
L'APPRENTI FRÉQUENTISTE

Jean-Claude DUPERRET
Irem de Reims

A Brigitte

AVANT PROPOS

La plupart des enseignants (de mathématiques ou d'autres disciplines) vont commencer leur carrière fortement imprégnés de leur propre apprentissage et, au fil des années, vont amplifier ou corriger, atténuer ou remettre en cause leur conception de l'enseignement, leur ligne de conduite directrice étant la recherche constante d'un équilibre entre le sens profond qu'ils donnent à leur matière et la communication qu'ils vont en faire. Deux facteurs marquent particulièrement cette évolution : la variation du public auquel ils s'adresseront et les changements de programmes successifs qu'ils rencontreront.

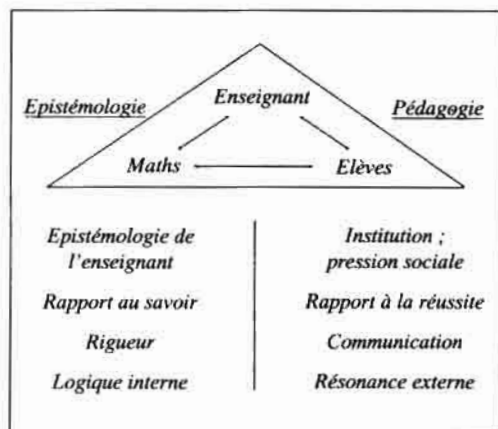
Si certains changements de programmes ne sont que des modifications légères de contenus n'entraînant chez l'enseignant qu'un soupir devant certaines préparations à réactualiser, d'autres, au contraire, sont des changements de fond remettant en cause tout à la fois les objectifs, les structures et les démarches d'apprentissage. Ces derniers entraînent en général une fracture chez les enseignants et dans chaque enseignant, fracture qui se bipolarise entre deux extrêmes : les tenants du nouveau, apôtres de la réforme, illustrant tous les aspects positifs ; les tenants de l'ancien (généralement les plus nombreux) critiques des premiers, mettant en évidence le sens perdu ! Et si ce changement de programme s'appuie sur la prise en compte d'un changement de public, tous les épiphé-

L'APPRENTI FREQUENTISTE

nomènes décrits ci-dessus s'en trouveront amplifiés.

J'ai, dans mon article précédent : "Pour un Thalès dynamique" (Repères-IREM n° 20), montré comment les "nouveaux programmes" de collège (mis en œuvre entre 1986 et 1989) étaient une parfaite illustration de cette dernière catégorie ; pour cela, je m'étais appuyé sur une étude de cas "Thalès". Mais je voudrais aujourd'hui dépasser la question première lors d'un changement de programme : "Est-il bon ou mauvais ?", question qui n'a de sens que dans la passion de la première année d'application, pour énoncer un protocole minimal d'observation qui pourrait permettre d'en corriger plus rapidement certains effets pervers. Cette observation pourrait être constituée par trois pôles de réflexion.

1. La mesure de la fracture



Le schéma, très caricatural, ci-dessus a pour objectif d'illustrer quatre endroits de déséquilibres possibles lors d'un changement.

– Si l'enseignant a un rôle social qui lui est dévolu par l'institution, il ne peut cependant l'effectuer à l'encontre de ses conceptions personnelles.

– Si l'objectif essentiel du système est la réussite de ses utilisateurs (ici les élèves), cette réussite ne peut avoir de sens que dans un rapport au savoir clairement défini.

– Si la communication doit être un souci constant de l'enseignant, elle ne doit pas se faire au détriment d'une rigueur nécessaire à la formation scientifique.

– Si les concepts à construire ont une résonance externe, c'est une logique interne qui en justifie la construction.

2. La réduction de la fracture et le rôle de la formation continue

Tout changement de programme qui déséquilibre le triangle ci-dessus oblige les enseignants à trouver rapidement de nouvelles marques. Un tel déséquilibre nécessite la mise en place de rencontres entre enseignants avec deux objectifs :

- formation, c'est-à-dire proposition d'activités et de démarches illustrant les nouveautés,
- débat, pour que l'ancien et le nouveau puissent se réguler.

L'objectif essentiel est que l'enseignant donne ou redonne très rapidement du sens au nouveau :

- le sens donnera des savoirs dynamiques qui déboucheront sur un enseignement de type "expertise" chez l'élève,
- l'absence de sens entraînera des savoirs statiques qui déboucheront sur un enseignement de type "recettes".

3. L'analyse à long terme

Cette analyse peut être de deux ordres :

- l'évolution d'un élève au cours de sa scolarité,
- l'évolution de l'enseignement d'un concept.

Faisant suite aux changements survenus en collège et en seconde, les nouveaux programmes de première (1991) ont mis en avant une approche fréquentiste des probabilités. Dès leur mise en place, Michel HENRY (Repères-IREM n° 6) mettait en garde contre les difficultés d'ordre épistémologique qu'ils allaient engendrer.

Je crois que ces nouveaux programmes illustrent bien un manque de réflexion aux trois niveaux que j'ai proposés :

- Il n'y a pas eu de mesure de la profonde fracture que ce changement allait causer. Cette fracture était d'autant plus grande qu'elle se situait à un endroit délicat pour les enseignants de mathématiques : la modélisation (schéma ci-dessous).

De plus, les enseignants ont eu à assurer

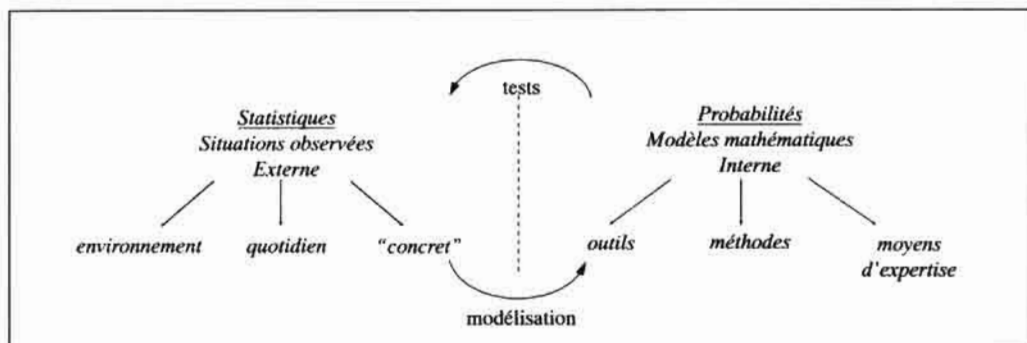
l'enseignement conjoint de la modélisation et du modèle avec toutes les dérives possibles.

- Il y a eu peu (c'est un euphémisme !) de formations liées à ce changement et peu de lieux de débats, sinon dans les I.R.E.M. A voir beaucoup de problèmes proposés, on assiste à des stéréotypes avec de bonnes recettes (en particulier la loi binomiale en spécialité de terminale ES).

- On n'a pas cru bon de mesurer les effets produits (en particulier dans les classes Post-Bac type B.T.S., I.U.T.,... utilisant beaucoup de probabilités).

Que peut donc faire un enseignant, ignare de cette approche fréquentiste et voulant cependant donner du sens à ce qu'on lui demande d'enseigner ; "probablement" comme moi : errer ! Il va donc être amené à se dédoubler, devant jouer tour à tour l'ancien et le nouveau jusqu'à un certain équilibre lui permettant le passage de l'un à l'autre avec la meilleure pertinence. Mais même cet équilibre peut être très fragile...

C'est ce cheminement que je vous pro-



pose. Si j'avais été honnête, j'aurais dû appeler mes personnages "Jean le géomètre" et "Claude le fréquentiste", mais j'ai préféré m'abriter derrière deux grands mathématiciens que vous reconnaîtrez sans problème.

Quant à Bertrand...

PROPOS

La rencontre entre "Pierre le géomètre" et "Jacques le fréquentiste"

Depuis de nombreuses années, Pierre le géomètre assurait un enseignement bien ciselé, construisant d'axiomes en théorèmes un édifice mathématique inébranlable. En particulier, en probabilités, il armait ses élèves et ses étudiants contre tout vice de raisonnement, les munissant de quelques bonnes lois et d'une trousse à outils de première intervention dans le cas fini renfermant dénombrement, arrangement et combinaison. Si le hasard prenait naturellement place dans l'énoncé de ses problèmes, il était chassé sans pitié dans leur résolution !

Mais, au détour d'un changement de programme, il rencontra Jacques le fréquentiste qui, d'emblée, fustigea sa vue démodée des probabilités en lui opposant

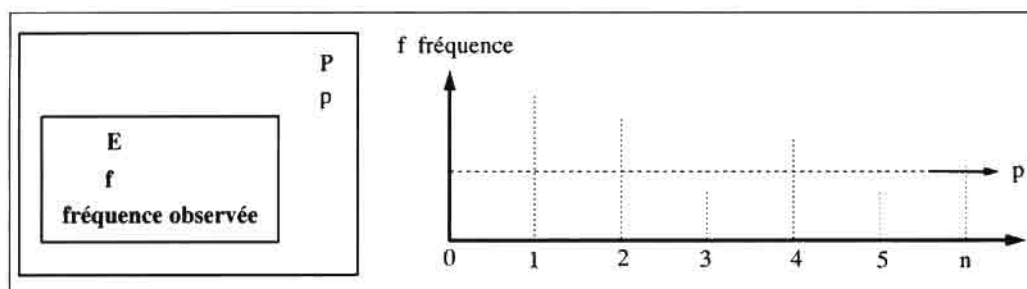
la vision moderne : "l'approche fréquentiste". Bien que fortement déstabilisé par cette remise en cause, Pierre le géomètre fit l'effort d'écouter Jacques le fréquentiste. Il comprit assez vite que l'objet de cette nouvelle approche était le passage d'une fréquence observée, relevant du domaine de la statistique pour laquelle il avait un certain mépris, à sa transformation en probabilités, entachant par là ce beau modèle mathématique par cette intrusion externe et difficilement contrôlable !

En particulier, deux points le mettaient dans un fort embarras :

– la confusion, volontairement déclarée, entre deux types d'observation :

- * celle d'un échantillon **E** de la population **P** sur laquelle portait la probabilité étudiée,
- * celle de la répétition d'un événement aléatoire (schéma ci-dessous).

Si la première situation amène la question : "Ai-je choisi un bon échantillon ?" ou de façon plus mathématique "La fréquence du caractère étudié observée dans **E** est-elle proche de la fréquence de ce caractère dans la population totale **P** ?", la seconde pose la question "Ai-je bien attendu la stabilisation de la fréquence ?" ou de façon plus mathématique "La fréquence f_p choisie



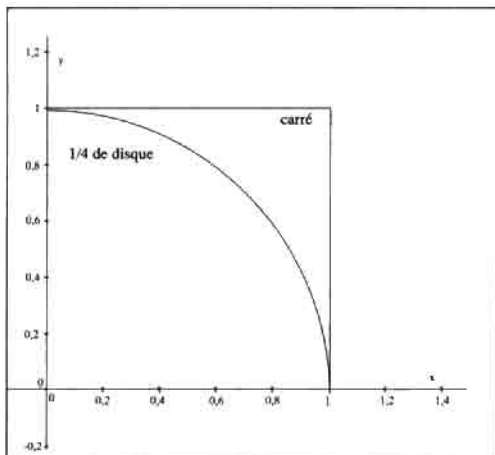
par arrêt au bout de p répétitions est-elle proche de la fréquence limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ que je

choisis comme probabilité ?". Si les deux relèvent de la même problématique, à savoir la difficulté ou l'impossibilité d'avoir accès à la population totale, soit qu'elle soit trop grande, soit *a fortiori* qu'elle soit infinie, elles se différencient fondamentalement au niveau du recueil de l'information, la première ne dépendant pas de l'ordre, la seconde résultant d'une chronologie.

— La présence systématique du hasard sur laquelle reposait ce nouvel édifice, présence ô combien déstabilisante pour un mathématicien habitué à la certitude et se trouvant dans l'impossibilité totale de mathématiser ce concept.

π par la méthode de Monte-Carlo

Plein de bonne volonté, Pierre le géomètre décida de mettre à l'épreuve de son enseignement les belles théories de Jacques le fréquentiste. Sur les conseils de ce dernier, il commença avec l'activité suivante :



"On tire un point "au hasard" dans le carré ci-dessus. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au quart de disque ?".

Jacques le fréquentiste lui montra comment organiser l'activité de la classe autour de cette question :

- * l'aide à la compréhension de l'énoncé,
- * une première réflexion géométrique, le passage à la condition " $M(x,y)$ appartient au quart de disque si et seulement si $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $x^2 + y^2 \leq 1$ ",
- * la découverte avec les élèves de la touche "RANDOM" de leur calculatrice (objet que jusque là Pierre le géomètre tenait en peu d'estime), leur fournissant "au hasard" des nombres compris entre 0 et 1,
- * la consigne donnée à chaque élève de tester 20 couples de nombres "tirés au hasard" avec cette touche et de noter la fréquence de "tirs" dans le quart de disque,
- * la collecte de toutes les informations de la classe en bénissant dans ce cas les classes à fort effectif,
- * le produit par 4 de la fréquence obtenue donnant 3,1... (et dans les bons jours 3,14...),
- * une tentative d'explication de ce miracle !

Si Pierre le géomètre dut reconnaître l'enthousiasme des élèves devant une telle activité, le peu d'écoute qu'il eut lorsqu'il voulut "expliquer" ce résultat le conduisit à émettre quelques réserves sur la portée scientifique d'une telle activité. Il en fit part à Jacques le fréquentiste :

"Si le but du problème est d'établir que la probabilité cherchée est $\frac{\pi}{4}$, alors ma

L'APPRENTI FREQUENTISTE

bonne vieille géométrie et la loi de probabilité uniforme me conduisent immédiatement à ce résultat qui n'est autre que le quotient de l'aire du quart de disque par l'aire du carré".

"Si, au contraire, l'objectif est de montrer que l'on peut approcher ce résultat de manière fréquentiste, je vois alors quelques vices dans la démarche :

* Tout d'abord, ce passage du discret au continu est-il si évident que cela ?

* Plus grave, on ne part que du fini, la touche "RANDOM" se contentant de travailler avec trois chiffres après la virgule. On ne peut donc espérer trouver que le quotient du nombre de points à coordonnées de ce type intérieurs au disque par le nombre de points intérieurs au carré (et que dire des bords !).

* Enfin, si l'on considère que l'échantillon obtenu stabilise bien la fréquence cherchée, qu'a-t-on fait d'autre sinon vérifier que le générateur aléatoire de la calculatrice est bien aléatoire."

Jacques le fréquentiste balaya d'un "Tu as vu l'investissement des élèves ?" ces quelques remarques et l'encouragea à continuer dans la voie qu'il venait de s'ouvrir.

**"Tu t'es vu quand t'as bu"
ou "la parabole de l'ivrogne"**

Pierre le géomètre décida de s'attaquer

au problème du générateur aléatoire. Il lut beaucoup et tomba un jour sur un livre qu'il trouva merveilleux : *Les probabilités à l'école* de Maurice Glaymann et Tamas Varga. Et, au hasard d'une page, il découvrit une activité qui lui permit de donner du sens à sa question.

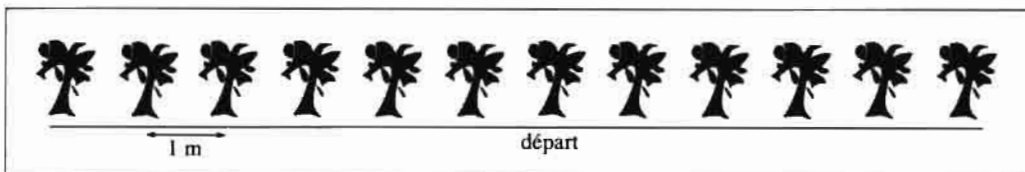
"Un ivrogne, pour rentrer chez lui, suit un chemin bordé d'arbres distants les uns des autres d'un mètre. Il se déplace d'un arbre à l'autre, mais à chaque déplacement, il oublie d'où il est venu et repart au hasard dans un sens ou dans l'autre."

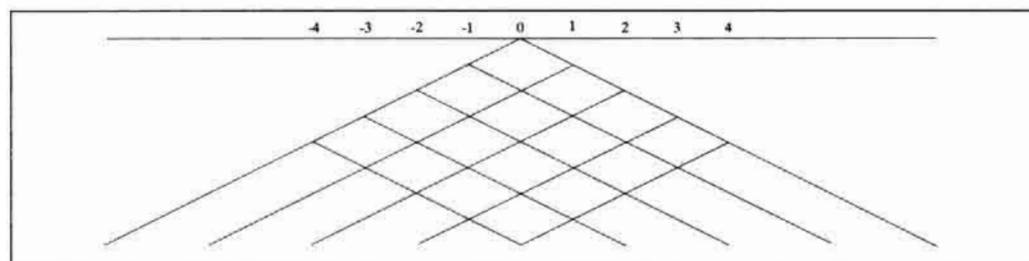
Pierre le géomètre tenait enfin son générateur aléatoire, c'était l'ivrogne.

Il lut alors la suite de l'activité :

"Notre ivrogne tombe de sommeil au bout de n déplacements et s'endort au pied d'un arbre. Quelle est la distance moyenne entre l'arbre de départ et l'arbre où il s'endort ? (c'est-à-dire quelle est la moyenne des distances entre l'arbre de départ et les arbres où il a pu arriver au bout de n étapes ?)"

Il résolut assez rapidement le problème de la modélisation de la promenade de son ivrogne, s'émerveillant de retrouver le triangle de son idole mathématique : Pascal (schéma page suivante).





A coup de C_n^p , il établit alors le tableau suivant :

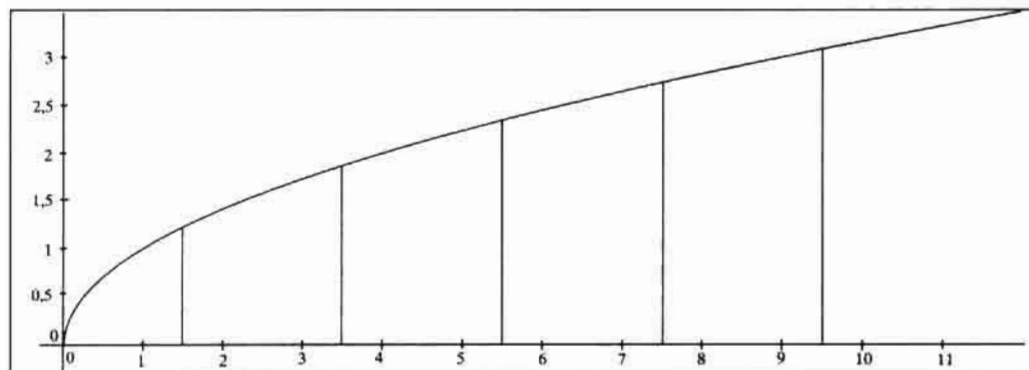
nombre d'étapes (n)	écart moyen (d)
1 ou 2	1
3 ou 4	1,5
5 ou 6	1,88
7 ou 8	2,19
9 ou 10	2,46
11 ou 12	2,71
13 ou 14	2,93
...	...

Il décida alors de représenter ce tableau par le graphique s'appuyant sur les points :

x	1,5	3,5	5,5	7,5	9,5	...
y	1	1,5	1,88	2,19	2,46	...

Force lui fut de constater que le chemin aléatoire de son ivrogne conduisait à un écart moyen tristement parabolique (figure ci-dessous).

Poursuivant plus avant sa lecture, il découvrit que si son ivrogne avait une énergie infinie, la probabilité qu'il atteigne n'importe quel arbre pris au hasard était 1. Il apprit aussi que si cet ivrogne devait se déplacer non plus sur une droite mais dans un plan muni d'un quadrillage régulier d'arbres à un mètre les uns des autres, la probabilité d'atteindre n'importe quel arbre était toujours 1. Mais c'est avec stupeur qu'il dut admettre que ce résultat n'était plus vrai dans l'espace, la probabilité tombant alors à environ 0,35. Il remarqua avec plaisir que ce problème fut l'objet d'une épreuve du concours ESSEC 1987.



Triangle es-tu là ?

Fervent adepte des stages M.A.F.P.E.N., Pierre le géomètre évoluait beaucoup dans son enseignement. Il n'hésitait pas à mettre ses élèves en activité pour initier un nouveau concept mathématique. Il eut ainsi une idée de génie pour aborder l'inégalité triangulaire en 4^e : il revint avec un paquet de spaghettis, en distribua une poignée à chaque élève et leur proposa le travail suivant : vous prenez chacun des spaghettis, vous les coupez en trois morceaux au hasard, vous mesurez la longueur de chacun des morceaux et vous tentez de faire un triangle avec ces trois morceaux. L'état de la classe à la fin de la séquence, ainsi que l'inscription sournoisement inscrite dans son dos au tableau : "Oui mais des Panzanis !" le peinèrent beaucoup.

Il décida donc de revenir avec cette classe en troisième sur ce thème, mais en utilisant la calculatrice. "Tirez trois nombres au hasard avec votre calculatrice (touche "RANDOM"), multipliez chacun par 100 et essayez de faire un triangle avec les trois nombres obtenus, chacun d'eux représentant la longueur d'un côté. Il demanda à chaque élève de faire 20 essais. Comme il lui restait un quart d'heure, il proposa, sans idée préconçue de regrouper les informations pour déterminer la fréquence du triangle. Quelle ne fut pas sa surprise de trouver un résultat voisin de $\frac{1}{2}$! Quelle ne fut pas sa gêne lorsque les élèves lui demandèrent si c'était vrai !

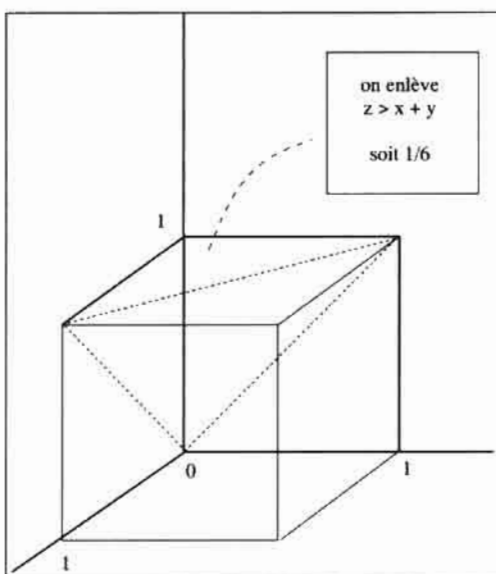
Il rencontra le plus vite possible Jacques le fréquentiste et lui fit part de son émoi. Celui-ci trouva tout de suite comment confirmer sa conjecture : "Teste avec d'autres classes, élargis ton échantillon !"

Et d'expériences en expériences, Pierre le géomètre confirmait cette fréquence de $\frac{1}{2}$, mais n'osait toujours pas la déclarer comme une probabilité.

Ne dormant presque plus, il remplissait des pages de triangles jusqu'au jour où le géomètre qui sommeillait en lui se réveilla :

"Tu as trois coordonnées x , y et z . Passe donc dans l'espace !"

Et comme pour l'approche de π par la méthode de Monte-Carlo, la solution lui apparut dans toute sa beauté géométrique :



"L'ensemble des triplets obtenus par ma calculatrice est représenté par le cube de côté 1. L'ensemble des triplets ne donnant

pas un triangle s'obtient par 3 coupes de mon cube :

$$z > x + y ; x > y + z ; y > x + z.$$

Or chacun d'eux correspond au $\frac{1}{6}$ de mon cube avec une intersection vide de ces trois sous-espaces. Donc... !"

Tout fier de sa démonstration, Pierre le géomètre s'empressa de l'exposer à Jacques le fréquentiste.

Celui-ci le prit assez mal et lui fit remarquer avec beaucoup de fiel : "Avec ta façon d'établir les choses, tu dois certainement pouvoir "calculer" la probabilité d'obtenir un triangle rectangle !".

Et lorsque Pierre le géomètre vit le résultat apparaître, Jacques le fréquentiste lui dit : "Comment peux-tu donc faire suer des générations d'élèves sur un objet géométrique dont la probabilité d'existence est nulle !".

Le jet de punaises

Poursuivant son avantage, et pour enfoncer définitivement le clou, Jacques le fréquentiste demanda à Pierre le géomètre : "Si tu jettes une punaise en l'air, lorsqu'elle retombe, qu'elle est la probabilité que ce soit sur la tête ?"

Devant la mine déconfite de Pierre le géomètre, il lui annonça que ce problème était actuellement l'objet d'une recherche fondamentale d'un I.R.E.M.

Pierre le géomètre n'hésita pas : il s'inscrivit à un stage proposé par cet I.R.E.M. sur ce thème. Il fut tout heureux d'être retenu. Il admira pendant la pre-

mière matinée, l'approche expérimentale : chacun des stagiaires, à tour de rôle, lançait la même punaise et on comptabilisait la fréquence de "tombée sur la tête". Toutefois, un peu lassé, il eut l'outrecuidance, en fin de journée, d'émettre l'hypothèse, puisque l'on confondait échantillon et stabilisation de la fréquence, de lancer d'un coup 10 000 punaises et de compter ! Il s'attira alors les foudres de l'équipe d'animateurs-organisateurs-observateurs-comptabilisateurs qui lui firent remarquer assez sèchement que le stage durait trois jours !

Sus aux manuels

Si Pierre le géomètre dut bien reconnaître que pour ce fameux problème des punaises, seule l'approche fréquentiste permettait de décider d'une probabilité, il voulut toutefois se venger de la suffisance avec laquelle Jacques le fréquentiste le lui avait asséné. Il lui posa donc le problème :

"Je tire deux nombres entiers naturels non nuls au hasard. Quelle est la probabilité p qu'ils soient premiers entre eux ?"

Jacques le fréquentiste mit aussitôt en place une simulation reposant sur le tirage aléatoire successif de couples d'entiers, testant s'ils étaient premiers entre eux et proposa, au bout d'un certain temps un résultat.

Tout cela sous l'œil amusé de Pierre le géomètre qui lui posa alors quelques questions :

"* Comment peux-tu être certain de l'existence d'une telle probabilité ?"

* Tu travailles avec un nombre fini d'en-

L'APPRENTI FREQUENTISTE

tiers, qu'est-ce qui t'autorise à penser que la répartition des nombres premiers entre eux dans $[1;n] \times [1;n]$ est la même que dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$?"

* Es-tu certain d'avoir assez attendu pour que la fréquence soit stabilisée ?"

Il reprit alors le problème avec un crayon et une feuille de papier et commen- ça, d'un air docte :

"Je pourrais bien entendu te montrer l'existence de p , en procédant de la manière suivante :

Soit $\Omega_n = [1;n] \times [1;n]$, $\text{Card}(\Omega_n) = n^2$,
 $\Lambda_n = \{(x;y) \in \Omega_n / \text{pgcd}(x;y) = 1\}$,
 $\text{Card}(\Lambda_n) = q_n$.

Alors la probabilité que deux nombres x et y de $[1;n]$ soient premiers entre eux est donc

$$p_n = \frac{q_n}{n^2}.$$

On montre d'ailleurs que

$$p_n = \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{n^2} \left(E \left[\frac{n}{d} \right] \right)^2$$

où μ est la fonction de Möbius et E désigne la fonction partie entière et tu peux alors vérifier, avec le " n " de tes tirages, si tu obtiens bien une fréquence voisine de p_n . Mais, comment peux-tu passer à $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

Il continua d'un air bon enfant :

"Admettons l'existence de cette fameuse probabilité p . Je peux alors la calculer directement avec mes bonnes vieilles techniques de dénombrement :

soit $A_1 = \{(x;y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / \text{pgcd}(x;y) = 1\}$, alors p est la probabilité de l'événement A_1 .

soit $A_2 = \{(x;y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / x \text{ et } y \text{ sont divisibles par } 2 \text{ et } \text{pgcd}(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}) = 1\}$, alors la probabilité de l'événement A_2 est $\frac{p}{4}$.

Puis de manière générale :

soit $A_n = \{(x;y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / x \text{ et } y \text{ sont divisibles par } n \text{ et } \text{pgcd}(\frac{x}{n}; \frac{y}{n}) = 1\}$, alors la probabilité de l'événement A_n est $\frac{p}{n^2}$.

Les événements A_n sont incompatibles deux à deux et leur réunion est

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$$

Donc

$$1 = P(\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n^2} = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{D'où } p = \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \text{ ainsi } p = \frac{6}{\pi^2}.$$

Il rit beaucoup de l'air déconfit de Jacques le fréquentiste et décida de pousser encore plus loin son avantage :

" π^2 est proche de 10, donc la probabilité cherchée est de l'ordre de 60 %. Je prends un manuel de 4^e et choisis une page au hasard pleine de fractions. Utilisant les fractions pour couple d'entiers, je calcule la fréquence de celles solutions de mon problème et trouve 5 % !"

Jacques le fréquentiste trouva le procédé ignoble et fit remarquer, lisant la consigne en haut de la page : "Simplifiez les fractions suivantes" que tout ce qu'on pouvait conclure était que l'auteur dudit manuel s'était trompé dans 5 % de ses exercices !

Ce à quoi Pierre le géomètre lui rétorqua que cet échantillon pris au hasard en valait bien un autre et qu'un non-matheux n'aurait eu a priori aucune raison de le rejeter comme étant aberrant !

Il s'en suivit une grande brouille entre les deux hommes.

Une souris aléatoire, un million de souris fréquentistes

Au bout de quelque temps, Pierre le géomètre eut un peu honte de l'attitude excessive qu'il avait eue avec Jacques le fréquentiste. Il le rencontra donc et lui dit :

"J'ai trouvé dans le merveilleux livre que je t'ai déjà signalé une activité qui va nous réconcilier."

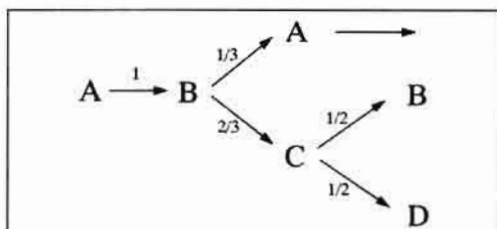
Il lui proposa le problème du labyrinthe.

"Une souris aléatoire se trouve en A.

Elle ne dispose que d'une issue qui la conduit en B. De B, elle dispose de trois issues, les deux premières la conduisant en C, la troisième la renvoyant en A. La souris choisit une de ces issues "au hasard" avec la même probabilité. Si elle arrive en C, elle dispose de deux issues qu'elle choisit encore au hasard avec la même probabilité, l'une la renvoyant en B, l'autre la conduisant à la sortie du labyrinthe D.

Au bout de quel nombre moyen d'étapes (c'est-à-dire passage d'une case à l'autre) la souris sort-elle du labyrinthe ?"

"Mon approche des probabilités me conduit à modéliser ce problème ainsi :



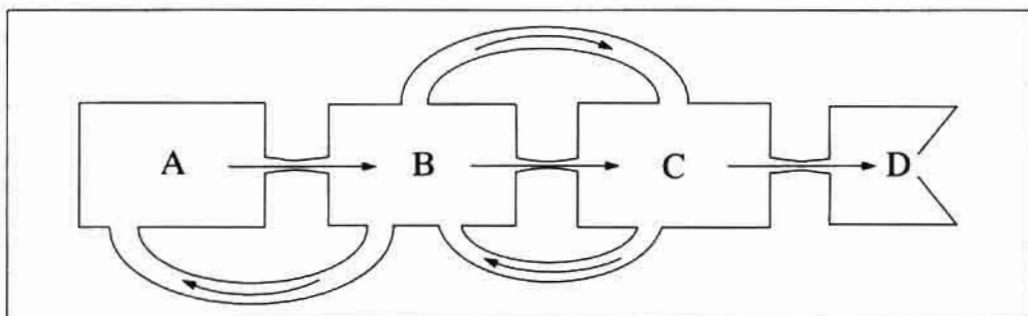
Je peux alors calculer la probabilité de sortir

- au bout de 3 étapes :

$$\frac{1}{3} \quad \left(1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)$$

- au bout de 4 étapes :

$$0$$



– au bout de 5 étapes :

$$\frac{2}{9} \quad \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right)$$

–

– au bout de $2n$ étapes :

$$0$$

– au bout de $(2n + 1)$ étapes :

$$\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

On vérifie bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

Je peux alors calculer l'espérance de sortie :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \frac{2}{3} \times \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7. \end{aligned}$$

(Pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 9$, utiliser,

par exemple, la dérivée de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n.)$$

J'en conclus que le nombre moyen d'étapes pour sortir est $N = 7$."

Jacques le fréquentiste fut très intéressé par le problème et par la façon très élégante dont Pierre le géomètre en était venu à bout. Mais il se retrouva davantage dans la deuxième façon de l'aborder.

"Faisons entrer un million de souris fréquentistes dans le labyrinthe. Elles se répartissent de façon aléatoire dans les couloirs, on peut alors compter à la fin de chaque étape combien sont dans chacune des cases. Pour éviter tout problème avec la S.P.A., il est interdit de couper les souris en 3 ou en 2. On arrondira donc les effectifs pour éviter la troncature des souris, ce qui permettra en outre d'achever le problème en un nombre fini d'étapes.

La surveillance des différentes cases conduit au tableau suivant :

Etape	A	B	C	D
1	0	1000000	0	0
2	333 333	0	666 667	0
3	0	666 667	0	333 333
4	222 222	0	444 444	0
5	0	444 444	0	222 222
...	...	...	...	...
20	8671	0	17342	0
21	0	17342	0	8671
...	...	...	...	...
39	451	451	0	226
40	0	0	301	0
...	...	...	...	...

Et au bout de 80 étapes, toutes les souris sont sorties. On calcule alors la moyenne de sortie :

$$N = \frac{333\,333 \times 3 + 222\,222 \times 5 + \dots + 8671 \times 21 + \dots + 226 \times 39 + \dots}{80},$$

et on trouve $N \approx 7$."

Ce problème réconcilia les deux hommes qui rirent de leur brouille passée. Ils devinrent des amis inséparables.

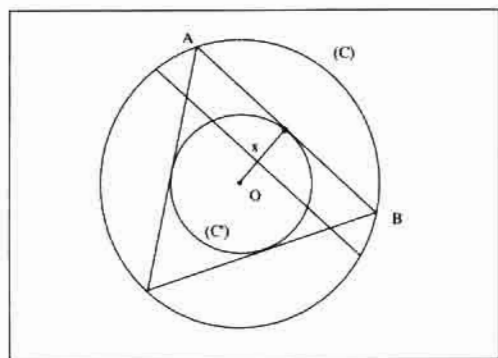
La rencontre avec Bertrand le paradoxal

On les vit beaucoup ensemble dans de nombreuses réunions, colloques, universités d'été... C'est lors d'un séminaire qu'ils firent la rencontre de Bertrand le paradoxal. Ils lui racontèrent l'histoire de leur difficile amitié et la sérénité qu'ils avaient acquise en statistiques et en probabilités. Bertrand le paradoxal leur posa alors le problème suivant :

"On considère un triangle équilatéral de côté a . Soit $C(O, R)$ le cercle circonscrit à ce triangle. On tire "au hasard" une corde $[AB]$ de C . Quelle est la probabilité p que $AB > a$?"

Et il enchaîna : "Je vous propose trois solutions."

Première méthode :



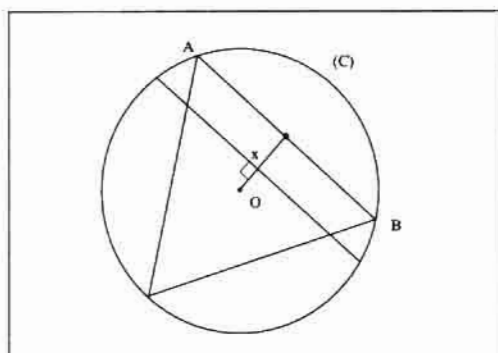
Je considère le cercle $C'(O', \frac{R}{2})$. Soit I le milieu de $[AB]$.

Le problème devient :

"Quelle est la probabilité que I soit intérieur à C' ?"

Alors $p = \frac{1}{4}$ (rapport des aires).

Deuxième méthode :



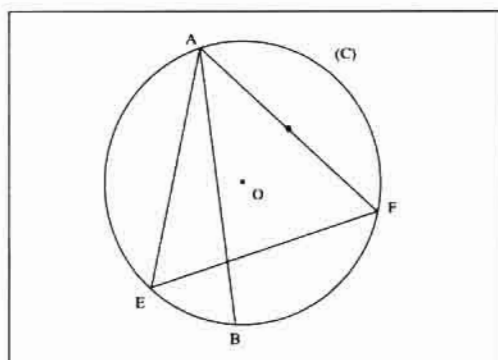
Je calcule la distance d de (AB) à O .

Le problème devient :

"Quelle est la probabilité que cette distance d soit inférieure à la distance des côtés du triangle à O , soit $\frac{R}{2}$?"

Alors $p = \frac{1}{2}$ (rapport des distances).

Troisième méthode :



A ayant été tiré au hasard sur C , je construis le triangle AEF équilatéral inscrit dans C .

Le problème devient :

"Quelle est la probabilité que B soit sur l'arc intercepté par $E\hat{A}F$?"

Alors $p = \frac{1}{3}$ (rapport des arcs).

Et devant leurs mines abasourdies, Bertrand le paradoxal ajouta :

"Le choix du modèle, messieurs, le choix du modèle !"

Pierre le géomètre et Jacques le fréquentiste rentrèrent tristes de ce séminaire, trouvant que vraiment les probabilités étaient une science bien déstabilisante. D'un commun accord, ils décidèrent de renvoyer son enseignement en fin d'année scolaire.