LES LOGARITHMES DE BRIGGS

Jean-Marie FAREY
Patrick PERRIN
Irem de Reims

Les premières tables de logarithmes décimaux sont l'œuvre de Henry Briggs (né à Warley-Wood, Yorkshire, en 1556, mort en 1630). Elles furent publiées à Londres, en 1624, dans un traité intitulé *Arithmetica Logarithmetica*. Nous en présentons dans cet article (1) quelques passages remarquables, qui concernent plus particulièrement la méthode de calcul des logarithmes developpée par Briggs.

La naissance des logarithmes

Au cours de l'été 1615, Henry Briggs alors professeur de géométrie au collège de Gresham, se rend à Edimbourg chez le Baron Jean Neper. L'année précédente, celui-ci a fait paraitre un traité intitulé *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* qui n'a pas tardé à le rendre célèbre. Cet ouvrage expose une théorie complète des logarithmes, que nous appelons en son honneur népériens, et contient une table à 7 chiffres des logarithmes des sinus de 0º à 90º de minute en minute.

L'invention de Jean Neper répond à la demande pressante des astronomes, navigateurs et autres utilisateurs de la trigonométrie qui passent l'essentiel de leur temps à de longs et fastidieux calculs. Quelques années auparavant, en 1593, Clavius avait proposé dans son *Astrolabe* d'utiliser la formule :

$$\sin a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}\,[\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$

permettant de remplacer le calcul d'un produit par celui d'une somme en considé-

(1) Cet article est extrait des Actes, à paraître, du X^{e} Colloque inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques de Cherbourg, *La Mémoire des Nombres*, organisé par l'IREM de Basse-Normandie, les 27 et 28 avril 1994.

ARITHMETIQVE

LOGARITMETIQVE

OV

LA CONSTRVCTION ET VSAGE d'VNE TABLE CONTENANT

les Logarithmes de tous les Nombres depuis l'Vnité jusques à 100000.

ET

D'VNE AVTRE TABLE EN

laquelle sont comprins les Logarithmes des Sinus, Tangentes & Secantes, de tous les Degrez & Minutes du quart du Cercle, selon le Raid de 10,00000,00000 parties.

PAR LE MOYEN DESQVELLES ON RESOVLT TRES-FACILEMENT les Problemes Arithmetiques & Geometriques.

CES NOMBRES PREMIEREMENT sont inventez par IEAN NEPER Baron de Marchiston : Mais HENRY BRIGS Professeur de la Geometrie en l'Vniversité d'Oxford, les a changé, & leur Nature, Origine, & Vsage illustré selon l'intention du dit NEPER.

LA DESCRIPTION EST TRADVITE DV LATIN EN François, la premiere Table augmentée, & la seconde composée par Adriaen Vlacq.

DIEV NOVS A DONNÉ L'VSAGE DE LA VIE ET D'ENTENDEMENT, PLVS QV'IL N'A FAIT PAR LE TEMPS PASSÉ.

A GOVDE,

Chez Pierre Rammasein.

M. DC. XXVIII.

Avec Privilege des Estats Generaux.

1610

ARITHMETIQVE LOGARITHMETIQVE

CHAPITRE I.

De la Definition, & du Nom des Logarithmes.

LOgarithmes sont Nombres lesquels estants adjoincts aux nombres proportionaux, retiennent tousiours differences egales.

Ainsi estants donnez quelques nombres que ce soyent, on leur en peut adjouster des autres & differents, qui se rapportent bien a cette generale definition, & peuvent aussi avoir aucun usage agreable: comme en prenant ces nombres continuellement proportionaux 1.2.4.8.16.32.64. 128. on leur peut bailler pour Logarithmes, ceux qui sont icy dessous marquez par les lettres *A*, *B*, *C*, *D*, ou quelques autres que ce soyent, si seulement est observé que les Logarithmes (qui accroissent ou descroissent egalement) procedent tousiours par differences egales, & que les autres nombres, ausquels ils sont adjoustez, soyent proportionaux. De façon que ces Logarithmes se pourroyent nommer a bon droict, *Nombres equidifferents adjoincts aux nombres proportionaux.* Et semble que Iean Neper Baron de Merchiston, qui en fut le premier Inventeur, leur ait imposé ce nom, d'autant qu'ils nous fournissent des nombres qui retiennent entre-eux une mesme raison.

Nomb. prop.	A Logar.	B Logar.	C Logar.	D Logar.
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14

Pour comprendre mieux la nature & les affections de ces Logarithmes, il nous faut considerer quelques Lemmes.

Lemme premier.

Si on pose autant de nombres qu'on voudra, qui accroissent ou descroissent egalement, les differences en feront proportionelles aux intervalles.

Comme en prenant de ces nombres *D*, le premier, troisiesme, & huictiesme, 35. 29. 14. où il y a deux intervalles entre le premier & le troisiesme, & cinq entre le troisiesme & huictiesme. je dis que la difference du premier & troisiesme, a savoir 6, est a la difference du troisiesme & huictiesme 15, comme 2, a 5.

Partant en quelconque progression de nombres continuellement proportionaux, en estants seulement cognus les Logarithmes de deux quels que ce soyent, on pourra trouver aussi les Logarithmes de tous les autres, & de tel qu'on voudra.

a Car

rant les nombres comme des sinus. Mais les logarithmes de Neper sont d'une toute autre portée. Ils sont l'aboutissement de l'idée primitive de deux progressions correspondantes, l'une arithmétique, l'autre géométrique et des analogies de calcul que l'on remarque entre les sommes et différences des termes de la première et les produits et quotients des termes de la seconde. Parmi les savants ayant contribué au développement de cette idée, on retiendra Archimède – on ne prête qu'aux riches – pour avoir mis en évidence la relation fondamentale : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, dans l'*Arénaire*, Nicolas Chuquet car il introduisit les exposants fractionnaires et négatifs dans son *Triparty en la science des nombres* (1484) et Stifel qui remarqua que la relation fondamentale s'étendait aux exposants négatifs.

Pendant le mois qu'ils passent ensemble, Briggs et Neper ont tout loisir de s'entretenir de la question qui a motivé le voyage de Briggs : trouver un système de logarithmes plus simple que celui du *Canon Mirificus*. De ces discussions vont naître les logarithmes décimaux. Il restera à en dresser la table, ce sera lœuvre de Henry Briggs qui y consacrera près de dix ans de sa vie.

L'homme et son œuvre

Henry Briggs était sans doute un calculateur hors pair ; auteur d'ouvrages sur la navigation en mer et d'une *Trigonométrie Britannique*, il occupa à partir de 1619 la chaire d'Astronomie à Gresham. Ces activités professionnelles l'ont incité à développer le calcul des différences à un degré de perfection tel que l'on peut le considérer comme son véritable fondateur. Toutes ces connaissances accumulées trouveront leur aboutissement dans la fabrication de ses tables de logarithmes.

L'*Arithmétique Logarithmétique* de Henry Briggs nous apparaît comme un impressionant monument destiné à défier le temps, les logarithmes y sont calculés avec 15 chiffres ! Et de fait, ses tables serviront de référence jusqu'au XIX^e siècle. L'auteur publie son œuvre en latin en 1624, bien que les tables soient incomplètes (il y manque les logarithmes des nombres de 20 000 à 90 000). C'est un mathématicien des Pays-Bas, Adrien Vlacq qui les complétera mais en abrégeant les logarithmes de quatre chiffres ce qui simplifiait considérablement la tâche. Il fera paraître en 1628 sa traduction en français de l'ouvrage de Briggs avec les tables ainsi complétées. Les textes présentés dans la suite de cet article en sont extraits (2).

Les premiers chapitres de l'*Arithmétique Logarithmétique*

Dans les trois premiers chapitres de l'*Arithmétique Logarithmétique*, Briggs expose les propriétés élémentaires des logarithmes en illustrant son propos par de nombreux exemples simples.

Le chapitre I commence par la définition suivante :

> *"Logarithmes sont nombres lesquels étant adjoincts aux nombres proportionnaux, retiennent toujours différences égales."* **(1)**

que l'on peut interpréter de la façon suivante : "toute suite arithmétique adjointe

(2) Les appels de notes, **(n)**, d'indice n = 1 à 13, renvoient au passage commenté signalé par **(–> n)** dans le texte de Briggs. Ce texte a été minutieusement retranscrit, d'après l'original, dans les cadres du corps de l'article par Jean-Pierre LE GOFF, de l'IREM de Basse-Normandie. Qu'il soit ici remercié pour ce travail difficile et parfait.

à une suite géométrique est une suite de logarithmes de ceux-ci". S'ensuivent deux lemmes concernant des résultats d'arithmétique élémentaire. Le premier revient à dire que : "les différences entre deux termes d'une suite arithmétique sont proportionnelles aux intervalles (entre les indices), soit : $u_{n+p} - u_n = pr$" et le second : "étant donnés 4 nombres a, b, c, d tels que : $d - c = b - a$, alors : $a + d = b + c$".

ARITHMETIQVE LOGARITHMETIQVE.

Chapitre I.

De la Definition, & du Nom des Logarithmes.

Logarithmes sont Nombres lesquels estants adjoincts aux nombres proportionaux, retiennent tousjours differences egales. (-> 1)

Ainsi estants donnez quelques nombres que ce soyent, on leur en peut adjouster des autres & differents, qui se rapportent bien a cette generale definition, & peuvent aussi avoir aucun usage agreable : comme en prenant ces nombres continuellement proportionaux 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . on leur peut bailler pour Logarithmes ceux qui sont icy dessous marquez par les lettres *A, B, C, D,* ou quelques autres que ce soyent, si seulement est observé que les Logarithmes (qui accroissent ou descroissent egalement) procedent tousjours par differences egales, & que les autres nombres, ausquels ils sont adjoustez, soyent proportionaux. De façon que ces Logarithmes se pourroyent nommer a bon droict, *Nombres equidifferents adjoincts aux nombres proportionaux*. Et semble que Jean Neper Baron de Merchiston, qui en fut le premier Inventeur, leur ait imposé ce nom, d'autant qu'ils nous fournissent des nombres qui retiennent entre-eux une mesme raison.

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
Nomb prop.	Logar.	Logar.	Logar.	Logar.

Pour comprendre mieux la nature & les affections de ces Logarithmes, il nous faut considerer quelques Lemmes.

Le chapitre II examine les conséquences du choix du zéro pour le logarithme de l'unité. Briggs les énonce comme "*trois axiomes de grande importance*" **(2)**.

Premier axiome : les nombres auront pour logarithmes, ou bien les indices [*i.e.* les exposants], ou bien des nombres proportionaux à ces indices. Ce résultat se justifie par le premier lemme.

C[H]APITRE II.

Que l'Unité aura pour Logarithme 0.

OR combien qu'on puisse bailler en cette sorte plusieurs especes de Logarithmes aux mesmes nombres, il sera toutes-fois plus expedient de s'en contenter d'une seule, a savoir de celle qui met du zero pour Logarithme de l'Unité ; comme estant en toutes manieres la plus sortable & propre de toutes les autres a toutes choses. Dont s'ensuivent necessairement trois Axiomes de grande importance.

Le premier. Que tous nombres auront pour Logarithmes, ou bien ceux qu'on appelle ordinairement Indices, qui sont adjoustez de tous les Arithmeticiens aux nombres continuellement proportionaux depuis l'Unité, pour demonstrer leur distance de la-dite Unité ; ou bien ceux qui sont proportionaux a ces mesmes Indices. (-> 2)

A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	0	0000	1	0	0	1	0	0
10	1	1000	3	1	047712	2	1	03010299
100	2	2000	9	2	095424	4	2	03020599
1000	3	3000	27	3	143136	8	3	09030899
10000	4	4000	81	4	190848	16	4	12041199
100000	5	5000	243	5	238561	32	5	15051499
1000000	6	6000	729	6	286272	64	6	18061799

A sont nombres continuellement proportionaux depuis l'Unité en avant. *B* Indices vulgaires. *C* Logarithmes proportionaux a iceux Indices.

Deuxième axiome : le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes du multipliant et du multiplié. La justification repose sur le second lemme. Troisième axiome : le logarithme du nombre divisé est égal à la somme des logarithmes du diviseur et du quotient.

Le chapitre III marque la fondation des logarithmes décimaux. Briggs choisit par commodité : log 10 = 1,00000.00000.0000 (les tables sont prévues à 14 décimales), et remarque avec justesse que tous les autres logarithmes sont alors entièrement déterminés. Puis il caractérise les nombres qui ont des logarithmes rationnels comme étant ceux qui peuvent entrer dans une suite géométrique contenant 1 et 10 et ceux-là seulement **(3)**.

Chapitre III.

Estant arresté le Logarithme de l'Unité, il faut en apres cercher encor un autre nombre, duquel l'usage soit fort ample & necessaire, pour luy donner pareillement un Logarithme convenable, qui soit facile a retenir & a coucher par escrit toutes & quantes fois, qu'on en pourroit avoir a faire. Et me semble qu'il n'y en puisse avoir de plus propre, que le Dix. duquel le Logarithme soit 1,00000,00000,0000. (-> 3)

Ainsi donc seront les quatre nombres principaux Un & Dix, avec leurs Logarithmes 0, & 1,00000,00000,0000. Non par quelque necessité, ni au regard de la certitude de l'Arithmetique (laquelle se peut avoir par plusieurs & diverses operations) mais a cause de la facilité. Pour le reste des Logarithmes (où il n'y a doresenavant plus de liberté) il les faut tellement accommoder a l'advenant de ceux cy, que tous d'une mesme teneur ils s'entresuivent du commencement jusqu'a la fin, soubs mesmes loix, & que toutes les fois qu'il en sera besoin ils produisent le mesme effect.

Or de ces Logarithmes que nous requeronts, les uns sont rationels, qui se pourront trouver bien exactement ; les autres irrationels, qu'on ne pourra pas adjuster du tout parfaitement, mais de si pres, qu'en tant de si grands nombres il n'y manquera ou superabondera une seule unité en aucun d'iceux.

Logarithmes rationels. Ces Logarithmes rationels ne conviennent pas seulement a ces nombres Un & Dix (qui sont comme le fondement de tout le reste :) mais aussi a tous les autres, qui peuvent estre arrangez avec eux en un mesme ordre de continuelle proportion en quelque sorte que ce soit.[...]

La fabrication des tables

Le principe de la méthode de calcul des logarithmes ayant servi à la fabrication des tables est exposé dans les chapitres VI, VII et VIII.

Briggs commence par construire au chapitre VI une table des logarithmes *"des nombres continuellement moyens entre 1 et 10"*. Il faut entendre par là la suite des nombres $10^{\frac{1}{2^n}}$ dont les logarithmes s'obtiennent aisément par divisions par 2 successives. La difficulté réside dans les extractions successives de racines carrées nécessaire au calcul des $10^{\frac{1}{2^n}}$. Les calculs sont faits pour n compris entre 1 et 54 **(4 & 5)**.

Chapitre VI.

Cy dessus chap. 3. a esté monstré, que tous les Logarithmes des Nombres, qui entrent en une mesme progression de nombres continuellement proportionaux avec l'Un & le Dix, sont rationels, & qu'on les peut aisement trouver selon la proportion de leur distance. Qu'on cerche donc & choisisse d'une assez grande progression de nombres continuellement proportionaux d'entre l'Un & le Dix, quelques nombres principaux, lesquels il ne sera pas mal-convenable d'appeller continuellement Moyens ; par ce que chascun d'iceux est le moyen homogen[é]e entre l'Unité & le nombre prochainement suivant apres l'Unité en la mesme *Nombres continuellement Moyens.*

progression, comme il appert en ceux que voicy, marquez par *A*, *B*, *C*.

A	B	C
1	1	1
2	$\frac{2}{3}$	2
4	$\frac{4}{9}$	8
16	$\frac{16}{81}$	512
256	$\frac{256}{6561}$	134217728
65536	$\frac{65536}{43046721}$	
4294967296		

En *A* & *B* chascun est le costé Quadratique, & en *C* le Cubique du nombre immediatement suivant.

Je cerche donc tels nombres continuellement Moyens entre Dix & Un, dont le premier sera $\sqrt{10}$. a savoir 3 $\frac{162277[6]6016837933199889354}{1000000000000000000000000000[0]}$ qui est le costé du Dix, ou le Moyen proportionel entre 10. & 1. en apres je cerche encore le costé du precedent : c'est $\sqrt{\sqrt{10}}$. a savoir 1 $\frac{77827941003892280119730413}{100000000000000000000000000}$ puis derechef encores le costé du precedent, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$. 1 $\frac{33352143216332402566538931}{100000000000000000000000000}$ & ainsi vay-je tousjours continuant le mesme ordre d'operation, jusqu'a tant que j'en aye une colomne de cinquante cinq nombres, le Dix y enclos, lesquels sont icy marquez par *D* : & leur sont adjoincts a costé a chascun leurs Logarithmes rationels marquez par *E*. **(–> 4)**

Une lecture inspirée des quatre dernières lignes de cette table permet à Briggs d'affirmer que lorsque : $0 < x < 10^{-15}$, on peut calculer, avec une erreur négligeable, $\log(1 + x)$ par une simple règle de proportionnalité. Ceci mérite quelques éclaircissements. Reprenons les termes de l'auteur :

"Il semble que les logarithmes retiennent la mesme proportion en decroissant, que les nombres auxquels ils sont adjoincts." **(6)**

Le moindre des continuellement moyens est 1 $\frac{000000000000000127819149320032344165}{1000000000000000000000000000000000000}$ dont le Logarithme se trouve en my-partissant 0, 00000, 00000, 00000, 05551, 11512, 31257, 82702, 11815, 83. car suivant le 2. ax. 2. chap. le Logarithme du costé est la moitié de celui du quarré ; par ce que le quarré est produit de la multiplication du costé en soy mesme & partant chascun de ces Logarithmes sera double de son plus prochain moindre. Et d'autant que les Characteres significatifs, adjoincts a l'Unité apres quinze zero, sont la moitié de ceux qui vont immediatement devant ; tant és nombres continuellement moyens, qu'és Logarithmes : il semble que les Logarithmes **(–> 6)** retiennent la mesme proportion en decroissant, que les nombres ausquels ils sont adjoincts. Et partant, si quelques nombres sont diminuez si avant, qu'apres l'Unité s'y ensuivent immediatement quinze zero, les ensuivants characteres significatifs apres les zero, nous donneront les vrais Logarithmes, ou approchants fort pres, par la reigle de proportion.

[p. 12, table]

	D	*E*
	Nombres continuellement Moyens entre Un & Dix.	*Logarithmes Rationels.*
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
...	[...] **(->5)**	[...] **(->5)**
51	10000,00000,00000,10225,53194,56025,921 *L*	0,0000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526
52	10000,00000,00000,05112,76597,28012,947 *M*	0,0000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263
53	10000,00000,00000,02556,38298,64006,470 *N*	0,0000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
54	10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 *P*	0,0000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Ce phénomène bien observable dans les quatre dernières lignes de la table ($M-1=\frac{L-1}{2}$; $N-1=\frac{M-1}{2}$; $P-1=\frac{N-1}{2}$) s'explique par l'approximation affine $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}$ (l'erreur est inférieure à 10^{-30}) **(5)**.

On en déduit la proportion $\frac{\log(1+a)}{\log(1+b)}=\frac{a}{b}$ a et b étant deux des nombres $L-1$, $M-1$, $N-1$, $P-1$ et leurs successeurs. Le trait de génie (ou le coup de force) de Briggs étant de dire que cette proportion reste vraie pour tout nombre x vérifiant $0 < x < 10^{-15}$ **(6)**.

Briggs effectue le calcul pour $x = 10^{-16}$. Le résultat trouvé ressemble fort au coefficient de proportionnalité entre les logarithmes népériens et les logarithmes décimaux qui est égal à $\frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434294$.

En effet : $\log(1+10^{-16})=\frac{10^{-16}}{\ln 10}$, à très peu de choses près ! **(7)**

12 D ARITHMTIQVE. F.

	Nombres continuellement Moyens entre Vn & Dix	Logarithmes Rationels.
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10365,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18565,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,18442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125
20	10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000,09536,74316,40625
21	10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,00000,04768,37158,20312,5
22	10000,00548,97921,68211,14626,60250,4	0,00000,02384,18579,10156,25
23	10000,00274,48957,07382,95091,25449,9	0,00000,01192,09289,55078,125
24	10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,00000,00596,04644,77539,0625
25	10000,00068,62238,56210,25737,18748,2	0,00000,00298,02322,38769,53125
25	10000,00034,31119,22118,83912,75020,8	0,00000,00149,01161,19384,76562,5
27	10000,00017,15559,59637,84719,93879,1	0,00000,00074,50580,59692,38281,25
28	10000,00008,57779,79451,03051,17588,8	0,00000,00037,25290,29846,19140,625
29	10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000,00018,62645,14923,09570,3125
30	10000,00002,14444,94793,77767,42970,4	0,00000,00009,31322,57461,54785,15625
31	10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,00000,00004,65661,28730,77392,57812,5
32	10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,00000,00002,32830,64365,38696,28906,25
33	10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,00000,00001,16415,32182,69348,14453,125
34	10000,00000,13402,80923,26383,99277,7	0,00000,00000,58207,66091,34674,07226,5625
35	10000,00000,06701,40461,50946,55519,6	0,00000,00000,29103,83045,67337,03613,28125
36	10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000,00000,14551,91522,83668,51806,64062,5
37	10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,00000,00000,07275,95761,41834,25903,32031,25
38	10000,00000,00837,67557,69872,72426,9	0,00000,00000,03637,97880,70917,12951,66015,625
39	10000,00000,00418,83778,84927,59087,9	0,00000,00000,01818,98940,35458,56475,83007,8125
40	10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000,00000,00909,49470,17729,28237,91503,90625
41	10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000,00000,00454,74735,08864,64118,95751,95312
42	10000,00000,00052,35472,35614,98950,4	0,00000,00000,00227,37367,54432,32059,47875,97656
43	10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,00000,00000,00113,68683,77216,16029,73937,98828
44	10000,00000,00013,08868,08903,72167,8	0,00000,00000,00056,84341,88608,08014,86968,99414
45	10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,00000,00000,00028,42170,94304,04007,43484,49707
46	10000,00000,00003,27217,01225,92881,337	0,00000,00000,00014,21085,47152,02003,71742,24853
47	10000,00000,00001,63608,51112,96427,283	0,00000,00000,00007,10542,73576,01001,85871,12426
48	10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,00000,00000,00003,55271,36788,00500,92935,56213
49	10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,00000,00000,00001,77635,68394,00250,46467,78106
50	10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053
51	10000,00000,00000,10225,53194,56025,921 L	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526
52	10000,00000,00000,05112,76597,28012,947 M	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263
53	10000,00000,00000,02556,38298,64006,470 N	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
54	10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 P	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Chapitre VI, page 12

// p. 13 //

Et afin que le tout se puisse voir plus clairement, je mettray icy quelques nombres continuellement proportionaux avec leurs Logarithmes d'entre ceux qui sont les plus proches de *L M N* & *P* : y gardant entre les plus proches la mesme raison qu'il y a de l'Unité a *P* le moindre des continuellement moyens. Lesquels s'accroissent tous quasi egalement selon la distance entre-eux. ce que doivent faire les Logarithmes suivant la definition. Et partant s'il est donné quelque nombre si petit, qu'il doive estre placé entre l'Unité & le nombre *L*, combien qu'il ne soit aucunement du rang des continuellement proportionaux, toutesfois le Logarithme en sera aisé a trouver, par la reigle de proportion : a cause qu'en ces dits si petits nombres, les Logarithmes s'augmentent ou diminuent selon la raison des Characteres significatifs qui s'ensuivent prochainement apres les zero. comme estant donné le nombre X 10000,00000,00000,01. je dis que ces quatre nombres sont proportionaux. (–> 7)

pro- port.
- 12781,91493,20032,34416,5 / 1 - - - - - - - - - - - - - - - — Characteres significatifs pour adjoindre a l'Unité apres quinze Zero.
- 55511,15123,12578,27021,18158 / 43429,44819,03251,804 - - - - — Characteres significatifs pour adjoindre aux Logarithmes apres la Characteristique (qui est Zero) & quinze autres Zero.

	Nombres continuellement proportionaux par dessus l'Unité.	Logarithmes.
	1 Unité	0,00000
P	10000,00000,00000,01278,19149,32003,23442	0,0000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,12
N	10000,00000,00000,02556,38298,64006,47047	0,0000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,24
	10000,00000,00000,03834,57447,96009,70815	0,0000,00000,00000,16653,34536,93773,48106,35
M	10000,00000,00000,05112,76597,28012,94747	0,0000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47
	10000,00000,00000,06390,95746,60016,18842	0,0000,00000,00000,27755,57561,56289,13510,59
	10000,00000,00000,07669,14895,92019,43101	0,0000,00000,00000,33306,69703,87546,96212,71
	10000,00000,00000,08947,34045,24022,67523	0,0000,00000,00000,38857,80586,18804,78914,83
L	10000,00000,00000,10225,53194,56025,92108	0,0000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,95
X	10000,00000,00000,01	0,0000,00000,00000,04342,94481,90325,1804

Doncques nombre donné *X* à pour Logarithme 0, 00000, 00000, 00000, 04342, 94481, 90325, 1804. De ces nombres proportionaux icy le premier Charactere en est l'Unité ; tous ceux qui s'ensuivent, tant les zero que les significatifs, representent le Numerateur des parties qu'il faut adjoindre a l'Unité, dont le Denominateur est l'Unité mesme avec autant de zero qu'il y a des Characteres au Numerateur. Or combien que ce nombre *X* ne soit pas entre ces proportionaux ; toutesfois je n'ay pas voulu laisser de mettre bien exactement son Logarithme ; afin que ceux, qui doivent estre cerchez par la reigle de proportion, se puissent trouver plus aisement a l'aide de cettuy cy, que de quelqu'autre. Car pour y parvenir cettuy cy n'a besoin que de la seule multiplication, sans division : là où les autres Logarithmes de ces dits proportionaux ne peuvent rien, sans se servir tant de l'une que de l'autre espece.

Vers le calcul de "log a", a quelconque

La méthode de calcul du logarithme d'un nombre quelconque a est mise enœuvre au chapitre VII.

On peut la résumer ainsi : on calcule $a^{\frac{1}{2^n}}$ jusqu'à ce que $a^{\frac{1}{2^n}} - 1 < 10^{-15}$; puis on calcule $\log(a^{\frac{1}{2^n}})$ par la règle de proportion décrite au chapitre VI ; enfin on trouve "log a" en multipliant par 2^n.

> *"Estants trouvez ces nombres continuellement moyens entre l'Un & le Dix, ensemble avec leurs Logarithmes rationnels, on pourra aussi trouver avec l'aide d'iceux, les Logarithmes de tous autres nombres en la maniere qui s'ensuit.*
> *Cerchons premierement, comme au chap. precedent, les nombres continuellement moyens entre le nombre donné (duquel on demande le Logarithme) & l'Unité ; jusqu'a tant que finalement on descouvre un nombre si petit, que quinze zero s'ensuivent apres l'Unité, & derriere eux encor autant ou plus de Characteres significatifs. Ces Characteres cy (comme il est monstré sur la fin du Chapit. precedent) donneront par la reigle de proportion le Logarithme requis du nombre moyen dernier trouvé. Et comme on est parvenu au premier rang des nombres continuellement moyens, depuis le Logarithme donné du premier nombre en mypartissant jusqu'au Logarithme requis du dernier nombre moyen ; aussi au rebours en doublant le Logarithme trouvé du dernier nombre moyen, on trouvera celuy du penultime ; & consequemment tous les autres en la mesme sorte, jusqu'a ce que finalement on parvienne au Logarithme requis du premier nombre donné."*

Mais Briggs ne s'arrête pas à un exposé théorique. Il va dans la suite de son ouvrage accumuler les astuces de calcul destinées à amoindrir le travail du calculateur. Première astuce : chercher d'abord une puissance de a voisine d'une puissance de 10 et calculer le logarithme de cette puissance avant d'en déduire le logarithme de a. Il détaille l'exemple suivant : pour calculer log 2 il utilise $2^{10} = 1024$; après 47 extractions de racines carrées, il obtient $\log(1{,}024)^{\frac{1}{2^{47}}}$ par la règle de proportion $((1{,}024)^{\frac{1}{2^{47}}} - 1 < 10^{-15})$ puis en déduit log 1024 et enfin log 2.

> *"Soit proposé a trouver le Logarithme de Deux. Pour ce faire, soit dressé un rang de nombres continuellement proportionaux par la multiplication du nombre 2, jusqu'a ce qu'on trouve 1024, qui est le nombre A, lequel il faut diviser par 1000 B. le quotient sera* $1\frac{024}{1000}$*, duquel estant trouvé son Logarithme, & adjousté a celuy du diviseur, on aura par le 3.ax. chap. 3. le Logarithme du nombre divisé A 1024. Dont la Disme, sera le Logarithme requis du nombre 2, par le 1.Lem. du chap. I."*

Deux autres exemples terminent le chapitre VII : le calcul de log 5 déduit de log 2 et de log 10 et le calcul de log 6 grâce à $6^9 = 10\,077\,696$ qui donne ensuite facilement log 3. Ils annoncent la constitution d'un premier squelette de table reposant sur la décomposition en facteurs premiers des nombres entiers.

Où il est question de calcul des différences

À ce point de la lecture du livre de Briggs, une question hante le lecteur de cette fin du XX^e siècle où l'électronique a pris en charge tous les calculs : comment fait-il pour extraire une cinquantaine de racines carrées avec trente décimales ? La réponse vient au chapitre suivant :

"Voila donc comme on pourra trouver le Logarithme de quelque nombre proposé, par les continuellement moyens ; qu'on descouvre assez peniblement par l'invention du costé quarré. Laquelle operation pourra estre grandement soulagée par les differences ;" **(8)**

// p. 17 //

Chapitre VIII.

VOila donc comme on pourra trouver le Logarithme de quelque nombre proposé, par les continuellement moyens ; qu'on descouvre assez peniblement par l'invention du costé quarré. Laquelle operation pourra estre grandement soulagée par les differences ; comme je m'en vay monstrer en ces mesmes nombres moyens, que j'ay icy marquez par *A*, & a l'aide desquels a esté trouvé le Lo[g]arithme du Six. Le premier Charactere vers la senestre en signifie une Unité, & les autres sont parties qu'il luy faudroit adjouster, comme j'ay touché a la fin du sixiesme Chapit. Ces parties adjointes a l'Unité je les appelle Difference Premiere, comme estants la difference du nombre donné par dessus l'Unité. Les nombres qui s'ensuivent apres au dessous de l'*A*, sont les moitiés des Differences Premieres dernierement precedentes, & portent cette marque $\frac{1}{2}$A. De ces moitiez soubstrayez les susdites Differences Premieres, en escrivant la reste des nombres dessous, le[s]quels marquez par *B* soyent appellez Differences Secondes. Au dessous desquelles s'ensuivent, les quarts de ces Differences Secondes, marquez $\frac{1}{4}$B. Et de ceux cy estants soubstraits les nombres *B*, restent les Differences Tierces *C*. Et ces tierces estants soubstraites des huictiesmes des precedentes tierces marquées par *C*, en restent les Differences Quartes *D*. En la mesme sorte se trouvent les Cinquiesmes *E*, Sixiesmes *F*, Septiesmes *G*, &c. en soubstrayant les quartes *D* des seiziesmes des quartes precedentes ; les cinquiesmes *E* de trente deuxiesmes des cinquiesmes ; & les sixiesmes *F* des soixante quatriesmes des sixiesmes &c. (-> 8) (-> 9)

Toutes ces Differences, sont assez faciles a trouver en la continuelle progression des nombres continuellement moyens. Mais l'usage en est de petite importance és nombres dont la premiere difference ne monte, qu'a la centiesme ou milliesme partie d'une Unité. Car defait elles sont & en trop grand nombre, & aucunes d'icelles de trop difficile operation. Mais si apres le Charactere de l'Unité estant le premier de tous, ils s'ensuivent immediatement trois ou plus de zero, ces differences aumoindriront une grande partie du travail. Comme il appert en cet exemple suivant ; auquel ces differences nous sont fornies par les nombres continuellement moyens a l'aide de la division & substraction jusques a ‡ : Mais de la en apres les continuellement moyens sont trouvez par icelles differences. Car 6 $\frac{5}{10}$ trente deuxiesme partie du nombre *E* 207, soustraite de 28558$\frac{9}{10}$ seiziesme partie du nombre *D* 4568943, reste 285552$\frac{4}{10}$ nombre *D*, ou difference quatriesme. La mesme difference *D* soustraite d'une huictiesme partie de *C*, laisse en reste la difference tierce *C*, laquelle pareillement soustraicte d'une quatriesme partie du precedent nombre *B*, en reste la seconde difference *B* : comme icelle estant derechef (-> 10) soustraite de la moitié du precedent A, en reste la difference A. cette cy adjoustée a l'Unité est le moyen requis 100000, 07558, 20443, 63012, 14296, 760. Voila comme on trouvera aussi tous les autres moyens suivants en procedant par ces differences, jusques a ce qu'il n'en reste finalement que les premieres, qui seront necessairement egales aux moitiez des premieres precedentes. le surplus se doit achever par la reigle de Proportion : comme dessus.

L'exemple traité est celui de $a = 1{,}0077696 = \frac{6^9}{10^7}$, où 47 extractions de racines sont nécessaires. Pour faciliter la lecture de ce chapitre VIII, nous avons transcrit les calculs avec des notations modernes **(9)**.

La différence première peut s'écrire :

$a_n = \sqrt[2^n]{a} - 1$; (A dans le texte de Briggs).

La différence deuxième peut s'écrire :

$b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - a_n$; (B dans le texte de Briggs).

La différence troisième peut s'écrire :

$c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} - b_n$; (C dans le texte de Briggs).

La différence quatrième peut s'écrire :

$d_n = \frac{1}{8}c_{n-1} - c_n$; (D dans le texte de Briggs).

La différence cinquième peut s'écrire :

$e_n = \frac{1}{16}d_{n-1} - d_n$; (E dans le texte de Briggs).

La différence sixième peut s'écrire :

$f_n = \frac{1}{32}e_{n-1} - e_n$; (F dans le texte de Briggs).

Briggs constate que $f_n \approx 0$ dès que n > 8 et peut alors remonter dans ses calculs puisque :

$$a_n \approx \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{4}b_{n-1} + \frac{1}{8}c_{n-1} - \frac{1}{16}d_{n-1} + \frac{1}{32}e_{n-1} \quad \textbf{(10)}$$

Il indique ensuite une autre manière plus directe de calculer ces différences dont voici l'explication **(11)** :

Posons $a_n = x$ alors :

$a_{n-1} = (1 + a_n)^2 - 1 = 2x + x^2$

et $b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - a_n = \frac{x^2}{2}$.

De même :

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= (1 + a_{n-1})^2 - 1 = (1 + x)^4 - 1 \\ &= 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \end{aligned}$$

$b_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-2} - a_{n-1} = 2x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2}$

et $c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} - b_n = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8}$.

De même :

$$\begin{aligned} a_{n-3} &= (1 + a_{n-2})^2 - 1 \\ &= (1 + x)^8 - 1 \\ &= 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 \\ &\qquad + 8x^7 + x^8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \frac{1}{2}a_{n-3} - a_{n-2} \\ &= 8x^2 + 24x^3 + 34x^4 + 28x^5 + 14x^6 \\ &\qquad + 4x^7 + \frac{x^8}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \frac{1}{4}b_{n-2} - b_{n-1} \\ &= 4x^3 + 8x^4 + 7x^5 + \frac{7}{2}x^6 + x^7 + \frac{x^8}{8}, \end{aligned}$$

// Chapitre VIII, p. 18, table //

	10077,696	
46	10038,77283,33696,24566,38465,51	
45	10019,36766,13694,66167,58702,29	
44	10009,67914,63909,90172,88907,20	
43	10004,83840,26884,66298,54925,35	A
42	10002,41890,87882,46856,38087,27	A
	2,41920,13442,33149,27462,67	$\frac{1}{2}$A
	29,25559,86292,89375,40	B
41	10001,20938,12639,71345,94391,94	A
	1,20945,43941,23428,19043,63	$\frac{1}{2}$A
	7,31301,52082,24651,69	B
	7,31389,96573,22343,85	$\frac{1}{4}$B
	88,44490,97692,15	C
40	10000,60467,23505,53096,80160,05	A
	60469,06319,85672,97195,97	$\frac{1}{2}$A
	1,82814,32576,17035,92	B
	1,82825,38020,56162,92	$\frac{1}{4}$B
	11,05444,39127,00	C
	11,05561,37211,52	$\frac{1}{8}$C
	116,98084,52	D
39	10000,30233,16050,56577,59647,94	A
	30233,61752,76548,40080,02	$\frac{1}{2}$A
	45702,19970,80432,08	B
	45703,58144,04258,98	$\frac{1}{4}$B
	1,38173,23826,90	C
	1,38180,54890,87	$\frac{1}{8}$C
	7,31063,97	D
	7,31130,28	$\frac{1}{16}$D
	66,31	E
38	10000,15116,46599,90567,29504,88	A
	15116,58025,28288,79823,97	$\frac{1}{2}$A
	11425,37721,50319,09	B
	‡ 11425,54992,70108,02	$\frac{1}{4}$B
	17271,19788,93	C
	17271,65478,36	$\frac{1}{8}$C
	Jusqu'icy sont trouvées 45689,43	D
	les differences moindres, 45691,50	$\frac{1}{16}$D
	en soubstrayant les plus gran- 2,07	E
	des des parties des homo- 2,07	$\frac{1}{32}$E
	genées precedentes.	

Ces differences se pourront aussi trouver pour quelque nombre donné, encore que pas un de ses continuellement moyens ne soit cognu. Car en multipliant la difference du nombre donné dessus l'Unité quelques-fois en soy mesme & en ses produits, de sorte qu'on en ait quelques Puissances, comme le Quarré, Cube, Biquarré, &c. alors la difference Seconde sera la moitié du Quarré ; & consequemment les autres ; comme il s'ensuit icy. **(-> 11)**

Differentia

- Seconde $\frac{1}{2}$ ②
- Tierce $\frac{1}{2}$ ③ + $\frac{1}{8}$ ④
- Quarte $\frac{7}{8}$ ④ + $\frac{7}{8}$ ⑤ + $\frac{7}{16}$ ⑥ + $\frac{1}{8}$ ⑦ [+] $\frac{1}{64}$ ⑧
- Cinq^e. 2 $\frac{5}{8}$ ⑤ + 7 ⑥ + 10 $\frac{15}{16}$ ⑦ + 12 $\frac{69}{128}$ ⑧ + 11 $\frac{11}{64}$ ⑨ + 7 $\frac{105}{128}$ ⑩
- Six^e. 13 $\frac{9}{16}$ ⑥ + 81 $\frac{3}{8}$ ⑦ + 296 $\frac{87}{128}$ ⑧ + 834 $\frac{43}{128}$ ⑨ + 1953 $\frac{285\,*}{512}$ ⑩
- Septième 122 $\frac{1}{16}$ ⑦ + 1510 $\frac{67}{128}$ ⑧ + 11475 $\frac{73}{128}$ ⑨ + 68372 $\frac{79}{2048}$ ⑩
- H[ui]ct^e. 1937 $\frac{95}{128}$ ⑧ + 47151 $\frac{93}{128}$ ⑨ + 706845 $\frac{1493}{8192}$ ⑩
- Neuf^e. 54902 $\frac{89}{128}$ ⑨ + 2558465 $\frac{23587}{32768}$ ⑩
- Dixiesme 2805527 ⑩

[* en fait 310]

Le tout vous est monstré assez clairement en cet exemple des nombres icy proposez.

Or en ces extremes il faut prendre soigneuse garde, de colloquer chascune puissance en sa juste place, loing ou pres de l'Unité. Car puis que l'Unité, Costé, Quarré, Cube, &c. sont continuellement proportionaux : si le costé est la centiesme de l'Unité, tenant la deuxiesme place ; le Quarré sera pareillement la centiesme du costé, en devant tenir la quatriesme : & ainsi tousjours plus outre de degré en degré a mesure que les Puissances se changent, comme icy ∴

	10000,00000,000	Unité.	**(-> 12)**
Costé	15116,46599,90567,29504,88	①	
Quarré	22850,75443,00638,16726	②	
Cube	34542,26523,94854,62	③	
Biquarré	52215,69780,2288	④	
	78931,68205	⑤	
* *	1,19316,81	⑥	
*	18036	⑦	

(->10)		Icy restent les differences ma-	65	$\frac{1}{32}$E
		jeures par la soubstraction	2855,589	$\frac{1}{16}$D
		des moindres d'avec les	2855,524	D
		parties de l'espece	2158,89973,616	$\frac{1}{8}$C
		dernierement	2158,87118,092	C
		precedente.	2856,34430,37579,772	$\frac{1}{4}$B
			2856,32271,50461,680	B
			7558,23299,95283,64752,440	$\frac{1}{2}$A
	37		10000,07558,20443,63012,14290, 760	A
			2	$\frac{1}{32}$E
			178,470	$\frac{1}{16}$D
			178,468	D
			269,85889,762	$\frac{1}{8}$C
			269,85711,294	C
			714,08067,87615,420	$\frac{1}{4}$B
			714,07798,01904,126	B
(->13)			3779,10221,81506,07145,380	$\frac{1}{2}$A
	36		100000,03779,09507,73708,05241,254	A

$\frac{1}{2}$ ② - - - 11425,37721,50319,08363 *B*

B

$\frac{1}{2}$ ③ - - - - 17271,13261,97427,3

$\frac{1}{8}$ ④ - - - - - - 6526,96222,5

$\frac{1}{2}$ ③ + $\frac{1}{8}$ ④ - - - 17271,19788,93649,8 *C*

‡

$\frac{7}{8}$ ④ - - - - - - 45688,73557,7

$\frac{7}{8}$ ⑤ - - - - - - - - 69065,2

$\frac{7}{16}$ ⑥ - - - - - - - - - - - 522

$\frac{7}{8}$ ④ + $\frac{7}{8}$ ⑤ + $\frac{7}{16}$ ⑥ - - 45689,42623,4 *D*

$2\frac{5}{8}$ ⑤ - - - - 2,07195,66

7 ⑥ - - - - - - - - - - 8,351

$2\frac{5}{8}$ ⑤ + 7 ⑥ - - 2,07204,01 *E*

et enfin :

$$d_n = \frac{1}{8} c_{n-1} - c_n$$
$$= \frac{7}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 + \frac{7}{16}x^6 + \frac{x^7}{8} + \frac{x^8}{64}.$$

En poursuivant les calculs on obtient, en se limitant à l'ordre 10 :

$$e \approx \frac{42}{16}x^5 + 7x^6 + \frac{175}{16}x^7 + \frac{1605}{128}x^8 + \frac{715}{64}x^9 + \frac{1001}{128}x^{10} \quad \text{et}$$

$$f_n \approx (13 + \frac{18}{32})x^6 + (81 + \frac{3}{8})x^7 + (296 + \frac{87}{128})x^8 + (834 + \frac{43}{128})x^9 + (1953 + \frac{310}{512})x^{10}.$$

On vérifie que pour : $x \approx 1,5116.10^{-5}$, on a : $e_n \approx 2,07.10^{-24}$ et $f_n \approx 1,618.10^{-28}$ **(12).**

A partir des tableaux 37 et 36 donnés par Briggs, on peut imaginer la suite des calculs. **(13)**

Les 35 tableaux suivants se déduisent de proche en proche en utilisant les différences. On peut prévoir l'extinction de la différence cinquième dans le tableau 35 puis celle des différences quatrième, troisième, seconde dans les tableaux ultérieurs.

Conclusion

Les quelques extraits de l'*Arithmétique Logarithmétique* que nous avons présentés démontrent l'extraordinaire virtuosité que Henry Briggs déploie dans ses calculs. Celle-ci provient sans aucun doute de sa fréquentation assidue et prolongée du domaine numérique. Dans le reste du traité, ceux qui ne sont plus familiers des tables de nombres, trouveraient bien d'autres sujets d'étonnements. Lorsque Briggs annonçait dans la préface de ce même traité : "*le calcul des différences ne présente plus aucune difficulté pour moi ; j'en connais les principes depuis vingt ans*", il ne s'agissait pas de vaines paroles.

BIBLIOGRAPHIE

BRIGGS Henry : *Arithmetique Logarithmetique*, traduit en français par A. Vlacq, Chez Pierre Rammasein. Goude, 1628.

NAUX Charles : *Histoire des Logarithmes*, Éd. Blanchard, Paris, 1966.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne : *Une Histoire des Mathématiques : routes et dédales*, Éd. Seuil, coll. *Points-Sciences*, n° S49, Paris, 1986.