = \dots$

Eh bien, tant mieux ! Cela permet d'ailleurs de mettre en relief une caractéristique importante des énoncés intéressants : **l'énoncé ne contient pas la méthode de résolution.**

Deuxième enrichissement : en situation "mathématiques concrètes"

En supposant que, pour le niveau considéré, les paraboles puissent être considérées comme des objets familiers, palpables, visibles, manipulables, on trouvera dans l'énoncé suivant une situation analogue à celle que l'on obtient en faisant un énoncé à partir d'un problème de physique (ou de tout autre science), une situation caractérisée par :

- un problème posé dans un contexte donné
- sa mise en équation (à un niveau plus élevé : choix d'un modèle)
- la résolution du problème mathématique obtenu
- l'interprétation des résultats dans le contexte de départ.

Dans la réalité du monde du travail, de la recherche ou de la vie quotidienne, les choses ne sont pas aussi simples ; elles sont bien plus dialectiques ; il y a un aller-retour incessant entre les différents niveaux. Mais le modèle ci-dessus garde cependant une valeur formatrice et il est possible de le faire fonctionner à l'intérieur de notre propre discipline, les mathématiques. C'est cela qui me paraît fondamental pour

une formation scientifique. S'il nous est difficile, voire impossible, de faire des mathématiques réellement appliquées, motivantes, utiles, faisons au moins des mathématiques à partir de questions chargées de sens, à partir d'une problématique, sur des objets (devenus) "concrets" (imaginables, représentables, manipulables, familiers), des mathématiques en situation et pas seulement des mathématiques constituées d'une succession de questions sans objectif, de résolution d'équations dont les solutions ne servent à rien !

Dans un repère (Oxy) on donne A (1 ; 1), B(2 ; 0) et C(0 ; 3).

Déterminer le sommet de la parabole d'axe parallèle à (Oy), passant par A et B, et dont la tangente en A passe par C.

Remarques : on aboutit encore au même système et il y a quelque chose à trouver pour obtenir un certain résultat. Il va falloir traduire, résoudre, interpréter... **cela aussi s'apprend**, à condition d'y être affronté !

Et si un élève, après avoir dessiné, fait le raisonnement suivant ?

La parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère d'origine B vérifie les conditions imposées. Le sommet cherché est donc B.

Eh bien, tant mieux ! Cet élève fait preuve de belles aptitudes... La méthode de résolution ne figure pas dans l'énoncé !

Enoncé ainsi, l'exercice est bien plus riche que l'énoncé initial ; bien plus difficile aussi, oui,... mais sur un autre terrain et pas forcément sur celui auquel on pense. En effet, s'il nous venait à l'idée de rendre plus difficile l'exercice initial, que ferions-nous ? Nous changerions les coefficients

ITINÉRAIRE D'UN
ENSEIGNANT

(des coefficients plus grands, des coefficients avec des rationnels voire avec des radicaux), nous proposerions plus d'inconnues, plus d'équations,... nous nous dirigerions vers des systèmes sans solution ou à solutions multiples...

A propos de ces systèmes : savez-vous en fabriquer ? C'est extrêmement facile à partir de la situation proposée ici : il suffit de choisir des contraintes surabondantes ou incompatibles avec les propriétés des paraboles ! Par exemple : imposer le passage par trois points alignés, ou imposer à la tangente au point d'abscisse $\frac{X_A + X_B}{2}$ d'être ou non parallèle à (AB). Voilà qui ouvre de belles perspectives.

Troisième enrichissement : en situation "hors mathématiques"

Un mobile est en accélération constante (mouvement rectiligne, départ arrêté). Il met 5 s pour parcourir les 50 m qui séparent les points A et B. En B, sa vitesse est de 60 km/h.

Quelle était sa vitesse en A ?

Quelle est sa vitesse moyenne sur le trajet AB ?

Représenter graphiquement la distance parcourue et la vitesse en fonction du temps.

A quelle distance de A a-t-il démarré ?

Quelle est sa loi horaire en prenant comme origine le départ du mouvement ?

La situation proposée maintenant n'aboutit plus au système initial, mais amène cependant à la résolution d'un système de "même" nature. L'un des intérêts de partir d'un contexte aussi concret, est que les questions viennent d'elles-mêmes et qu'elles ont un sens, une interprétation.

On y trouve également quelques caractéristiques importantes si l'on souhaite rendre les élèves plus efficaces dans l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes dans d'autres domaines :

- la variable n'est plus x ! l'inconnue n'est plus x !
- la fonction ne s'appelle pas f ! sa dérivée n'est pas f'
- il faut gérer les unités physiques, le choix des axes, des unités sur les axes
- il est souhaitable de reconnaître les fonctions classiques
- on peut contrôler les formules par homogénéité, contrôler les ordres de grandeurs.

Il me semble qu'apprendre aux élèves à gérer ces difficultés et les habituer à faire des mathématiques dans de tels contextes, fait également partie de notre métier d'enseignant de mathématiques.