REPERES - IREM . N° 22 - janvier 1996

À PROPOS D'UNE CONJECTURE GÉOMÉTRIQUE EN TERMINALE S

Yves BOUTEILLER
Irem d'Orléans-Tours

Dans cet article l'auteur s'interroge sur la gestion au quotidien de contre-exemples et de conjectures géométriques dans une classe de terminale scientifique. Il s'appuie sur une expérience réellement vécue dans une classe de T.C en 1992.

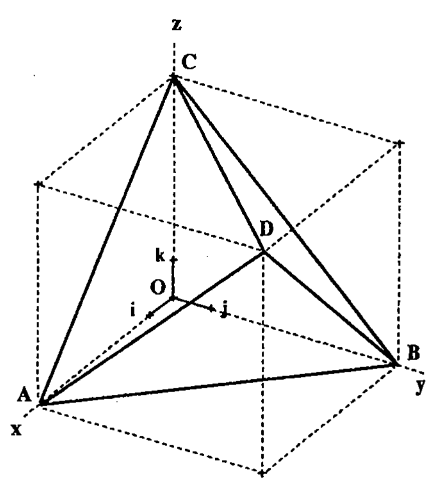
PREMIÈRE ÉTAPE : OÙ LE PROBLÈME EST POSÉ...

Depuis la rentrée on avait travaillé le programme de géométrie de l'espace et, avant d'aborder un autre sujet, il devenait urgent d'évaluer les acquis dans ce domaine.

Avec l'aide d'un collègue, je concoctais donc un exercice sur ce thème pour le prochain contrôle en temps limité.

Voici quelle en était l'idée initiale : à partir de l'un des deux tétraèdres réguliers classiques inscrits dans un cube, bâtir un exercice de géométrie analytique comportant quelques calculs de distances, d'aires, de volumes et des démonstrations utilisant le produit scalaire et le produit vectoriel.

Nous parvenions à nous mettre d'accord sur le texte suivant :



T.C *MATHEMATIQUES DS N°02.* **Lundi 02 Novembre 1992.**

Exercice n°1.

Dans l'espace euclidien orienté $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points : A(6;0;0), B(0;6;0), C(0;0;6), D(6;6;6).

1º) Démontrer que le tétraèdre (ABCD) est régulier.
a) Calculer l'aire de chacune de ses faces et son volume.
b) Soit F le milieu de l'arête [CD] du tétraèdre et $\mathcal{P}$ le plan contenant les points A, B, F. Démontrer que dans la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ le tétraèdre (FABC) devient le tétraèdre (FABD).
En déduire le volume de chacun de ces tétraèdres.

2º) Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre (ABCD). On précisera son centre Ω et son rayon R.

3º) Calculer l'angle $\widehat{A\Omega B}$.
On donnera une valeur approchée de cet angle, en degré, au centième près.

4º) Démontrer que la droite (OΩ) est perpendiculaire au plan (ABC).

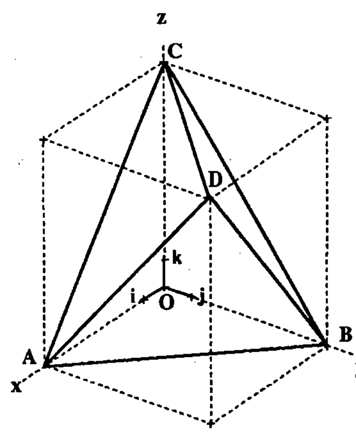
5º) Déterminer une équation cartésienne de la sphère inscrite au tétraèdre (ABCD).

Lors de la correction des copies, je constatais que plusieurs élèves avaient conjecturé que la démonstration de l'égalité des aires des quatre faces suffisait pour déduire que le tétraèdre (ABCD était régulier.

La façon dont cet exercice avait été conçu fournissait aisément un contre-exemple à cette allégation ; il suffisait pour en produire un de déformer le cube en un parallélépipède rectangle de même base en prenant par exemple C(0,0,8), D(6,6,8).

Les faces devenaient isocèles et isométriques donc gardaient la même aire, alors que quatre arêtes sur six s'étaient dilatées.

Je terminais donc ma correction en me promettant de faire reprendre tout l'exercice par les imprudents sur un tel contre-exemple afin de les convaincre de leur erreur.



Quelques jours plus tard, repensant à cette conjecture, je me dis qu'il pouvait être intéressant de tenter de déterminer ***tous les tétraèdres dont les faces ont même aire***. Faute de références purement géométriques sur cette question, je décidais d'attaquer le problème analytiquement avec l'aide précieuse du logiciel DERIVE.

DEUXIÈME ÉTAPE : APPROCHE ANALYTIQUE

Un essai un peu fruste où chaque sommet se trouvait défini par ses trois coordonnées conduisait à résoudre un énorme système du quatrième degré de trois équations à douze inconnues. Cette piste fut bien vite abandonnée, le logiciel ayant déclaré forfait.

Il fallait donc ruser pour réduire le nombre de paramètres effectifs en mettant en œuvre un des principes que je tentais d'inculquer à mes élèves : ***savoir choisir judicieusement le repère.***

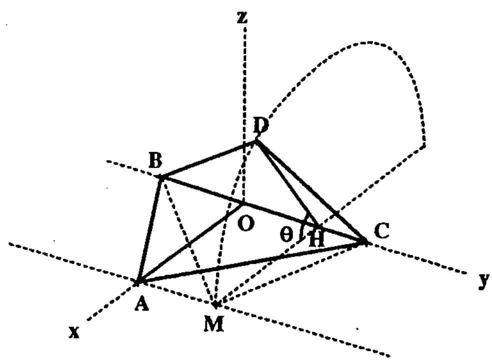
On n'ôte aucune généralité au problème en supposant que la face (ABC) du tétraèdre repose sur le plan (xOy). De même, rien ne s'oppose à ce que :

- l'arête [BC] ait pour support l'axe (y'y),
- l'origine O soit le pied de la hauteur issue du sommet A relative au côté [BC] du triangle (ABC), ou, ce qui revient au même, que le point A soit sur le demi-axe (Ox).

Se trouve ainsi justifié le choix des coordonnées de A, B, C n'utilisant que trois paramètres :

$$A = [a,0,0]\ ,\ \ B = [0,b,0]\ ,\ \ C = [0,c,0]\ .$$

Un nouvel essai prenant trois coordonnées quelconques pour le dernier point n'ayant pas permis de résoudre le problème avec la version de DERIVE disponible en 1992, j'ai dû réduire encore le nombre de paramètres en réalisant d'emblée l'une des contraintes : ***l'égalité des aires des faces (ABC) et (BCD) d'arête commune [BC].***



Si on rabat la face (BCD) dans le plan (xOy), cette égalité d'aire équivaut à celle des hauteurs afférentes à [BC] ; il s'ensuit que le rabattu M du point D est situé sur la droite parallèle à l'axe (y'y) issue de A.

Autrement dit, pour déterminer le point D, il suffit de transformer A par le vissage d'axe (y'y) de vecteur $h\vec{j}$ et d'angle θ.

La détermination du point D nécessite donc deux paramètres h et θ (avec $0 < \theta < \pi$ si on se limite aux tétraèdres situés du demi-espace $0 \leq z$), d'où ses coordonnées : $D = [a \cos \theta,\ h,\ a \sin \theta\ ]$

La traduction analytique des données du problème peut donc faire appel à cinq paramètres.

Classiquement, dans l'espace, le calcul de l'aire d'un triangle est ramené à celui de la norme d'un produit vectoriel :

$$\mathrm{Aire}(M,N,P) = \|\ \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}\ \| / 2$$

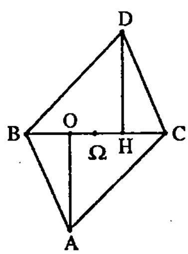
On vérifie formellement l'égalité des aires des faces (ABC) et (BCD) :

$$\mathrm{Aire}(A,B,C) = \mathrm{Aire}(B,C,D) = a\ |\ b - c\ |\ / 2\ .$$

On calcule de même les aires des faces (ABD) et (ACD).

La traduction de l'égalité de ces aires (ou mieux, de leurs carrés) conduit à une équation :

$a^2(b + c - h)(c - b)(\cos\theta - 1) / 2 = 0$ dont la seule solution menant à un tétraèdre non dégénéré est : $h = b + c$.



Géométriquement cette condition signifie que les segments [BC] et [OH] ont même milieu.

Autrement dit, puisque les points O et H sont respectivement les pieds des hauteurs afférentes au côté commun [BC] des faces (ABC) et (BCD) dont les hauteurs [AO] et [DH] sont égales, on conclut que :

le patron de ces deux faces se rassemble en un parallélogramme (ABDC).

Parvenu à ce point, j'aurais pu en finir avec ce problème en permutant le rôle des faces, mais il s'est avéré plus fructueux de poursuivre l'étude avec DERIVE. En effet, disposant déjà de deux paires de faces opposées de même aire, il ne reste plus qu'à égaler les carrés des aires des faces (ABC) et (ABD) pour en achever la résolution.

On obtient une équation :

$$a^2(a^2\cos\theta - a^2 - 2bc)(\cos\theta + 1) / 4 = 0$$

dont la seule solution non dégénérée aboutit à la détermination de l'angle θ tel que :

$$\cos\theta = (a^2 + 2bc) / a^2 .$$

L'existence de cet angle est assujettie à la contrainte : $-1 < \cos\theta < 1$ qui se traduit par les conditions suivantes : $-a^2 < bc < 0$ que l'on peut interpréter géométriquement :

- $a^2 + bc > 0$, or $a^2 + bc = \vec{AB}.\vec{AC}$, donc il faut que : $\cos\hat{A} > 0$; autrement dit l'angle $\hat{A}$ du triangle (ABC) doit être aigu,
- $bc < 0$, donc O doit être entre B et C ; autrement dit les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle (ABC) doivent aussi être aigus.

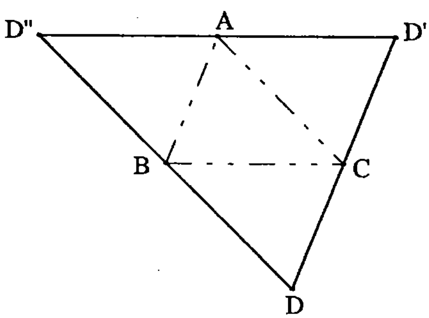
Conclusion : ***pour que le problème ait des solutions, il est nécessaire que le triangle de base (ABC) soit acutangle, c'est-à-dire, ait tous ses angles aigus.***

Sous réserve de respecter ces conditions, on peut déterminer formellement l'angle , puis vérifier l'égalité des aires des quatre faces du tétraèdre (ABCD) (*cf.* listage en annexe). Enfin, on peut calculer les longueurs des arêtes ; celles des arêtes [AD], [BD], [CD] font intervenir la valeur absolue de l'expression $bc(a^2 + bc)$. Or on vient de démontrer que cette expression est négative, donc on peut lui substituer son opposée et constater alors que les paires d'arêtes opposées ont même longueur.

Conclusion : ***les quatre faces du tétraèdre (ABCD) sont acutangles et isométriques.***

Plus précisément, tous les tétraèdres ayant quatre faces de même aire sont obtenus à partir d'un patron construit comme suit :

– tracer un triangle $\mathcal{T}$ = (D'D"D) acutangle,
– tracer le triangle (ABC) dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle $\mathcal{T}$.



Remarques :

– Ce compte-rendu relate le résultat d'une recherche de quelques heures avec DERIVE qui n'aurait sans doute jamais été tentée sans l'accès facile à ce logiciel qui m'a épargné tous les calculs fastidieux et assuré de leur faisabilité.

– Il montre aussi, à l'évidence, que sans une préparation du travail par l'utilisateur, le logiciel n'est d'aucune utilité puisqu'il ne peut traiter le problème à l'état brut. Il y a sans doute là une piste à explorer avec les élèves sous forme de T.D. ; l'élève deviendrait un pourvoyeur d'idées à destination du logiciel et devrait donc apprendre à bien maîtriser les méthodes.

– On notera que l'obtention de la conclusion complète est le résultat du nécessaire va-et-vient entre calcul analytique et interprétation géométrique des relations trouvées.

– Enfin, je soupçonnais que cette conjecture apparemment ouverte, avait déjà été résolue géométriquement par quelque géomètre de talent. En Mars 1994 est venue la preuve espérée.

TROISIÈME ÉTAPE : APPROCHE PUREMENT GÉOMÉTRIQUE

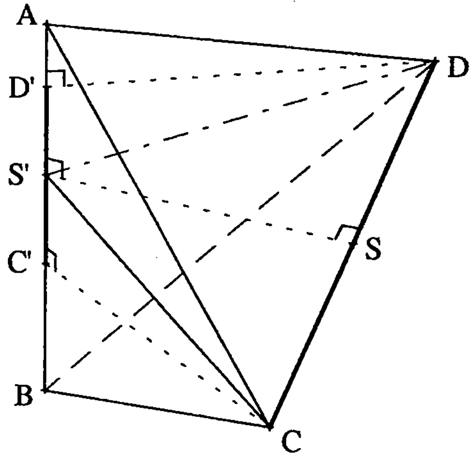
Voici une justification inspirée du

"Premier livre du TÉTRAÈDRE"

de P. COUDERC et A. BALLICCIONI (Gauthier-Villars, Paris, 1935) dont les références m'ont été fournies par Michel CARRAL (IUFM de Toulouse) et Jean-Pierre MANCEAU (IUFM d'Orléans), complétées de suggestions de Michel DOFAL (IUFM d'Orléans).

Lemme.

Si les faces (ABC) et (ABD) d'arête commune [AB] d'un tétraèdre (ABCD) ont même aire, alors la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD) passe par le milieu S de l'arête [CD].



Soit S le milieu de l'arête [CD] et C', S', D' les projetés orthogonaux respectifs de C, S, D sur la droite (AB). Le transfert du milieu par projection orthogonale induit que S' est le milieu du segment [C'D'].

D'où : S′ C′ = S′ D′.

Les deux faces (ABC) et (ABD) ayant la même aire et une arête commune [AB], les hauteurs afférentes à cette arête ont même longueur. Donc CC′ = DD′.

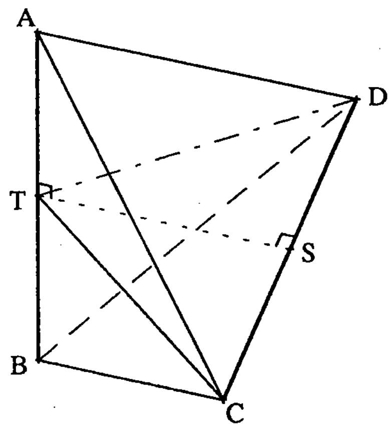
Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles (S′CC′) et (S′DD′) permet alors de déduire : S′C = S′D et comme S est le milieu de [CD], il s'ensuit que la droite SS′ est la médiatrice du triangle isocèle (CS′D) issue de S'.

En conséquence, les droites (SS′) et (CD) sont perpendiculaires et comme par hypothèse les droites (SS′) et (AB) le sont aussi, on conclut que la droite (SS′) est bien la perpendiculaire commune aux deux droites (AB) et (CD), d'où le lemme.

Conséquence : Si les deux faces (ABC) et (ABD) d'arête commune [AB] ont même aire ainsi que les deux faces (ACD) et (BCD) d'arête commune [CD], alors la droite (TS) qui passe par les milieux respectifs T et S des arêtes [AB] et [CD] est la perpendiculaire commune à ces deux arêtes.

Il s'ensuit que cette droite (TS) est l'axe d'un demi-tour laissant globalement le tétraèdre (ABCD) invariant.

On en déduit que ces faces (ABC) et (ABD) d'arête commune [AB] (resp. (ACD) et (BCD) d'arête commune [CD]) ont non seulement même aire, mais sont isométriques deux à deux. En particulier, sous ces hypothèses, on a : AD = BC et AC = BD.



Théorème : ***Si les quatre faces d'un tétraèdre (ABCD) ont la même aire, alors elles sont deux à deux isométriques.***

Il suffit pour le montrer de faire jouer à une autre paire d'arêtes opposées le rôle joué dans le raisonnement précédent par la paire d'arêtes {[AB],[CD]}.

Remarque : Les points T et S′ étant maintenant confondus, on déduit que les projetés orthogonaux respectifs C' et D' de C, D sur la droite (AB) sont symétriques par rapport au milieu T de l'arête [AB], d'où le patron déjà décrit pour la méthode analytique. Enfin il resterait à expliciter pourquoi un tel patron ne peut se recoller en un tétraèdre non dégénéré si, et seulement si, il ne présente aucun angle obtus.

EN GUISE DE CONCLUSION...

– L'approche géométrique, séduisante à priori, semble difficile à proposer en classe de terminale S sous forme de problème ouvert. Elle nécessiterait un guidage de l'enseignant pour donner lieu à une recherche en temps libre.

– Le thème "contre-exemples en géométrie de l'espace" semble prometteur ; en effet en géométrie plane, les conjectures fausses et résistantes sont relativement rares dans la mesure où la réalisation de figures soignées suffit en général pour les infirmer. Dans l'espace, il n'en va pas de même ; que l'on songe par exemple à l'existence d'un orthocentre pour un tétraèdre quelconque ! Comme dans cet archétype, il est facile dans le problème proposé ici d'infirmer la conjecture, mais moins évident de déterminer la classe des tétraèdres qui la satisfont.

– A la réflexion, j'ai regret, lors de ma correction en classe de ce devoir, de ne pas avoir renvoyé en T.D. la recherche de contre-exemples plutôt que d'en offrir un tout fait ; l'impact en eut sans doute été plus fort. Les contre-exemples ne sont-ils pas trop souvent des garde-fous posés prématurément par l'enseignant avant que l'élève ait été tenté par quelque folie ?

ANNEXE - LISTAGE DE L'APPROCHE ANALYTIQUE SOUS DERIVE :

1: "**"

2: "******** DETERMINATION DES TETRAEDRES EQUIFACIAUX *********"

3: "**"

4 : PV(u, v):=PROD_VEC(u, v)

5: $\text{Aire}(M,N,P) := \frac{1}{2}\, |\text{PV}(N-M,P-M)$

6 : "++"

7 : $a > 0$

8 : A:=[a,0,0]

9 : B:=[0,b,0]

10: C:=[0,c,0]

11: $0 < \theta <$

12: D:=[a COS(θ),h,a SIN(θ)]

13: "++"

14: $\text{Aire}(A,B,C) = \frac{a\,|b-c|}{2}$

15: $\text{Aire}(B,C,D) = \frac{a\,|b-c|}{2}$

16: $\text{Aire}(A,B,D) = \frac{a\sqrt{2b(h-b)\text{COS}(\theta) + a^2\text{SIN}(\theta)^2 + 2b^2 - 2bh + h^2}}{2}$

17: $\text{Aire}(A,C,D) = \frac{a\sqrt{2c(h-c)\text{COS}(\theta) + a^2\text{SIN}(\theta)^2 + 2c^2 - 2ch + h^2}}{2}$

18: "++"

19: $\text{Aire}(A,B,D)^2 - \text{Aire}(A,C,D)^2 = 0$

20: $\dfrac{a^2(b+c-h)(c-b)(COS(\theta)-1)}{2}=0$

21: h:= b + c

22: "++"

23: $Aire(A,B,D)=\dfrac{a\sqrt{2bcCOS(\theta)+a^2SIN(\theta)^2+b^2+c^2}}{2}$

24: $Aire(A,C,D)=\dfrac{a\sqrt{2bcCOS(\theta)+a^2SIN(\theta)^2+b^2+c^2}}{2}$

25: $Aire(A,B,C)^2 - Aire(A,B,D)^2 = 0$

26: $\dfrac{a^2(a^2COS(\theta)-a^2-2bc)(COS(\theta)+1)}{4}=0$

27: $a^2\ COS(\theta) - a^2 - 2bc = 0$

28: $COS(\theta)=\dfrac{a^2+2bc}{a^2}$

29: $-1<\dfrac{a^2+2bc}{a^2}<1$

30: $-1< 1 + \dfrac{2bc}{a^2}<1$

31: $-2< \dfrac{2bc}{a^2}<0$

32: $-a^2 < bc < 0$

33: $\theta := ACOS\left[\dfrac{a^2 + 2\,b\,c}{a^2}\right]$

34: $Aire(A,B,D)=\dfrac{a\ |b-c|}{2}$

35: $Aire(A,C,D)=\dfrac{a\ |b-c|}{2}$

36: "++"

37: $|D-A| = \dfrac{\sqrt{4\,|b\,c\,(a^2+b\,c)| + a^2\,(b+c)^2 + 4\,b^2\,c^2}}{a}$

38: $|D-C| = \dfrac{\sqrt{4\,|b\,c\,(a^2+b\,c)| + a^4 + a^2\,b\,(b+4\,c) + 4\,b^2\,c^2}}{a}$

39: $|B-D| = \dfrac{\sqrt{4\,|b\,c\,(a^2+b\,c)| + a^4 + a^2\,c\,(4\,b+c) + 4\,b^2\,c^2}}{a}$

40: $bc\,(a^2 + bc) < 0$

41: $|B-A| = \sqrt{a^2 + b^2}$

42: $|D-C| = \sqrt{a^2 + b^2}$

43: $|C-A| = \sqrt{a^2 + c^2}$

44: $|B-D| = \sqrt{a^2 + c^2}$

45: $|D-A| = |b-c|$

46: $|C-B| = |b-c|$

47: "**"