REPERES - IREM . N° 22 - janvier 1996

SAUT D'OBSTACLE

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

INTRODUCTION (1)

La notion de limite occupe une place importante dans le programme d'analyse de la classe Terminale scientifique. Son introduction est faite en Première, son emploi généralisé l'année suivante. La continuité, le prolongement par continuité, la dérivée en un point d'une fonction, s'expriment en terme de limite. Les asymptotes, les tangentes aux courbes représentatives de fonctions, leurs tracés (continus ou non) sont les équivalents géométriques des limites mises en évidence. Cette notion pose aux élèves une véritable épreuve d'agilité mentale. La plupart savent (dans les grandes lignes) appliquer les théorèmes relatifs à l'existence et aux propriétés des limites (2). Réalisent-ils ce qu'est une limite ? Le doute naît à l'occasion du dis-

(1) Cet article doit beaucoup à Jean-Pierre Fiedelmeyer, qui m'a fait d'excellentes remarques d'ordre historique, et qui m'a signalé l'importance du livre de Régis Debray (bibliographie A 3) pour l'enseignement des mathématiques. Certains aspects ont été clarifiés, précisés ou soulignés à la suite des relectures attentives de Maryse Maurel et de Marc Legrand. Enfin, Huguette Pandolfo a très largement amélioré la structure et la forme du texte initial.

(2) On arrive à des situations surprenantes, voire cocasses : des élèves appliquent couramment des théorèmes concernant des notions dont ils ne savent rien. Cette caricature de formation atteint son paroxysme dans l'enseignement technique où (l'auteur de l'article l'expérimente chaque année dans les classes de STI) l'immense majorité des élèves calcule des dérivées et en déduit les variations de fonctions sans connaître la définition (et le sens) de la dérivée ! Dans ces classes, l'enseignement des mathématiques glisse dangereusement vers l'apprentissage de procédures (très vite oubliées), en abandonnant le vieux projet de transmettre du sens. Cette capitulation conduit tout droit à ce que R. Bkouche appelle malicieusement "l'élève-logiciel".

L'obstacle épistémologique

Si un élève ne comprend pas une notion, ce n'est pas nécessairement qu'il n'est pas doué, qu'il ne travaille pas assez, qu'on ne lui a pas bien présenté les choses, ou même qu'il bute sur la difficulté (classique) d'apprendre du nouveau. Ce qu'on lui enseigne est parfois si "énorme" qu'un changement de regard sur le monde est nécessaire. On lui propose d'abandonner un système de pensée qui avait une pertinence locale et qui avait fait ses preuves dans des cas banals. (Il faut penser contre la nature et contre nous-mêmes, affirmait Bachelard (3), pour que l'esprit scientifique triomphe des divers obstacles épistémologiques.)

Ce n'est pas simple

Il s'agit d'accepter d'affronter avec lui cette difficulté comme une étape longue, normale et importante dans la démarche d'apprentissage *(bibliographie B 2).*

cours souvent confus qui accompagne le prolongement par continuité. L'illusion se dissipe devant la dérivabilité de la fonction prolongée, lorsqu'il faut revenir aux définitions et traduire les résultats en termes géométriques. Ce n'est pas étonnant : la notion de limite est un *obstacle épistémologique de première grandeur* (voir encadré). Il paraît important de l'affronter dès le lycée pour éviter que les étudiants ne soient décontenancés par la présentation universitaire du concept.

L'obstacle à la compréhension que constitue la notion de limite est de première importance. L'idée de l'affronter en utilisant toutes les ressources disponibles – dont l'informatique – a fait l'objet d'une expérience réalisée durant l'année 94/95 dans une Terminale scientifique à option technologique. Cet article décrit les progrès, lents avec phases régressives, des élèves conduits à s'y appliquer. Il explique la tentation de l'institution (et des enseignants) à le contourner plutôt qu'à l'affronter. Il met en évidence le coût (en temps, en réflexion et en débats...) pour le surmonter.

Depuis plusieurs années, au lycée Couffignal de Strasbourg, le professeur de mathématiques accompagne ses élèves de Première en Terminale scientifique. L'enseignement y gagne en continuité et en efficacité. Dans le cadre de l'expérimentation des nouvelles technologies, deux heures par quinzaine d'informatique appliquée aux mathématiques, ont été intégrées pendant les deux ans à l'emploi du temps d'une classe de volontaires. En Première, ils ont appris à conjecturer avec Graph'x et Derive. Ils ont découvert la puissance et les limites de l'outil informatique ainsi que certains problèmes nés de son utilisation *(bibliographie B 6).*

En novembre dernier, la classe s'est attelée pendant ces heures, à une activité d'exploration et d'approfondissement de la notion de limite. Quatre heures étaient

(3) Voir bibliographie A 1. A l'origine, l'obstacle épistémologique est un concept inventé par les épistémologues et les historiens des sciences, pour comprendre certains blocages dans le développement scientifique. Les didacticiens ont détourné l'expression en lui donnant un sens pédagogique. Ce détournement souligne le lien entre les données historiques et pédagogiques.

prévues, il en fallut le double pour obtenir les compte-rendus dont l'analyse nourrit cet article. En avril, une seconde activité, qui laissait plus d'initiative aux élèves, devait leur permettre de faire le point, après de longs mois de travaux en classe de mathématiques – la notion fut examinée et mise en œuvre de toutes les façons possibles. Les textes alors produits par les élèves témoignent des évolutions et suscitent d'intéressantes remarques.

Les incessants changements de cadre en environnement informatique ont d'abord révélé la profondeur des difficultés des élèves qui abordent la notion de limite (sa définition actuelle n'en facilite pas la compréhension). Cinq mois plus tard, des idées intéressantes naissaient d'une pratique encore maladroite. Le concept avait pris sens et indépendance à l'égard de l'outil informatique. L'obstacle, de taille, était apprivoisé.

1. NOVEMBRE 94. LE PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Les élèves avaient à leur disposition les calculatrices, *Graph'x, Derive* et leurs documents de cours. Répartis en binômes, ils pouvaient circuler librement, discuter et... avoir recours au professeur.

a) Les questions [4]

> *1) Prolongement d'une fonction par continuité*
>
> On donne f(x) = sin(x)/x sur]0,1] [5]. Définir la fonction g qui prolonge f par continuité en 0+. Où g est-elle définie ?
> Comment la courbe représentative de f permet-elle de conjecturer l'existence et la définition de g ?
>
> *2) Dérivabilité de g*
>
> a)Quelle est la dérivée de g sur]0,1] ?
> b)Dérivée de g en 0+.
>
> *1^re^ méthode*
> Soit A(0,1) et Mk(k,g(k)) deux points de Cg. Equation de (AMk). Tracer (AMk).

(4) Il a fallu presque deux siècles de calcul infinitésimal avant que se dégagent de façon claire les notions de limite et de continuité. Ce temps de maturation a vu le déclin de l'intuition géométrique au profit d'une formalisation de plus en plus abstraite. Le problème proposé est la traduction pédagogique et contemporaine de cette histoire.

(5) Le choix de l'intervalle résulte de l'utilisation d'encadrements du sinus et du cosinus, établis pour x positif seulement. Le passage à [-1,1]\{0} nécessiterait l'usage d'autres encadrements ou de délicats raisonnements sur la parité du sinus et du cosinus. Cela compliquerait inutilement le problème.

Que devient (AMk) quand k tend vers 0+ ? Qu'en conjecturez-vous pour la dérivabilité de g en 0+ ?

2^e Méthode
Calculer le taux d'accroissement t(x) de g en 0+. Le représenter graphiquement sur le même graphique que Cg dans]0,1]. Qu'en conjecturez-vous pour la limite en 0+ de t(x) ? Qu'en déduisez-vous quant à la dérivabilité de g en O+ ?

3e méthode
Utiliser les encadrements de Sin(x) et Cos(x) par des polynômes (pour x>0), obtenus en travaux pratiques. En déduire la limite de t(x) quand x tend vers O+. Conclusion ?

Comment obtient-on g'(x) à partir de f'(x) ?

3) Refaire pour g' l'étude du 2) sur [0,1]. g' est-elle dérivable sur [0,1] ? Quelle est sa dérivée ? *(Voir figure 1).*

b) L'analyse **a priori** *de l'activité*

α) Des allers-retours délicats

Elle impose d'incessants passages du papier crayon à l'écran et vice versa. L'aller-retour, délicat et déstabilisant dans un premier temps, est le prix à payer pour que la notion de limite prenne du sens. Par exemple, la nécessité d'établir au préalable l'équation de la famille de droites (AMk) pour en obtenir une représentation graphique, souligne l'indispensable synergie entre le papier-crayon et l'écran.

β) L'image cache autant qu'elle révèle (6)

Par leur conception même, les deux logiciels utilisés réalisent le prolongement par continuité. L'observateur naïf ne décèle aucune singularité de la courbe Cf, surtout si on la représente dans [-1,1]. Or, il y en a une en 0. L'image masque le problème, mais en même temps, elle suggère sa solution pour peu que l'on soit conscient de son existence.

γ) Deux images très différentes pour la même information

La mise en évidence visuelle d'une position limite de la famille de sécantes (AMk) quand k tend vers 0+, pour traduire la dérivabilité de g en 0+, est à la fois classique (elle a été abondamment pratiquée en première) et très difficile pour les élèves. La dérivée est un nombre. Or à l'écran ils voient une droite (fort heureusement horizontale dans un premier temps !) dont seul le coefficient directeur (inaccessible par simple lecture graphique) présente de l'intérêt pour le problème. Quel est le rapport entre les deux ? La question oblige à revenir aux définitions et aux

(6) Tout au long de cet article, l'image calculée par ordinateur joue un rôle capital. Qu'apporte-t-elle à la compréhension d'un concept d'analyse ? Facilite-elle l'apprentissage des mathématiques ? Voir est-ce comprendre ? L'ouvrage de Régis Debray *Vie et mort de l'image* (bibliographie A 3) offre d'intéressantes clés d'interprétation des observations faites en salle informatique...

interprétations géométriques. Exercice fécond mais délicat et peu prisé par les élèves... Il faudra un peu les bousculer !

Quand on représente graphiquement le coefficient directeur t(k) de (AMk), l'image est totalement différente, bien qu'elle porte la même information. Le passage de l'une à l'autre promet de longs tâtonnements et de nombreuses difficultés d'interprétation.

δ) Aspects théoriques

Il faut tenter de démontrer les conjectures nées de l'observation des images. La fonction choisie a l'intérêt de conduire à des formes indéterminées non immédiates. Un binôme d'élèves moyens est capable de les lever par des encadrements établis en travaux dirigés.

Démontrer que g' est le prolongement par continuité de f' en 0+ n'est pas sans intérêt : un théorème le confirmera. Pour l'établir (graphiquement ou de façon théorique) l'initiative est laissée aux élèves (une aide orale sera sans doute indispensable).

La dernière partie (réservée aux binômes les plus rapides) fait apparaître des limites et des dérivées autres que 0 ou 1. La difficulté n'est pas négligeable.

La maîtrise de l'ensemble de cette activité révèlerait une claire compréhension des notions en cause et laisserait présager un passage en douceur à des définitions et des usages plus formels.

c) L'activité à la loupe

α) Des élèves inhibés par l'image

Tout au long de cette activité, un constat s'impose, qui confirme de nombreuses observations antérieures : devant un écran, les élèves éprouvent de grosses difficultés à mobiliser leurs connaissances théoriques. *L'image semble inhiber leur capacité de raisonnement.* On les voit s'interroger longuement sur la manière de tracer les droites (AMk) à l'écran et, après bien des hésitations, avancer l'idée qu'il faudrait sans doute une équation... Nouvelles tergiversations pour calculer le coefficient directeur de (AMk). Nombreuses erreurs avant d'arriver à une équation correcte. (La même activité aurait été traitée bien plus efficacement en travaux dirigés de mathématiques, sans l'outil informatique !)

Les mêmes tâtonnements sont observés pour trouver une valeur approchée du coefficient directeur d'une droite non horizontale de l'écran. L'idée qu'il faille deux points (le curseur en fournit les coordonnées), a bien du mal à émerger. Deux des binômes se contentent finalement d'une valeur littérale de ce nombre, sans valeur numérique approchée !

Plus étonnant encore, une minorité d'élèves (ceux qui n'ont de l'informatique qu'une expérience ludique) "disjonctent"... Ainsi ce binôme qui choisit les valeurs 1,2,3,4,5 pour simuler l'évolution de k vers 0+ ! L'image obtenue (un peu surprenante tout de même) ne suscitant aucune interrogation sur leur choix, il faut un bon moment d'entretien avec le professeur pour que la contradiction entre les valeurs choisies de k et le fait qu'il tende vers 0+, leur apparaisse...

La synergie des connaissances théoriques et de l'observation attentive des représentations graphiques sur l'écran, donne force et consistance à l'outil informatique. Une image informatique ne livre pas spontanément ses secrets. Si elle n'entre pas en résonance avec des images mentales, elle demeure stérile. *Lire avec profit une image ne va pas de soi. C'est le fruit d'un apprentissage patient et persévérant* (7).

β) Des élèves inspirés par l'image

Surprise agréable, plusieurs binômes ont remarqué que la courbe de t ressemblait étrangement à un segment de droite (entre 0 et 1). Les encadrements étaient insuffisants pour expliquer cette observation. Ce fut l'occasion de leur parler (sans démonstration) du développement de Taylor d'ordre 3 et 5 du cosinus et du sinus en 0. Les encadrements de ces fonctions en travaux dirigés, puis la traduction graphique de ces encadrements en séance d'informatique, ont bien préparé cette anticipation des programmes. Le parallèle avec l'une des définitions de la dérivée, que Taylor généralise (8), a été souligné. Une rapide exploration de la fonction TAYLOR de *Derive* a révélé l'intérêt de cette notion pour leurs futures études. Dès lors, le mystère était levé : $t(x) = -x/6 + x\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Certains élèves ont vu l'utilité du développement de Taylor pour la recherche de limites. Ils se sont empressés de l'utiliser.

γ) De graves difficultés théoriques confirment la réalité de l'obstacle épistémologique

1) Des problèmes d'existence

La position limite des droites (AMk) quand Mk tend vers A, est repérée sans difficulté sur l'écran (le travail de première s'avère payant). Mais l'interprétation (sous forme de conjecture) pose un problème considérable. Malgré de longues discussions du professeur avec les différents groupes et un rappel de connaissances à toute la classe, les compte-rendus d'activité témoignent des difficultés rencontrées. En voici un exemple :

> "Lorsque k tend vers 0+, on peut remarquer que Mk va tendre vers A, donc que (AMk) va tendre vers la tangente à Cg en 0. On peut donc conclure que g est dérivable en 0 et sa limite sera égale à 1."

Ces élèves laissent entendre (par "donc") que la tangente existe *a priori*, alors que cette existence découle de la position limite des droites (AMk), observée à l'écran (ils la relèvent, sans en déduire

(7) D'où la question : enseigner à l'ère des medias audio-visuels, ne serait-ce pas d'abord enseigner l'écoute et le regard ? En dehors de l'école, les élèves sont plongés dans un flux de sons et d'images qui leur procurent avant tout des SENSATIONS. Le rythme efface le sens (sur la bande FM, les paroles des chansons sont d'autant plus inaudibles qu'elles sont en anglais), les images ne sont pas destinées à être regardées, mais perçues. Elles défilent à grande vitesse. Elles sont faites pour surprendre, étonner, captiver. Rien de tel avec l'image mathématique. Bien que calculée "en direct", elle est d'abord un objet statique que l'élève est appelé à analyser, à commenter, à mettre en relation avec des connaissances afin de la COMPRENDRE. Nous sommes à mille lieues d'un clip ou d'un jeu vidéo. (bibliographie A 3)

(8) La formule de Taylor d'ordre 1 coïncide avec l'une des définitions de la dérivée proposée aux élèves en Première. f(a+h) est approché par une fonction affine de h, dont f'(a) est le coefficient de h. Au 19e siècle, devant les difficultés de la notion de limite, des tentatives on été faites pour introduire la dérivée comme coefficient du terme du premier degré dans le développement limité de la fonction. Cette idée se heurte à d'autres difficultés. Néanmoins, elle pourrait, d'après Jean-Pierre Friedelmeyer, être reprise au lycée et constituer une première approche algébrique de la dérivée, qui évite les énormes difficultés que présente la notion de limite.

l'existence d'une tangente). Dans la même phrase, l'affirmation de la dérivabilité et d'une limite égale à 1 est troublante : lapsus ou confusion entre la fonction et sa dérivée ?

L'existence d'une dérivée ou d'une tangente semble aller de soi : les contre-exemples [9] du cours (et des séances informatiques de Première) sont oubliés. L'idée sous-jacente est bien : *la limite existe toujours, il suffit de la déterminer* [10]. L'obstacle épistémologique apparaît ici dans toute son ampleur !

Dans une autre copie on peut lire :

"On constate que la droite (AMk) tend vers la droite d'équation y = 1. On peut donc conjecturer que g a pour dérivée en 0+ : g'(0+) = 0. En effet, quand k tend vers 0, (AMk) tend vers la tangente de g en 0+."

Ce texte a le mérite de l'ambiguïté ! Une position limite de (AMk) est repérée. La valeur de la dérivée est donnée (on aimerait croire que cela sous-entend son existence). L'existence d'une tangente, affirmée ensuite est-elle la conséquence des observations qui précédent ou traduit-elle un fait général ? Le doute est permis : à aucun moment l'existence de la tangente ou de la dérivée n'est explicitement affirmée.

2) La confusion entre une expression et sa limite

C'est l'une des plus fréquentes dans les textes des élèves.

"La dérivée de g en 0+ est le coefficient directeur de (AMk)".

On ne peut mettre l'erreur de ces élèves sur le compte du stress ou du temps trop mesuré. Elle n'en est que plus significative.

Un binôme distingue bien l'existence de g'(0+) et sa valeur, mais confond taux d'accroissement et dérivée :

"En traçant la droite (AMk), on s'aperçoit que celle-ci est horizontale quand k tend vers 0. On peut donc conjecturer que g est dérivable en 0+ et que sa dérivée est nulle en ce point."

(9) Les calculatrices sont précieuses dans ce domaine. Elles permettent de faire sentir aux élèves des phénomènes qui dépassent leurs possibilités théoriques du moment. L'étude des valeurs de sin(1/x) quand x prend des valeurs de plus en plus voisines de 0 est éclairante : l'absence de "valeur limite" suscite l'étonnement. On peut, dans un second temps, chercher les racines de l'équation sin(1/x) = 0. Par des transformations géométriques à la portée des élèves de Première, on peut représenter la courbe de cette fonction dans un intervalle [1/(k+1),1/k] sur l'écran d'une calculatrice graphique. On peut ainsi comprendre géométriquement l'absence de cohérence de la série de nombres obtenus plus haut. De tels travaux prennent du temps. Mais ne pas les entreprendre, c'est consolider l'obstacle épistémologique dans l'esprit des élèves.

(10) Nous touchons là toute l'ambiguïté (et la difficulté) de la notion de tangente. Comme "objet visuel", elle existe en tant que droite (ou demi-droite) ne rencontrant localement la courbe représentée qu'en un seul point. Les élèves en ont une notion intuitive (bibliographie B 4). Les mathématiciens sont passés de cet "objet visuel" intuitif à un "objet pensé". La tangente comme position limite d'une sécante est une invention très complexe : elle peut ne pas exister (dans ce cas, si on écarte la situation banale de deux demi-tangentes distinctes, la courbe n'est plus représentable graphiquement au voisinage du point étudié !). Les élèves ont dans l'esprit l'"objet visuel" en dissertant sur l'"objet pensé". La résistance à passer de l'un à l'autre révèle la réalité et l'ampleur de l'obstacle épistémologique affronté.

Le présent dans la première phrase traduit la confusion entre une droite d'une famille et sa position limite (donc entre une quantité et sa limite). Le singulier confirme cette confusion : la seule droite de l'écran qui retient leur attention est celle où se superposent les tracés correspondant à des valeurs de k très voisines de 0. C'est elle qui fait naître l'idée de position limite, donc de tangente, donc de dérivée. Les élèves ne font pas ce saut qualitatif : ils ne passent pas des droites (AMk) (dont aucune n'est horizontale en toute rigueur) à la droite horizontale d'équation (y = 1) qui n'est pas une droite (AMk). (Ils ne passent pas du taux d'accroissement à la dérivée.) Et pourtant la seconde phrase montre que des aspects fondamentaux ont été compris : l'existence de la dérivée résulte de la position limite observée, sa valeur traduit le fait quelle est parallèle à (Ox).

d) Analyse des difficultés rencontrées

α) Une image multiforme et masquée

L'image calculée par l'ordinateur contient une information foisonnante, dont une partie seulement est intéressante pour le problème étudié. L'élève doit répondre à une question très complexe (qui le suivra tout au long de sa vie professionnelle) : où trouver les informations pertinentes dans toute cette richesse ? Comment reconnaître la même information dans deux images totalement différentes ? Une éducation du regard est indispensable pour surmonter des difficultés aussi considérables.

L'image calculée peut être trompeuse. Elle ne signale pas certains points où une fonction n'est pas définie. Des droites (AMk) aberrantes apparaissent lorsqu'on donne à k des valeurs trop voisines de 0 (cela remet en cause toute l'activité...) L'esprit naïf ne peut qu'être dérouté par les "masques" de l'image. Il faudra bien un jour expliquer aux lycéens comment l'ordinateur calcule ses images. Ils seront alors mieux armés pour comprendre l'univers virtuel (calculé) dont on les menace et pour lui résister.

β) Des changements de cadre déstabilisants

L'activité proposée exige de constants et rudes changements de cadre. Cette démarche déstabilise profondément les élèves, en mettant en évidence les nombreuses failles, inévitables à ce stade, dans leurs connaissances et leur compréhension. En voici quelques exemples.

– La deuxième méthode (variations du taux d'accroissement) pose moins de problèmes d'interprétation que la première. Mais la difficulté est de même nature : il s'agit de traduire dans le cadre algébrique une observation graphique. Les deux tracés sur le même écran permettent des rapprochements, mais soulignent aussi les différences. Dans un cas, la dérivabilité résulte de l'existence d'une tangente horizontale à Cg, dans l'autre, c'est l'existence d'un point asymptote à la courbe de t qui conduit à la dérivabilité de g en 0+, son ordonnée donnant la valeur de g'(0+).

La plupart des élèves finissent par réunir ces éléments. Mais les rédactions trahissent les hésitations, les contradictions et les approximations. Pour plusieurs, le cadre graphique est totalement occulté.

> "On représente le taux d'accroissement de g en 0+. On constate que lorsque x tend vers 0+, y tend vers 0 c'est à dire que t(x) tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On peut donc conjecturer que g est dérivable en 0+, la dérivée étant nulle."

Peut-être éliminent-ils ainsi une difficulté qui apparaît clairement dans le texte suivant :

"En traçant t(x), on s'aperçoit que cette courbe tend à s'annuler en 0 lorsque x tend vers 0. On peut donc conjecturer que la fonction g est dérivable en 0+ et que g'(0+) est nulle. En effet, si le taux d'accroissement tend vers 0, alors le coefficient directeur de la tangente tend vers 0 et la dérivée est nulle."

La difficulté de changer de cadre est flagrante. S'y ajoute le mélange des deux méthodes et la confusion (une fois encore) entre une tangente et une sécante, entre une expression et sa limite. Peu nombreux sont ceux qui évitent les différents pièges.

"On remarque que la courbe de t tend vers l'origine (0,0) lorsque x tend vers 0+, donc la limite quand x tend vers 0+ de t égale 0. Donc g est dérivable en 0+".

– La partie théorique (3^{e} méthode) n'a posé aucun problème. Les expressions étaient simples, leur signe connu, le théorème du gendarme a fait le reste. La rédaction de cette partie n'a pas présenté de faiblesses. L'efficacité retrouvée réside probablement dans l'unicité du cadre de ce travail. *Il se fait sur papier, sans interférences avec l'écran.* La difficulté des changements de cadre est ainsi soulignée *a contrario.*

Les difficultés que crée l'informatique par les changements de cadres qu'il impose, participent au dépassement progressif de l'obstacle épistémologique. Ce concept est paradoxal pour l'enseignant : à chaque fois qu'il introduit une perturbation, source de problèmes pour l'élève, il lui donne réellement l'occasion d'apprendre (à condition de doser les perturbations, pour éviter de le noyer dans les difficultés).

γ) Une définition qui accroît la difficulté

Les choses se gâtent à nouveau lorsqu'il s'agit de reconnaître en g' le prolongement par continuité de f'en 0+. Tous voient que g' et f' coïncident sur]0,1]. Ils cherchent la limite de f'(x) quand x tend vers 0+ par les encadrements ou par le développement de Taylor. *Personne n'utilise de méthode graphique : ils sont peu à l'aise dans ce cadre, contrairement à ce qu'on pourrait imaginer* [11]. Ils montrent que cette limite est nulle. Ils ont donc tous les éléments pour conclure. Mais il y a loin de la coupe aux lèvres. Voici ce qu'écrit un des groupes :

"Sur [0,1] on pose h(x) = g'(x). La limite en 0+ de f'(x) est 0. Donc h est prolongée par continuité en 0 et sa fonction est :
h(x) = f'(x) sur]0,1]
h(0) = limite en 0 de f'(x).
La fonction h est donc définie sur [0,1]."

L'introduction d'une fonction "auxiliaire" h est quasi-générale : c'est sans doute l'écho du cours où l'on a indiqué que le prolongement par continuité crée une NOUVELLE fonction. D'où cette amusante définition de h égale à g' sur [0,1] ! Ce groupe écrit très correctement que "h (donc g') prolonge f' par continuité en 0", *mais est incapable de reconnaître ce qu'il a écrit*. La conclusion le prouve : elle est explicitement contenue dans la première phrase, et fait fi de ce que contient de correct et de profond le texte qui la précède. Elle dit à mi-mot ce que pensent

(11) Peut-être sentent-ils confusément que pour faire des mathématiques, il faut se résoudre à quitter ce cadre (pour mieux y revenir lorsque les concepts seront mieux dominés : les courbes seront alors "parlantes").

bien des élèves : *qu'"une fonction définie en 0 est continue en 0"* !

Cette idée erronée et bien ancrée dans les esprits rend la définition actuelle de la limite particulièrement périlleuse pour les élèves. Le théorème qui en résulte, "Si f a une limite en a, cette limite est f(a)", est compris par les élèves d'une toute autre façon : "Si f est définie en a, f(a) est la limite de f en a" (et DONC f est continue en a !). Ils gomment la condition préalable d'existence de la limite (on l'a vu plus haut, pour eux l'existence d'une entité dont on parle va de soi...) et n'en retiennent que la valeur, f(a). Une fonction définie par une formule sur]a,b] et par f(a) = y0 (y0 réel) est *par définition* continue (on trouve cette formulation dans un nombre appréciable de copies rédigées en temps limité).

On se garde bien, au baccalauréat par exemple, de proposer une fonction définie comme suit : f(x) = sin(x)/x sur]0,1] et f(0) = -2. En effet, cette fonction n'a pas de limite en 0+. Mais pour le prouver, il faut utiliser la limite en 0+ de sin(x)/x qui est 1, puis constater que f(0) = -2. f n'a donc pas de limite en 0+ (alors qu'elle coïncide avec sin(x)/x sur]0,1] qui a une limite en 0+ !).

Il serait peut-être temps de revenir à des conceptions plus saines, qui avaient cours il y n'a pas si longtemps.

Une conclusion provisoire

Il est bien difficile pour les élèves de rendre compte par écrit d'une démarche informatique. Ils sont habiles à tirer l'activité informatique sur le terrain ludique. Ils renâclent devant la nécessité de rédiger. Des enseignants (fatigués de lutter ou un peu démagogues ?) se contentent parfois d'une "bonne participation" et confondent l'écume et la vague. Le compte-rendu écrit révèle pourtant ce qui a été saisi et ce qui a résisté. L'enseignant y trouve de précieuses indications sur le chemin parcouru et d'utiles arguments pour sa stratégie (12).

Plusieurs difficultés ont été clairement mises en évidence dans ces travaux.

1) L'outil informatique ne facilite pas la compréhension du concept. Les redoutables changements de cadre imposés au cours de l'activité font apparaître les obstacles importants que rencontrent les élèves dans leur difficile conquête de la notion de limite. On ne peut s'en étonner : si nous sommes en présence d'un obstacle épistémologique, ni l'outil informatique ni aucune technique pédagogique ne peuvent l'aplanir miraculeusement.

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, ils redoutent le cadre graphique à ce stade de l'apprentissage. L'image les trouble autant qu'elle les aide.

2) Les changements de registre et de cadre sont essentiels tout au long de l'apprentissage : ils mettent en évidence les erreurs et les fragilités, mais permet-

(12) L'étude attentive des compte-rendus écrits met en évidence, de façon irréfutable, le fait que la notion de limite est un obstacle épistémologique considérable. J'avoue avoir été surpris par l'étendue et la profondeur des difficultés révélées par les textes des élèves. Elles m'ont permis de mieux mesurer l'effort que leur demande le changement de regard proposé. Le temps que j'y consacrerai à l'avenir sera plus important. Dès la Première, les contre-exemples seront largement étudiés (avec l'outil informatique). J'ai perdu l'illusion qu'en fin de Terminale, la notion de limite est maîtrisée par une majorité d'élèves : il faut poursuivre le travail de consolidation des acquis (limités, hésitants, incertains mais réels) au cours du Deug.

tent ensuite de construire des concepts ayant véritablement un sens pour l'élève. *La répétition, dans la cohérence et sur plusieurs années, de travaux de ce type est le prix à payer pour vaincre l'obstacle.*

3) Contrairement à ce qui se passe dans la vie courante, en mathématiques on se pose des questions d'existence ! Une fonction *peut ne pas avoir* de limite en a. Une courbe *peut ne pas avoir* de tangente en un point. C'est très étonnant, un objet dont on parle pourrait ne pas exister ! Un peu de philosophie les aiderait sans doute à mettre en question quelques idées "raisonnables mais fausses" qui constituent un aspect essentiel de l'obstacle épistémologique. On ne peut faire l'économie de contre-exemples nécessairement délicats (13) si l'on veut ébranler cette "fausse évidence".

Dans les différents bilans, on découvre bien des éléments positifs qui indiquent le chemin dejà parcouru, mais mêlés intimement à de graves confusions et à des idées erronées... Sans conteste, la notion de limite constitue pour les élèves un obstacle épistémologique. Le franchir nécessite un travail supplémentaire, après maturation.

2. AVRIL 95. CINQ MOIS (ET BEAUCOUP DE TRAVAIL) PLUS TARD. LES DIFFÉRENTS ASPECTS DE LA NOTION DE LIMITE : SYNTHÈSE PAR L'ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS DÉLICATES

La seconde activité sur la notion de limite consistait à étudier deux fonctions trigonométriques données par les expressions suivantes :

$f(x) = \sin(x)/\sqrt{(1-\cos(x))}$;
$g(x) = (1-\sin(\pi(x+1)/2))/x^2$.

Il s'agissait d'étudier TOUTES les propriétés susceptibles d'être mises en évidence en Terminale (ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, parité, périodicité, prolongement par continuité, dérivabilité des fonctions prolongées, propriétés géométriques de Cf et Cg). (Voir figures 2 et 3).

L'activité s'est déroulée dans les mêmes conditions que la première. Six heures lui furent consacrées. *Il était exigé de bien distinguer, dans le compte-rendu écrit, les conjectures et leur démonstration.* Aucune méthode n'était imposée.

a) Analyse* a priori *de l'activité.

Pour des élèves qui connaissent quelques formules de trigonométrie (et savent les appliquer), l'étude de ces fonctions présente peu de difficulté. La transformation des expressions de f(x) et de g(x) fournit une clé au problème et rend inutile l'outil informatique. Mais ces élèves se font rares (peu savent d'ailleurs reconnaître ces formules parmi celles dont ils disposent).

L'outil informatique aide à pallier dans certains cas les difficultés qu'il a causées... Les singularités de Cf et Cg révèlent les problèmes théoriques qu'il convient de traiter.

La représentation graphique de f est fort utile : elle fait apparaître à l'œil éduqué, un centre de symétrie O, des discontinuités multiples et conduit à l'idée

(13) *Cf.* note 9.

de périodicité. La réduction de l'ensemble d'étude (à $]0,\pi]$ par exemple) s'impose.

Plus pernicieuse, Cg ne révèle rien d'anormal : il faut apprendre aux élèves à ne pas se fier aux apparences !

La possibilité du prolongement par continuité de g en 0 se lit à l'écran : la démonstration est délicate pour les actuels élèves de Terminale. (Un guidage sera sans doute nécessaire).

Prolonger f par continuité en 0 est impossible. Cela se voit à l'écran. On pourra seulement prolonger à droite (ou à gauche) et étudier les répercussions sur la périodicité. La difficulté à démontrer pourra conduire à transformer les expressions initiales... Cela facilitera aussi l'étude des variations (de f et de g) et de leur dérivabilité.

Ces deux exemples cherchent à convaincre les élèves de fin de Terminale que si l'outil informatique peut être utile, il est parfois plus compliqué à mettre en œuvre et plus délicat à interpréter qu'une démarche théorique préalable, qui transforme le problème et livre des clés. L'activité met en garde, une fois encore, de futurs étudiants contre l'illusion de la toute-puissance et de la simplicité de l'outil informatique.

Une dernière confrontation avec l'obstacle épistémologique permettra de mesurer l'évolution de la question depuis le mois de novembre.

b) Des idées intéressantes issues de pratiques maladroites...

Comme prévu, personne ne songe, dans un premier temps, à transformer les expressions de f et g. C'est sous leur forme initiale qu'elles sont introduites en machine.

Des progrès importants dans le comportement face à l'écran sont perceptibles. La nécessité du travail sur papier pour cerner l'ensemble de définition (confirmant ou infirmant les apparences à l'écran) est comprise. L'unique singularité de g en 0 (invisible à l'écran) est détectée sans difficulté. Celles de f en $2k\pi$ sont confirmées. Les élèves ont gagné en autonomie par rapport à l'outil informatique : ils interprètent mieux ses indications et sont moins troublés par ce qu'il cache. Leur travail sur papier a gagné en efficacité. La réduction de l'intervalle d'étude, plus laborieuse, est réalisée en un temps raisonnable.

Bien que la dérivée de f ait une expression simple, les élèves butent sur les transformations qui conduisent à cette forme intéressante. Pour pallier cette maladresse, un des groupes propose "d'élever f(x) au carré". Son idée est d'éliminer ainsi la racine carrée du dénominateur. Il en profite pour trouver une première simplification par une démarche surprenante : remplaçant $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$, puis par $(1-\cos x)(1+\cos x)$ ces élèves obtiennent : $(f(x))^2 = 1+\cos x$. Malheureusement, ils n'ont pas une claire conscience de la transformation opérée. Ils croient avoir trouvé une autre forme de... f(x). Ils confondent leur démarche avec celle qui consiste à élever les deux membres d'une équation au carré, pour obtenir (si les deux membres ont même signe) une équation EQUIVALENTE. Les convaincre qu'ils ont changé de fonction n'est pas une mince affaire. Les rendre attentifs aux conditions de l'égalité (x différent de $2k\pi$) ne va pas de soi. Il faut un long moment de discussion et de réflexion pour exploiter ce qui est une véritable avancée. Quel rapport y a-t-il entre les variations de f et de f^2 ? Comment revenir à une expression simplifiée de f(x) ? Ces deux questions, longues à émerger, laissent perplexes les compères (et leurs collègues qui se sont emparés de leur idée). L'inévitable erreur : $f(x) = \sqrt{(1+\cos x)}$

est mise en évidence en comparant les représentations graphiques des deux membres. Sa validité sur $]0,\pi]$ finit par être établie, mais la forme générale de f sur son ensemble de définition n'est pas obtenue, à ce stade du travail. C'est l'occasion d'un retour sur le sens du "plus ou moins" dont certains veulent agrémenter l'expression $\sqrt{(1 + \cos x)}$, pour sortir de l'impasse !

Il est incroyable que personne ne songe à employer les transformations de 1+cosx (ou de 1– cosx sur l'expression initiale) pour simplifier de façon définitive f(x) et clore la question. Il ne suffit pas d'avoir un formulaire pour devenir performant !

En tout état de cause, la nouvelle expression de f(x) sur $]0,\pi]$ permet de traiter (à un coût abordable) le problème de la continuité, du prolongement par continuité et de la dérivabilité de la fonction prolongée.

Cg semble admettre Oy comme axe de symétrie. La démonstration de la parité de g est maladroite : la transformation de $\sin(\pi x/2 + \pi/2)$ en $\cos(\pi x/2)$ passe par le développement de sin(a + b) ! Longue hésitation à propos de l'éventuelle périodicité de g. C'est un argument géométrique qui emporte l'adhésion : Cg n'est pas invariante par des translations de vecteur colinéaire à Ox. La définition de la périodicité n'est simple qu'en apparences pour les élèves.

CONCLUSION

a)L'outil informatique remis à sa place

Depuis le mois de novembre, le comportement des élèves face à la notion de limite a profondément changé. Ils passent peu de temps à conjecturer en partant des représentations graphiques. Les conjectures se font plus sûres ("la non-continuité de f était visible sur l'écran, car on observait des coupures dans la courbe représentative."). Elles sont confirmées par l'utilisation de *Derive*. Très rapidement, les élèves passent de l'outil informatique à la tentative de démonstration sur papier, qui occupe l'essentiel du temps des deux dernières séances. Ils semblent avoir compris que la démarche théorique est INDISPENSABLE et qu'elle est A LEUR PORTEE. Ils y ont manifestement pris goût (il n'est pas interdit de penser que le travail de l'année a fait évoluer les esprits). Les compte-rendus d'activité ne font pratiquement pas allusion à l'outil informatique, qui a pourtant joué un rôle important dans l'émergence des idées et des solutions. Mais de nombreuses difficultés techniques et théoriques rendent la levée des formes indéterminées rencontrées, délicate et tâtonnante.

b) Des aides toujours indispensables

Il faut, une fois encore, passer en revue les idées-force qui permettent de lever les indéterminations en Terminale. Reconnaître la proximité formelle d'une expression avec une forme indéterminée du cours n'est pas acquis. La méthode d'encadrement de l'expression indéterminée, dont ils ont mesuré l'efficacité dans de nombreux problèmes, doit leur être rappelée. La plupart des élèves ne se souviennent plus des encadrements de sin(x) et cos(x) dont ils se sont servis à plusieurs reprises en Première et Terminale (ils ont beaucoup de peine à les retrouver dans leurs documents). La transformation des expressions trigonométriques est laborieuse. Sans rappel de méthodes et sans concertation entre les différents groupes, certains compte-rendus auraient été maigres...

c) Des évolutions remarquables

Il n'en demeure pas moins que les travaux remis en fin de parcours montrent des progrès réels dans la compréhension de la notion de limite. Les prolongements par continuité sont opérés avec sûreté, clarté et rigueur. Les méthodes rappelées sont mises en œuvre avec efficacité. La dérivabilité aux points où les fonctions sont prolongées, est traitée avec succès, ainsi que son interprétation géométrique. Plusieurs groupes ont vu la difficulté de concilier les prolongements par continuité de f et la périodicité. L'un d'eux écrit :

> "On peut donc prolonger f par continuité en 0+ et en $2\pi-$ par $f(0) = \sqrt{2}$ et $f(2\pi) = -\sqrt{2}$. Mais on ne pourra prolonger par continuité en 0+ et $2\pi-$ en même temps, car f(0) serait alors différent de $f(2\pi)$ et f ne serait plus périodique. En conclusion, pour que f garde ses propriétés, il faut la prolonger uniquement sur $[0,2\pi[$ ou sur $]0,2\pi]$."

Si la forme de la dernière phrase est contestable, elle traduit néanmoins une compréhension réelle du délicat phénomène étudié (la répercussion d'un prolongement par continuité sur la périodicité).

Certaines remarques orales méritent d'être rapportées parce qu'elles traduisent un rééquilibrage de l'importance relative de la démarche théorique et de l'outil informatique.

> "Si on trouve la transformation de f(x) en $\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $]0,\pi]$, on n'a pas besoin d'informatique pour résoudre le problème."

D'autres ont remarqué (enfin) que *l'outil informatique ne leur donne aucun moyen de démontrer ce qu'il montre*. Il est loin le temps (en début de Première) où certains croyaient que la calculatrice allait les préserver des mathématiques !

Les graves erreurs des premiers travaux ont disparu.
La notion a pris du sens.
L'outil informatique a repris la place qui lui revient.
Il restera aux étudiants à s'affranchir du groupe et des aides pédagogiques pour s'approprier la notion.
L'obstacle épistémologique sera alors franchi (14) !

(14) Il est clair dans mon esprit, qu'en fin de Terminale, l'obstacle épistémologique est apprivoisé, mais pas franchi. Il reste à consolider, à approfondir, à multiplier les exemples et les contre-exemples significatifs au cours du Deug. Il ne suffit pas, pour régler la question, de donner une bonne définition, illustrée par quelques exercices. Il faut faire travailler l'étudiant sur des situations consistantes, en s'appuyant sur ses acquis (il en a et ils sont loins d'être négligeables...) et en explorant ses zones d'ombres (nombreuses et variées...). Aucun cours magistral ne peut remplacer le temps de maturation d'une notion : celle de limite a besoin de plusieurs années pour être pleinement comprise. Faute de l'admettre, on peut toujours décréter que les étudiants sont nuls : c'est faux, c'est injuste, et cela n'apporte aucune solution.
Les modifications (simplifications) des programmes ne répondent pas aux problèmes posés par les obstacles épistémologiques dans l'enseignement. Il faut d'abord les identifier comme tels , puis les traiter en sachant que le prix à payer pour les franchir est élevé. Aucune "astuce pédagogique" n'y suffit. Il faut s'y mesurer longuement. Cela suppose une nouvelle dynamique dans l'enseignement, qui sache intégrer le temps indispensable à la maturation de nouveaux concepts proprement "bouleversants". Les tentatives d'escamotage ou de simplification de ces notions, par nature complexes, sont pitoyables et totalement inefficaces : elles sont source d'ignorance et d'inculture.

BIBLIOGRAPHIE

A) Ouvrages de fond

1) *Le Nouvel Esprit Scientifique :* Gaston Bachelard, PUF, 1934.
2) *Le labyrinthe du continu :* J.-M. Salanskis et H. Sinaceur Eds., Colloque de Cerisy, Springer Verlag, 1992.
3) *Vie et mort de l'image. Une histoire du regard en Occident :* Régis Debray, Folio essais, 1994. (Voir les "Notes de lecture" dans ce numéro de *Repères-Irem.*)
4) *Histoire d'infinis*, Colloque inter-Irem Epistémologie de Brest, 1992, Irem de Brest.

B) Articles, documents

1) *Fenêtre sur courbes. Une approche graphique de l'analyse mathématique :* Raymond Chuseville et Sylviane Gasquet, CRDP de Grenoble.
2) "Mathématiques, mythe ou réalité ?" : Marc Legrand, *Repères-Irem* n°20 et 21. (On y trouvera, entre autres, une très intéressante présentation de la notion d'obstacle épistémologique.)
3) "Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse" : JeanPierre Friedelmeyer, *Repères-Irem,* n°13.
4) "Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente" : Magguy Schneider-Gilot, *Repères-Irem* n°5.
5) "Eppur, si muove..." : Luc Trouche, *Repères-Irem* n°20.
6) "L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a" : Gérard Kuntz, *Repères-Irem* n°11.
7) *Infini mathématique :* J.T. Desanti, Appendice 2 de : *La philosophie silencieuse,* Seuil 1975. (Reprise d'un article de l'*Encyclopedia Universalis sous les rubriques "Infini" et "Infini mathématique".)*

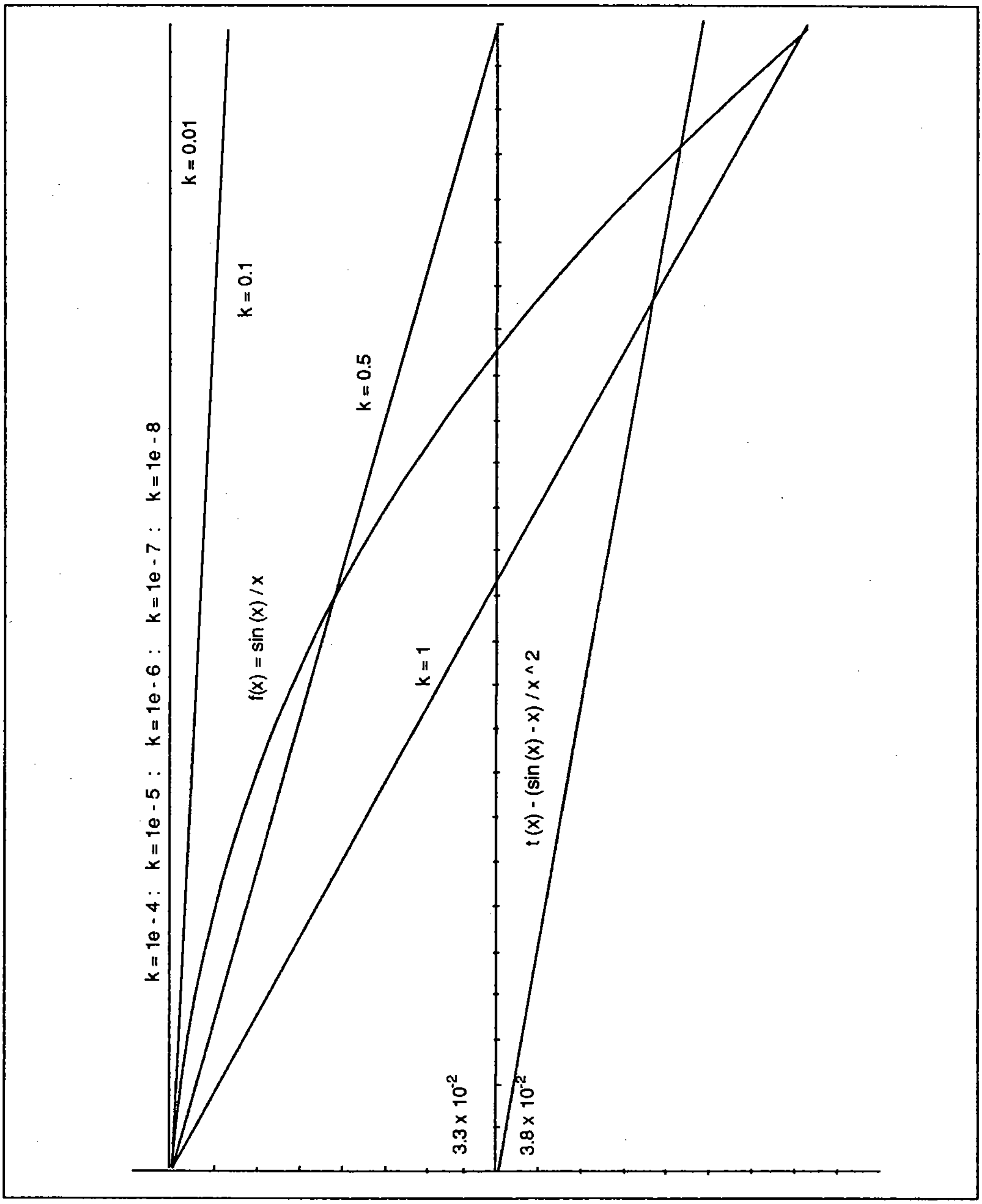
k = 0.01
k = 0.1
k = 0.5
k = 1
k = 1e - 4 : k = 1e - 5 : k = 1e - 6 : k = 1e - 7 : k = 1e - 8
f(x) = sin (x) / x
t (x) - (sin (x) - x) / x ^ 2
3.3 x 10-2
3.8 x 10-2

Figure 1

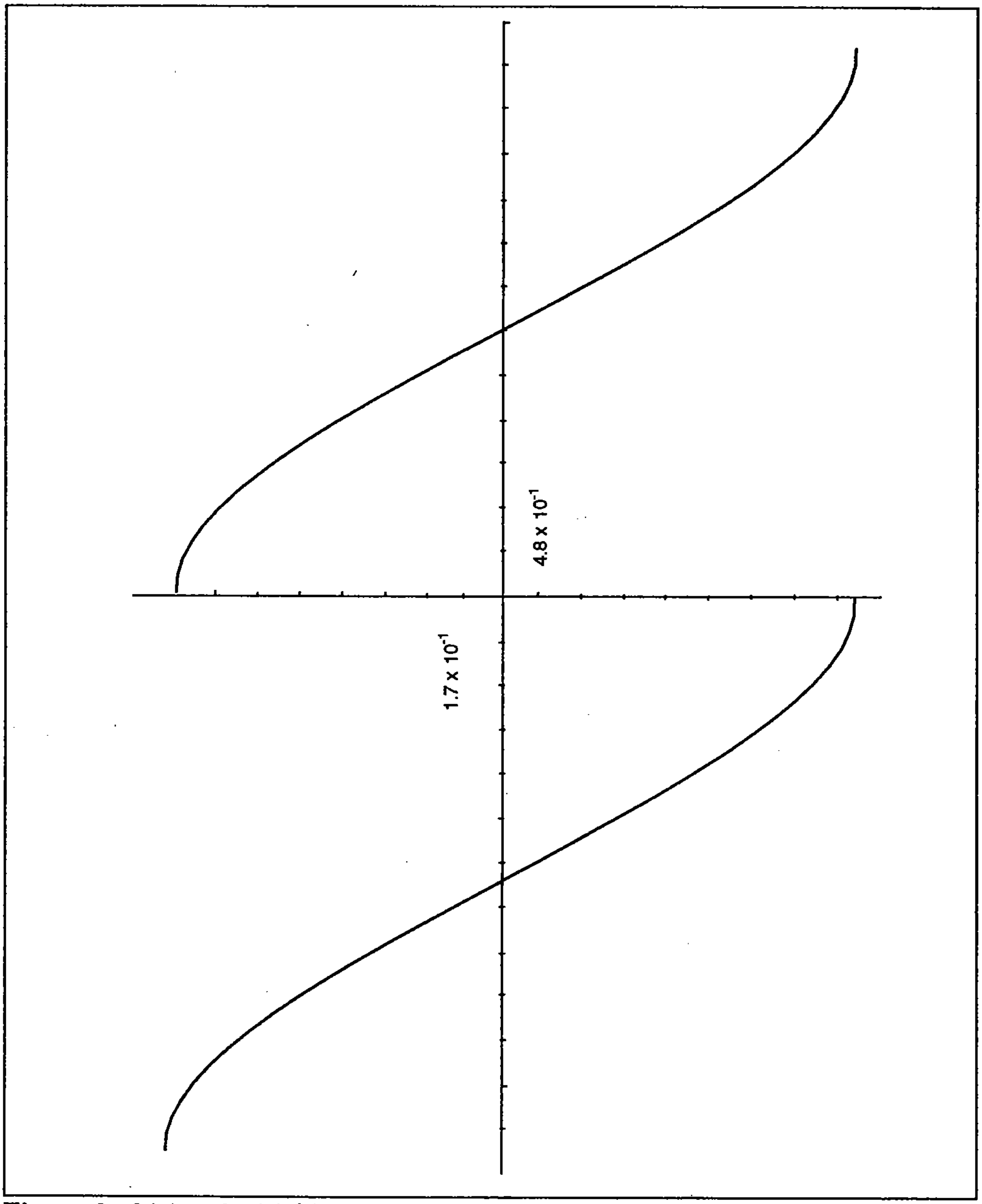

Figure 2 : f (x) = sin (x) / (1 - cos (x)) ^0.5

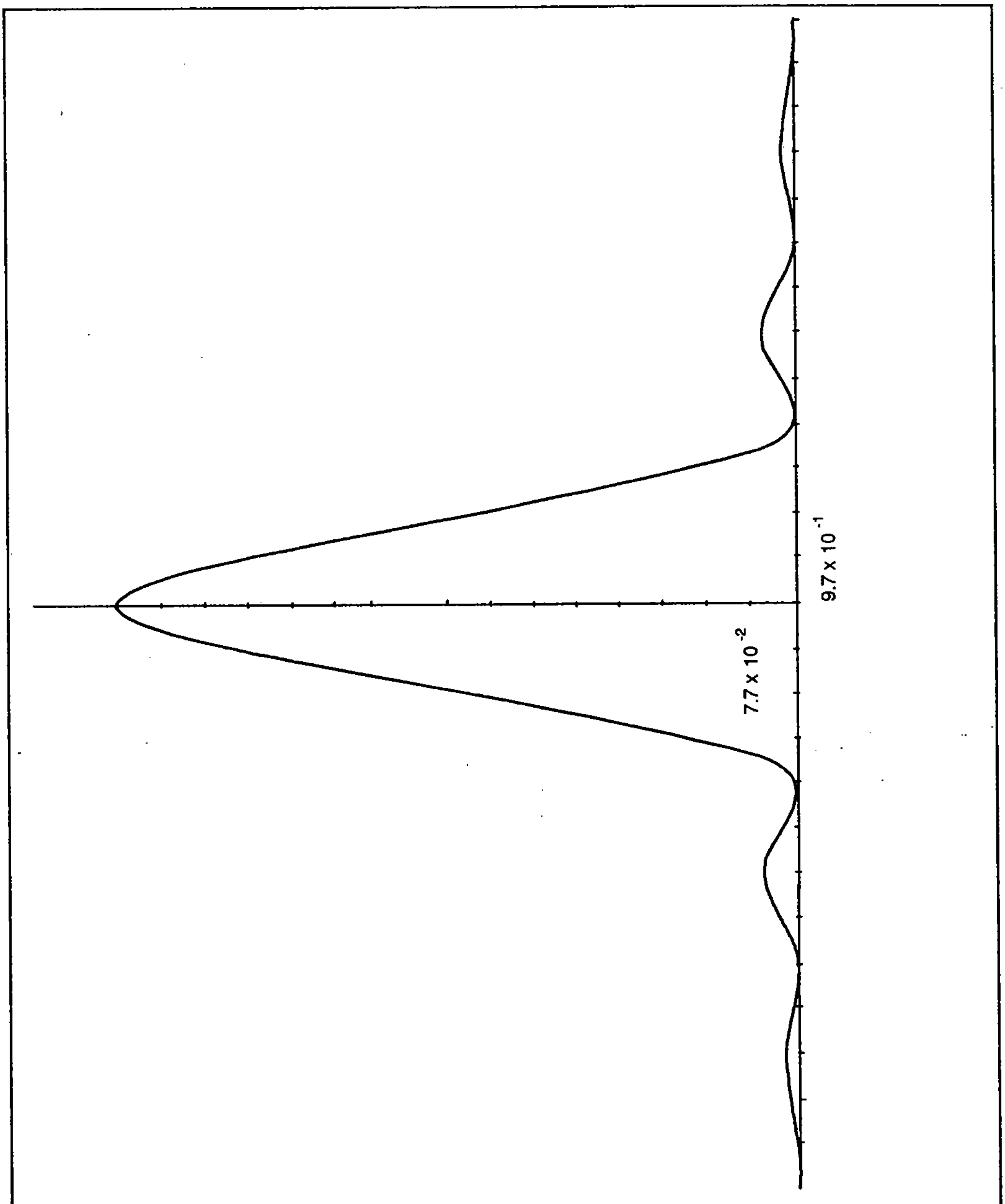

Figure 3 : f (x) = (1 - sin ((p (x+1) / 2)) / x^2