REPERES - IREM . N° 22 - janvier 1996

LA NOTION DE CONTRE-EXEMPLE AU COLLÈGE

Rémi DUVERT
Irem de Picardie

Au départ, un constat

Initier les élèves au raisonnement, et à la démonstration, sont des objectifs primordiaux de notre enseignement ; mais ce n'est pas une tâche facile, et les échecs restent nombreux au collège : je n'insisterai pas sur ce constat de départ, bien connu des professeurs de mathématiques, sinon pour rappeler quelques-uns des problèmes que nous rencontrons chez un certain nombre d'élèves :

– ils ne voient pas l'intérêt de démontrer... surtout ce qu'ils estiment évident ou ce que d'autres ont démontré avant eux.
– ils pensent que pour démontrer une assertion “générale”, il suffit de la vérifier sur quelques exemples...
– pour une démonstration dans le domaine géométrique, ils estiment qu'un dessin a valeur de preuve...
– ils ont tendance à croire que lorsqu'un grand nombre de personnes pensent qu'une phrase est vraie, alors elle l'est...

Quelques idées qui guident mon action

On pourrait dire que ce sont des hypothèses au sens mathématique, mais je ne vais pas faire, dans cet article, une démonstration... ; tout au plus exprimer quelques opinions personnelles et apporter le témoignage d'un praticien.

a) tout d'abord, il me semble que pour comprendre les mathématiques, et leurs spécificités, il est nécessaire d'en saisir la logique interne, mais aussi de les voir "de l'extérieur", autrement dit de pointer les ressemblances et les différences avec, disons pour simplifier, la "vie courante". D'autant plus qu'une grande partie de l'apprentissage des mathématiques passe par l'utilisation de la "langue naturelle" (le français) et que celle-ci est codifiée différemment suivant les situations ; par exemple, lorsqu'on dit à un enfant : "si tu es sage, tu auras un gâteau", il est sous-entendu que s'il n'est pas sage, il n'en aura pas... Alors qu'en classe de mathématiques, lorsqu'on lui dit "si un entier se termine par 6, il est pair", cela ne veut pas dire que s'il ne se termine pas par 6, il n'est pas pair.

b) d'autre part, une des composantes essentielles de l'apprentissage, à mon avis, est l'activité d'explicitation (de verbalisation, de formalisation...). D'où l'utilité d'énoncés clairs, comme par exemple : *"en mathématiques, pour prouver qu'une phrase est fausse, il suffit de donner un seul contre-exemple"*.

Cela ne veut pas dire que ces "principes de base" sont à donner d'emblée aux élèves : d'une part cela donnerait un caractère trop dogmatique aux mathématiques, et d'autre part il est plus efficace d'en faire découvrir l'utilité, le sens, aux élèves, au moyen d'activités adaptées, et de les faire formuler par les élèves eux-mêmes.

Remarque : énoncer une règle commençant par *"en mathématiques, ..."* ne signifie pas qu'elle ne s'applique pas hors des mathématiques ; on peut d'ailleurs, à ce sujet, profiter d'un travail dans notre discipline pour appréhender les ambiguïtés ou les erreurs des raisonnements courants.

c) Enfin, je pense qu'on peut améliorer la réussite de nos élèves dans le domaine de la démonstration en commençant l'initiation dès la classe de sixième (et même avant) et en graduant plus efficacement l'enseignement des compétences visées, sans oublier tout ce qui concerne les liens entre le langage et le raisonnement.

Dans cette optique, il me semble que les situations de justification et d'argumentation sont de bons supports pour cette préparation. A propos des mots "justification" et "argumentation", et sans entrer dans les détails, je fais la distinction suivante :

– il y a situation de justification lorsque l'élève, individuellement, oralement ou par écrit, doit expliquer ou prouver le caractère de vérité d'une phrase déclarative exprimée ; par exemple un énoncé peut contenir "justifie ta réponse" (cette consigne peut aussi être implicite).

– il y a situation d'argumentation lorsqu'au sein d'un groupe, il y au moins deux thèses différentes à défendre et que chacun essaie d'apporter des arguments en faveur de l'une d'elles ; dans notre enseignement, ces situations sont essentiellement orales, dans le cadre de la classe.

A propos de la notion de contre-exemple

a) Tout d'abord il me semble qu'au collège, on peut affirmer qu'en mathématiques, une phrase de type déclaratif est soit vraie, soit fausse (contrairement à beaucoup de phrases de la vie courante, pleines de nuances).

Bien sûr, ce n'est pas tout à fait exact en "hautes mathématiques", puisqu'un énoncé peut être "indécidable", dans le cadre d'un système formel donné (voir par exemple les travaux de Gödel). Cependant, à notre niveau d'enseignement, l'existence d'une position claire ("une phrase mathématique est soit vraie, soit fausse") me paraît nécessaire pour aider les élèves à choisir, à argumenter, à bâtir leurs raisonnements, etc.

Mais comment amener les élèves à donner du sens à cette position ? Comment replacer *chaque* travail que l'on propose dans le cadre de *vrais problèmes?* C'est une de mes difficultés d'enseignant...

J'ai choisi de parler ici d'une notion, parmi d'autres ; mais cela ne veut pas dire que je la présente, en classe, isolément : j'essaie, dans la mesure du possible, de profiter des occasions qui se présentent (la résolution d'un problème, une question posée par un élève...), et de la relier au maximum d'autres notions.

b) Cela dit, il me paraît intéressant d'enseigner, au collège, la notion de contre-exemple, et cela pour plusieurs raisons :

– c'est une "entrée" possible pour donner plus de sens à la démonstration mathématique : on peut dire en effet qu'une conjecture sera validée lorsqu'on sera sûr qu'il n'y a pas de contre-exemple ; et c'est le caractère fastidieux de la recherche de toutes les possibilités de contre-exemples qui peut faire saisir l'utilité de la démonstration au sens classique du terme...

– c'est une bonne occasion de pointer les différences entre le raisonnement mathématique et la "logique commune" : en effet, dans la vie courante, le fait d'avoir un contre-exemple ne suffit pas, en général, à prouver qu'une affirmation est fausse : témoin l'expression bien connue *"c'est l'exception qui confirme la règle"* ! (pour ne pas alourdir cet article, je ne développerai pas ce dernier point).

– la notion de contre-exemple se prête bien à un travail interdisciplinaire.

– c'est, je crois, une notion que les élèves assimilent relativement facilement, ou, du moins, relativement rapidement. Encore faut-il (comme tout le reste) y travailler spécifiquement et garder en tête que ce n'est quand même pas évident pour un certain nombre d'élèves...

c) Par ailleurs nous ne devons pas négliger les obstacles linguistiques à l'acquisition de la notion de contre-exemple :

Citons d'abord l'omission courante en mathématiques, dans les phrases qui ont un caractère général, des mots comme "forcément", "toujours", etc. Cela est renforcé par l'emploi de l'article "un"... On comprend pourquoi un élève peut croire que la phrase : "si un quadrilatère a quatre angles droits, c'est un carré" est vraie, puisqu'elle s'applique à un cas (le dessin qu'il a fait...).

Il y a également le fait de croire que la négation de "tous" est "aucun" : par exemple, si on pense que la négation de "tous les quadrilatères qui ont quatre angles droits sont des carrés" est "aucun quadrilatère ayant quatre angles droits n'est un carré", il y aura conflit avec le fait qu'on sait bien que les carrés ont quatre angles droits ; on pourra alors en déduire, à tort, que la "phrase-négation" est fausse, et donc que la phrase de départ est vraie.

Un exemple de séquence de classe

Le dispositif décrit ci-dessous peut servir à introduire la notion de contre-exemple. Il peut être mis en place dès la classe de sixième, à condition, bien sûr, d'adapter les phrases-supports.

a) test individuel

Dans une première phase, on demande à chaque élève de donner (par écrit) la valeur de vérité de quelques phrases données (voir exemples ci-dessous, paragraphe e); il a le choix entre trois types de réponses : "vrai", "faux", ou "je ne sais pas" ; on peut inciter à utiliser du brouillon.

Si l'on s'en tenait là, on pourrait certes connaître le nombre de réponses erronées, mais cela apporterait peu de renseignements sur les raisonnements des élèves : l'examen des justifications (voir ci-après) montre, en particulier, qu'on peut difficilement conclure que tous les élèves qui ont répondu "faux", pour une phrase qui l'est, ont vraiment compris pourquoi.

b) expression écrite individuelle des justifications

On demande ensuite à chaque élève d'expliquer par écrit ses choix : "je pense que la phrase n°... est vraie (fausse) parce que...", ou "je ne sais pas si la phrase n°... est vraie ou fausse, parce que..." ; durant cette phase, l'élève peut changer d'opinion (auquel cas il l'écrit : "j'ai changé d'avis, je pense maintenant que la phrase n°... est... parce que..."), mais il ne doit pas modifier ses réponses sur la feuille de test. Le brouillon est toujours autorisé.

L'analyse des productions d'élèves est très instructive, ne serait-ce que par leur diversité (on en trouvera un exemple plus loin).

Cette phase a l'avantage de faire réfléchir l'élève et de lui faire expliciter son raisonnement ; mais elle ne lui permet pas de le valider ; avant de faire intervenir l'opinion du professeur, il semble important qu'un débat puisse avoir lieu entre les élèves : on utilise alors le "conflit socio-cognitif" comme moteur de l'apprentissage.

c) reprise de la phase précédente en petits groupes

Le professeur peut, ici, expliciter les objectifs du travail engagé et expliquer pourquoi il ne donne pas tout de suite les réponses ; il peut aussi évoquer l'importance de l'évolution des opinions.

Les élèves se regroupent par trois ou quatre ; ils doivent, dans chaque groupe, se mettre d'accord sur une réponse ("vrai" ou "faux") pour chaque phrase, et écrire leurs choix (une feuille par groupe) ; ils peuvent rédiger leurs justifications ; ils savent qu'ils auront à les exposer, lors de la phase suivante, au reste de la classe.

Pour le professeur, cette phase est un moment privilégié pour observer les élèves, écouter leurs argumentations, et pour comprendre les sources de leurs erreurs ; lors des discussions entre élèves (souvent animées...), il peut, si besoin, les diriger un moment (notion de débat, d'argument...), mais sans induire les réponses, bien entendu.

d) discussion en classe entière et "institutionnalisation"

Les phrases sont reprises une par une, et, chaque fois, la parole est donnée à des partisans des deux opinions opposées (vrai / faux) ; un débat s'engage alors... ; il faut, ici, distinguer les phrases vraies des phrases fausses : celles-ci sont en général plus faciles à invalider, et même si les élèves ne connaissent pas le mot "contre-exemple", ils en saisissent assez vite le sens.

Après accord et validation, on peut alors formaliser, et les élèves peuvent écrire, par exemple :

– "cette phrase est fausse : pour le prouver, il suffit de donner un seul contre-exemple : ...".
– "cette phrase est vraie : pour le prouver, un ou plusieurs exemples ne suffisent pas ; on peut alors faire appel à tel "outil" (une propriété, un théorème, une définition...) : ...".

e) quelques phrases pouvant servir de support à cette activité :

- ABCD a quatre angles droits ; on en déduit que ABCD est un carré.
- Un nombre entier qui est multiple de 3 est aussi multiple de 9.
- Lorsque deux droites se croisent en un seul point, elles sont perpendiculaires.
- Les diagonales de ce parallélogramme ont la même longueur ; donc c'est un rectangle.
- Les nombres entiers qui sont pairs se terminent par le chiffre 2.
- Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.
- Comme $a > 1$ et $b > 1$, $a \times b > 1$.
- Un triangle équilatéral est un triangle isocèle.
- Si on sait que la somme de deux nombres m et n est positive, alors on peut dire que m et n sont positifs.
- Etant donné que les longueurs PA et PB sont égales, le point P est le milieu de [AB].

Un aperçu des types de justifications des élèves

Je prendrai comme exemple la phrase (fausse, lorsqu'on se place, implicitement ou non, dans l'ensemble des quadrilatères) :

" ABCD a quatre angles droits ; on en déduit que ABCD est un carré."

Dans ce qui suit, les phrases entre guillemets sont des transcriptions de productions d'élèves, qu'ils ont écrites après "je pense que la phrase est... parce que" (seule l'orthographe a été éventuellement corrigée).

Cette petite étude porte sur quatre classes : une sixième (22 présents), une cinquième (23 présents), une quatrième (24 présents), et une troisième (20 présents).

1er cas : la phrase donnée est considérée comme vraie par l'élève

C'est le cas le plus courant, et de loin, en 6e et 5e. On rencontre à ce propos plusieurs sortes de justifications :

a) la phrase qui est censée justifier est fausse, mais cohérente avec l'idée que la phrase donnée est vraie : exemples :

"seuls les carrés ont 4 angles droits."
"il n'y a que le carré qui a quatre angles droits."

"quatre angles droits forment un carré."
[5 élèves de sixième, 1 de cinquième, 1 de *quatrième, 1 de troisième]*

Ces élèves ont fait une erreur dans le domaine des connaissances mathématiques, mais leur "raisonnement" est correct.

b) la phrase qui est censée justifier est vraie, mais justifie, en fait, la réciproque de la phrase donnée : exemples :

"le carré a bien 4 angles droits."
"dans un carré il y a 4 angles droits."
"je vois sur ce carré ci-dessus 4 angles droits."
"les carrés ont 4 angles droits et ce ne serait pas des carrés s'il n'y avait pas 4 angles droits."
[7 élèves de sixième, 3 de cinquième, 2 de quatrième]

Ces élèves considèrent peut-être qu'une implication est toujours une équivalence, ou même qu'une phrase exprimant une implication veut dire la même chose que la phrase réciproque.

Cas particulier : le dessin montre que les angles droits en question sont ceux formés par les deux médianes du carré. *[2 élèves de sixième]*

c) l'élève écrit une liste (même restreinte) de propriétés qu'il connaît à propos du carré : exemples :

"il a 4 côtés, 4 angles droits."
"il y a 4 angles, 4 coins, voir ci-dessous." (dessin d'un carré avec codage des angles droits).
"BC $\perp$ DC ; AD $\perp$ DC ; les diagonales se coupent en leur milieu ; par conséquent : si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, ses côtés opposés de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré, et on sait qu'un carré a quatre angles droits ; donc ABCD a 4 angles droits."
[2 élèves de sixième, 2 de cinquième, 2 de quatrième]

Ces élèves "étalent leurs connaissances" ; il va falloir travailler sur la notion de propriétés caractéristiques.

d) autres cas :

"si A,B,C,D, ont la même longueur et qu'ils sont parallèles, c'est un carré."
"ici je vois un carré" (dessin d'un carré, sans codage des angles droits).
"ce que dit la phrase est juste."
"un carré a quatre angles droits car il y a quatre côtés."
"le dessin ci-dessous représente les angles droits alors ABCD a quatre angles droits alors ABCD est un carré." (le dessin ne montre que deux segments, perpendiculaires et de même longueur).
"chaque angle mesure 90º ; normalement en calculant tous les angles on doit arriver à un résultat de 180º."
[2 élèves de sixième, 3 de cinquième, 1 de quatrième]

Et, pour faire la transition avec le paragraphe suivant :

"je pense que cette réponse est vraie mais aussi que ça peut être aussi un autre quadrilatère : un rectangle car il a aussi 4 angles droits." *[1 élève de quatrième]*

2^e cas : la phrase donnée est considérée comme fausse par l'élève

a) le rectangle est cité comme contre-exemple : exemples :

"il n'y a pas que le carré qui a quatre angles droits, il y a aussi le rectangle."
"ce n'est pas forcément un carré, c'est peut-être un rectangle." (suivent deux dessins : un rectangle non carré, et un carré).
"la description peut aussi concerner un rectangle."
"un carré a non seulement 4 angles droits et 4 côtés égaux ; cette phrase peut aussi s'appliquer pour un rectangle."
"cela peut être à la fois un carré ou un rectangle."
"ça peut être un rectangle, car il n'y a pas de longueur."
[1 élève de sixième, 8 de cinquième, 10 de quatrième, 17 de troisième]

Remarque : ces élèves oublient tous d'accoler "non carré" au mot "rectangle" (pour eux, un carré n'est pas un rectangle...).

b) raisonnement juste mais sans citation du mot "rectangle" : exemples :

"il ne suffit pas qu'il y ait 4 angles droits il faut aussi que les 4 côtés soient de la même longueur."
"il peut y avoir 4 angles droits mais il faut que les 4 côtés soient égaux." (suivent deux dessins : un rectangle non carré, barré en rouge, et un carré, entouré en rouge).
"il peut très bien ne pas avoir les 4 côtés de même longueur."
[2 élèves de cinquième, 4 de quatrième, 1 de troisième]

Cas particulier :

"je pense que je ne sais pas car il n'y a pas que le carré qui a quatre angles droits." *[1 élève de quatrième]*

c) autres cas :

"je crois que c'est ça."
"il peut y avoir 4 angles droits mais il peut y avoir aussi d'autres angles : exemple :" (suit le dessin d'un octogone "bizarre", concave, ayant trois angles droits et un angle de 270º).
"un carré n'a qu'un angle droit."
"la phrase a mal été dite ; ABCD ont quatre angles droits ; ABCD a quatre angles droits donc c'est faux."
"ABCD n'a pas 4 angles droits il a 4 côtés de la même longueur."
[2 élèves de sixième, 1 de cinquième, 1 de quatrième, 1 de troisième]

3^e^ cas : changements d'opinions explicités

a) "dans le bon sens" : exemples :

"je change d'avis pour la phrase n°1 parce que je pense que si elle a des angles droits, elle n'a pas forcément les 4 côtés de même longueur car ça peut très bien être un rectangle ou autre chose."
"j'ai changé d'avis car je pensais que le carré était la seule figure géométrique ayant 4 angles droits or je viens de me rappeler que le rectangle a aussi 4 angles droits."
[3 élèves de cinquième, 1 de quatrième]

b) "dans le mauvais sens" :

"je pense que la phrase n°1 est fausse parce que : 4 angles droits font un carré, je me suis trompé j'ai dit qu'elle était fausse mais elle est vraie." *[1 élève de sixième]*

En guise de conclusion

Même en essayant de cerner un sujet (ici : la notion de contre-exemple), il est difficile, dans ce domaine-clé (celui du raisonnement), de ne pas aborder d'autres sujets intimement liés : ainsi cet article a-t-il évoqué les fondements des mathématiques, les phénomènes d'apprentissage et de didactique, etc. Sans parler des thèmes plus proprement mathématiques, comme celui des quadrilatères, sur lequel il y aurait beaucoup à dire...

Tout est lié, bien sûr, mais l'enseignant est obligé de faire des choix, quant à la gestion du temps et du groupe-classe. Et il n'est peut-être pas inutile de dire que les choix que j'ai faits, autant dans ma pratique professionnelle que dans la rédaction de cet article, ne sont pas les seuls possibles, et que je souhaite simplement apporter une modeste contribution à un débat qui est loin d'être clos !