MATHÉMATIQUES ET CALCULATRICES EN DEUG B PREMIÈRE ANNÉE (1)

Yvon NOUAZÉ
Irem de Montpellier (2)

LE POINT DE DÉPART

La majorité des étudiants du Deug B possède un Bac D. Leurs connaissances en mathématiques sont celles de cette série : moins étendues que celles des titulaires du bac C et aussi, moins théoriques. Ceci étant, (et malgré cela) leur intérêt pour cette matière est réel pour une grande partie d'entre eux, du moins en début d'année universitaire.

Cette population d'étudiants est confrontée à l'étude d'un large éventail de matières. A Montpellier, il s'agit de sept : Mathématiques, Physique, Chimie organique, Chimie minérale, Biologie, Sciences de la Terre et Français. En ce qui concerne les mathématiques, le poids de celles-ci est, en temps et en coefficient, de l'ordre de 14%. Avec ce poids faible, elles apparaissent à beaucoup comme "la dernière roue de la charette". Ajoutons à cela qu'elles sont traditionnellement perçues par les étudiants comme une matière ingrate, en ce sens que le travail à fournir n'est pas compensé par l'espoir d'une "bonne note". Il s'ensuit, en règle générale, une désaffection plus ou moins rapide pour cette discipline, d'autant plus rapide que les notions nouvelles sont nombreuses et posent de gros problèmes de compréhension, ou au moins, de familiarisation. [Ce sont pour beaucoup d'ailleurs, les mêmes problèmes que ceux qui se posent en Deug A.]

Face donc à cette situation, il nous a semblé intéressant de proposer aux étu-

(1) Bien que la terminologie ait changé, je conserve toujours cette appellation qui parle, momentanément, plus que l'actuelle : Deug Sciences mentions Sciences de la Terre, Sciences de la Vie. En ce qui concerne la terminologie du baccalauréat, les titulaires du Bac D seraient maintenant les bacheliers ayant suivi l'enseignement de spécialité biologie, voire de sciences physiques dans leur terminale scientifique.

(2) Je tiens à remercier mon collègue Luc TROUCHE pour sa relecture attentive du manuscrit et ses critiques et suggestions.

diants une approche différente des mathématiques, cette approche étant basée sur le recours à une calculatrice graphique et programmable, mais ne disposant pas de possiblités de calcul formel [3]. Il faut dire aussi que cela était un moyen d'utiliser l'intérêt, voire la fascination, de certains élèves pour ce type de matériel, et donc de susciter un *a priori* positif de leur part.

MATHÉMATIQUES ET CALCULATRICES

Recourir à une calculatrice impose une réflexion sur l'utilisation d'un tel outil. En particulier, il est nécessaire de revoir avec un œil différent les manières d'aborder certaines notions et leurs techniques d'apprentissage ; il est également nécessaire de proposer des activités où l'utilisation d'une calculatrice est obligatoire sinon très fortement recommandée.

En fait, la première question qui se pose est : "peut-on faire des mathématiques avec une calculatrice ?" Si la réponse est positive pour certains, ce n'est pas le cas pour une majorité d'entre nous : la calculatrice apparaît comme un "gadget", utilisé par les élèves pour y entrer les formules qu'ils ne veulent pas apprendre, pour tracer des graphes sans faire l'étude préalable de la fonction, etc. [4]

Pour essayer de convaincre les réticents que ce n'est pas le cas, voici quelques situations (niveau terminale ou plus) où la calculatrice révèle ses possibilités, au niveau de la recherche, au niveau des conjectures, au niveau du contrôle des résultats et du strict calcul numérique.

1) Recherche du nombre de racines réelles d'un polynôme ; recherche du nombre de pôles réels d'une (fonction) fraction rationnelle.

Le graphe suggère un certain nombre de racines. La théorie (ici, le nombre et l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme) va permettre de dire si le nombre de racines (réelles) suggéré est le bon. En effet, il ne faut pas oublier que l'écran affiche seulement une partie du graphe, et donc une racine peut ne pas être visible. Il peut être intéressant à cette occasion d'établir le résultat suivant. Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$, les éventuelles racines réelles sont dans l'intervalle $[-a-1, a+1]$ où $a = \text{Max} \; |a_i/a_n|$.

Pour une fraction rationnelle, le nombre d'asymptotes verticales [5] donne le nombre de pôles réels ce qui permet de conjecturer une simplification qui n'apparaissait pas auparavant. En outre, l'allure du graphe au voisinage de l'asymptote donne des renseignements sur la parité de l'ordre du pôle.

(3) La programmation, outre le b-a-ba qui consiste par exemple à programmer les valeurs d'une suite, d'une fonction, sera utilisée quasiment uniquement pour copier un programme, sans qu'il soit demandé à l'étudiant de l'écrire ou de le concevoir. Dans ce sens, la programmation sera équivalente à l'adjonction d'une touche supplémentaire à la calculatrice. Il ne serait pas raisonnable, en Deug B, de demander plus. Pour ne pas alourdir le texte, nous parlerons simplement, à partir de maintenant, de calculatrice.

(4) Voir, sur ces points et d'autres, dans *Repères-IREM* n°14, Janvier 1994, l'article de L. Trouche : "Calculatrices graphiques, la grande illusion".

(5) La calculatrice ne trace pas d'asymptote. Mais dans certaines situations, notamment quand le tracé du graphe est constitué par des segments joignant deux points consécutifs – mode *Connected* pour les TI 81 et 82 par exemple – le segment joignant deux points peut apparaître comme une asymptote. L'asymptote dont nous parlons est l'asymptote "théorique" ; il s'agit de constater qu'au voisinage d'un point, les valeurs prises par la fonction sont, en valeur absolue, "grandes". Voici, l'exemple de la fonction f définie par

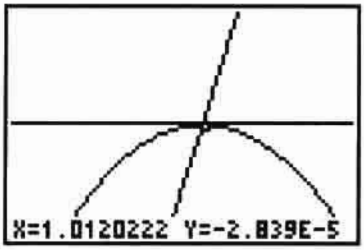
Exemple.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4-1,6199x^3-8,16262x^2+17,321914x-8,54099127}{x^3-0,01x^2+0,03x-1,0504}$$

* f et g semblent avoir une racine commune a vérifiant 1,0098498 < a < 1,0106196. (Mais il faut prendre du recul. Le graphe "standard" peut suggérer une asymptote verticale, c'est pour cela qu'il faut «prendre du recul» avec la commande *ZOOM*).

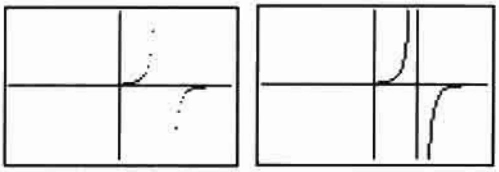
* le graphe de $\frac{f}{g}$ montre qu'il n'y a aucun pôle réel (visible).

Voici les deux graphes que l'on peut observer.

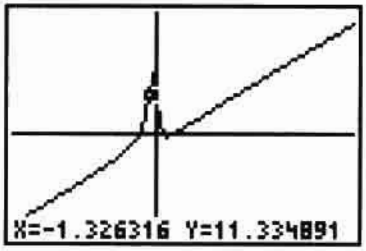


Graphes de f et g au voisinage de 1,01

$f(x) = 1/(2 - x)^3$ où les graphes sont d'une part constitués de points isolés, d'autre part de points reliés entre eux.



Dans certaines situations, discontinuité en un point, limites à droites et à gauche finies et différentes, fenêtre réduite, ce segment parasite peut faire penser à l'existence d'une asymptote... qui n'existe pas.



Graphe de $\frac{f}{g}$

Ceci nous suggère que $\frac{f}{g}(x)$ s'écrit $\frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)}$ où $g_1(x)$ n'a aucune racine réelle (et est nécessairement de degré 2).

C'est effectivement le cas, on a :

$f(x) = (x - 1,01)^2(x + 3,101)(x -27)$, et
$g(x) = (x - 1,01)(x^2 + x + 1,04)$,
et une forme réduite de $\frac{f}{g}$ est

$$\frac{(x - 1,01)(x + 3,101)(x - 2,7)}{x^2 + x + 1,04}.$$

2) Éléments de symétrie d'un graphe, périodicité d'une fonction.

L'allure d'un graphe, peut amener à faire des conjectures sur l'existence d'axes ou de centres de symétrie. Même chose pour la périodicité.

3) Existence ou non d'une asymptote oblique. Recherche de son équation.

L'étude graphique "en l'infini" de $\frac{f(x)}{x}$, de $f(x) - ax$, de $f(x)$ et de x va corroborer les résultats des calculs (a est le coefficient directeur de la droite asymptote déterminé par le calcul) (6). En outre, la calculatrice va donner la position relative du graphe de f et de l'asymptote. Enfin, la manipulation "à l'infini" des graphes, doit permettre de mieux saisir ce qu'est une asymptote. Voici deux exemples.

a) $f(x) = 2x + 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}$

Il est immédiat que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

Ecrivons f(x) sous la forme

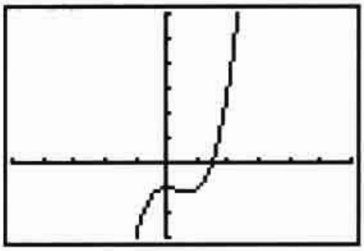
$$(2x + 1) + \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2(x^2+1)}.$$

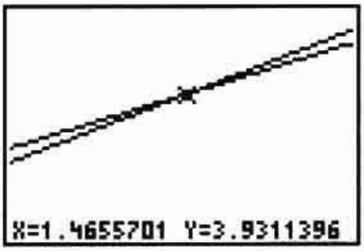
Comme $\frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2(x^2+1)}$ se comporte à l'infini comme $\frac{1}{x}$, cette forme montre immédiatement que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique.

Un étude plus poussée montre que pour x positif (et assez grand) le graphe de f est au dessus de l'asymptote, alors que, pour x négatif (assez grand en valeur absolue) la position est inversée. Ceci se démontre aussi de la manière suivante. La différence, pour une abscisse donnée x, entre l'ordonnée du point (x,f(x)) du graphe de f et du point (x, 2x + 1) du point correspondant de l'asymptote est égale à

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2(x^2+1)}.$$

Cette différence est évidemment du signe du numérateur. Un tracé rapide du graphe correspondant montre que ce numérateur est positif si x est supérieur à une valeur de l'ordre de 1,5 et est négatif autrement.





(6) La locution "étude en l'infini", prise comme synonyme de "étude en plus ou moins l'infini de la limite (éventuelle) des fonctions considérées lorsque x tend vers plus ou moins l'infini" ne pose pas problème. Il est clair, par contre, que "l'étude graphique en l'infini" présente des difficultés. Il est bien évident que ce que l'on voit sur un intervalle fini, même si sa borne supérieure est 10^{99}, ne préjuge en rien du comportement à l'infini. Seules, des conditions supplémentaires permettront de conclure à partir d'un résultat à distance finie : par exemple, si une fonction est croissante et si elle est positive à partir d'un nombre réel A, déterminé à l'aide de la calculatrice, on pourra affirmer qu'elle est positive à l'infini. Toutefois, pour la plupart des fonctions que l'on peut rencontrer, leur comportement à distance finie sera le leur à l'infini, de sorte que "l'étude graphique à l'infini" pourra être déduite de l'étude à distance finie. Enfin, ce qui est important, c'est que les résultats obtenus par le calcul soient cohérents avec ceux obtenus par la calculatrice. Cela étant, il est toujours possible de se ramener à distance finie, plus précisément au voisinage de zéro, en effectuant le changement de variable $x = 1/t$. La calculatrice l'accepte tout à fait. Mais n'a-t-on pas remplacé ainsi un infini par un autre ? En outre, il me semble que l'on perd ainsi, pour le cas des asymptotes, la signification géométrique de celles-ci.

Donc, "on passe du graphe à l'asymptote en ajoutant une quantité positive si x >> 0, et une quantité négative si x << 0 ", ce qui traduit le fait que, si x >> 0 le graphe est au dessus de l'asymptote et en dessous si x << 0.

En outre, on peut préciser la racine du numérateur et son rôle plus spécifique. Pour cette valeur, la "différence entre le graphe et l'asymptote change de signe", ce qui signifie que le graphe de f coupe l'asymptote. En examinant "au microscope" le graphe au voisinage de la racine on trouve que celle-ci est comprise entre 1.465 57 et 1.465 55 (*cf.* ci-dessus).

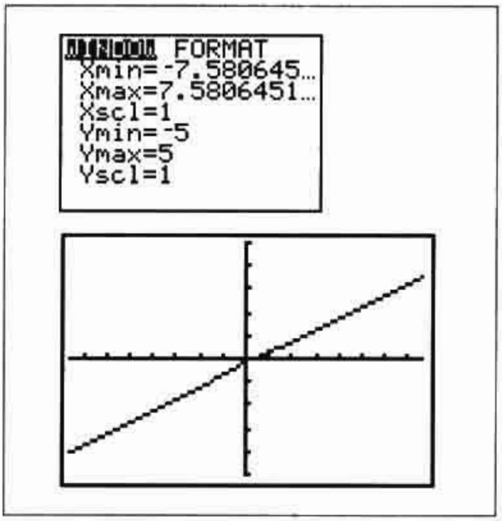
b) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ si x est non nul et $f(0) = 0$ [7].

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, le dénominateur ne s'annule pas et f est donc toujours définie.

Le graphe donne à penser qu'il y a une asymptote, ou du moins, une direction asymptotique. Cela est confirmé par le calcul, puisque $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ tend vers 1/2 quand x tend vers ±∞. Ceci étant vu, on trace le graphe de $f(x) - \frac{1}{2}x$. La limite, en +∞, suggérée par la calculatrice semble $-\frac{1}{4}$. De même, en -à, la limite semble également $-\frac{1}{4}$.

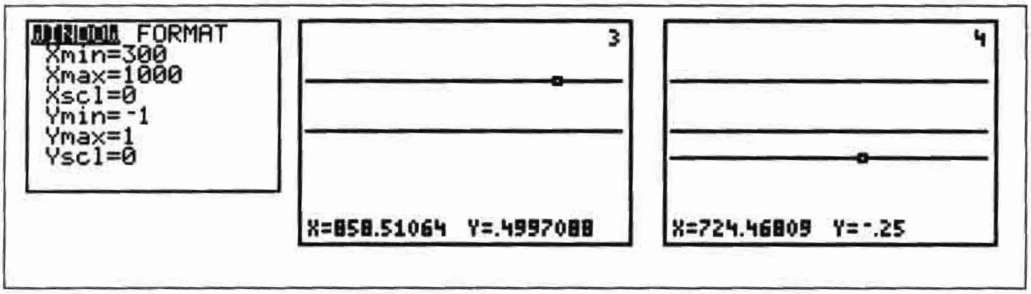
Si l'on veut démontrer ces résultats, il faut chercher la limite quand x tend vers plus ou moins l'infini de $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}\left[\dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}\right]$. Suivant le point d'avancement du cours, on peut ou non calculer cette limite. {On montre que le développement limité à l'ordre 3, à l'infini, de la quantité entre crochets est : $\dfrac{-1}{2x} + \dfrac{1}{24x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Il en résulte que la limite de $f(x) - \dfrac{1}{2x}$ est $-1/4$ }.

L'allure générale se voit sur la calculatrice.



Ci-dessous, les graphes de f(x)/x seul puis de f(x)/x et f(x) – 0,5x dans le domaine considéré.

(7) On pourrait s'inquiéter de la "réaction" de la calculatrice en mode graphique devant une telle définition. Aucune inquiétude à avoir : une calculatrice trace un graphe point par point et les points ont des abscisses de la forme x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h$, etc. Si, en un point d'abscisse $x_0 + kh$, la formule n'a pas de sens, la calculatrice n'allume pas de pixel. Par exemple, pour x négatif, le graphe de f, définie par $f(x) = \sqrt{x}$, ne comporte aucun point pour x < 0.



(Window donne les bornes de la fenêtre considérées, qui sont, pour x, Xmin et Xmax, et pour y, Ymin et Ymax ; Xscl et Yscl sont les pas de la graduation sur chacun des axes. Quand ces données sont nulles, comme ici, cela signifie qu'il n'y a aucune graduation.)

4) Existence de points singuliers.

L'allure de la courbe, la possibilité de tracer le graphe de la dérivée (et aussi de la dérivée seconde) permettent de conjecturer l'existence de tels points.

Par exemple, la représentation de $f : x \rightarrow 2x + \sqrt{| x^2 - 1 |}$, permet de conjecturer l'existence de points singuliers. (Ce qui peut être conforté par la représentation de f'.) (Graphes ci-dessous.)

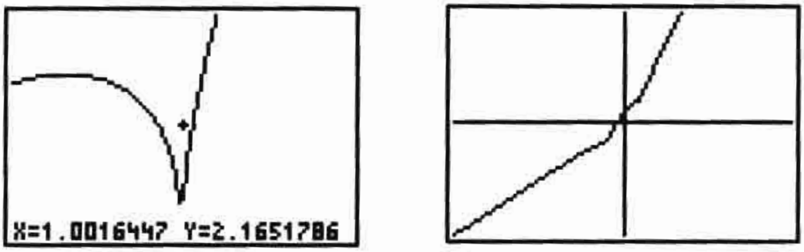
En outre, les agrandissements du graphe au voisinage des points "litigieux" permettent de bien visualiser le "non raccordement des tangentes".

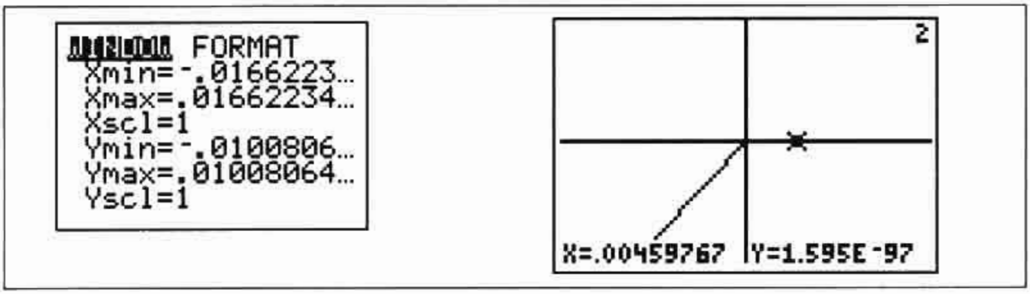
Reprenons l'exemple b) du point 3 ci-dessus.

Voici l'allure du graphe au voisinage de (0,0) (graphes page suivante). La calculatrice donne un graphe "désespérément plat" au voisinage de (0,0), pour x > 0, même si les valeurs prises par f ne sont pas nulles ; ainsi, avec les intervalles de variations de x et y définis sur l'écran de gauche, la première valeur de y qui apparaisse à l'écran en mode TRACE est celle indiquée. Pour x variant entre 0 et 0,00459767 les valeurs de y sont inférieures à 10^{-99}, et sortent donc du domaine des valeurs prises en compte par la calculatrice.

Pour ce qui concerne la valeur de la dérivée à gauche et à droite de 0, l'étude de

Allure
générale du
graphe
et
agrandissement
d'un
détail





la limite à gauche et à droite de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ donne le résultat, à savoir : dérivée à gauche égale à – 1, dérivée à droite égale à 0, ce qui est conforme au graphe.

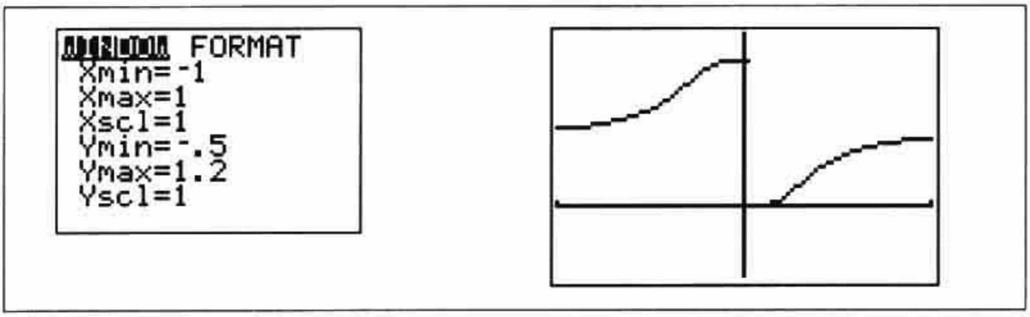
Tout ceci est corroboré par l'examen, au voisinage de (0,0), du graphe de Nder(f,..) (ci-dessous) [8].

5) Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point.

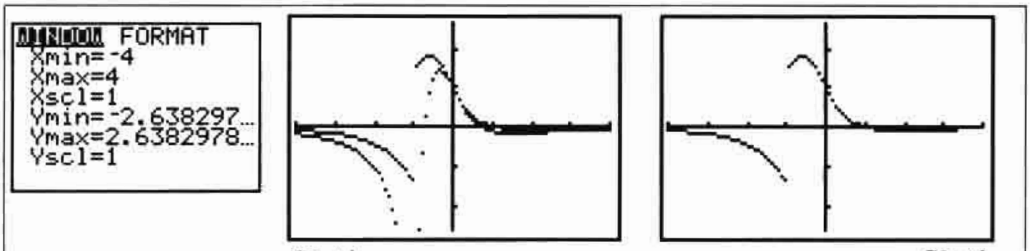
Le tracé de la tangente, l'étude de la fonction NDeriv (f,..), l'étude graphique du signe de f(x) – t(x) vont permettre d'énoncer des conjectures.

6) Contrôle de la validité du calcul de l'application réciproque (ou inverse) d'une fonction f.

Les graphes de f et de f^{-1} doivent être symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice. Si l'on a pris les mêmes unités sur les deux axes, une erreur de calcul doit sauter au yeux et donc infirmer le calcul fait ; de même, si les deux graphes *semblent symétriques*, l'expression de f^{-1} peut, vraisemblablement, être consi-



(8) Nder(f,..), (notation des TI 81, 82 et 85), est une fonction intégrée à la calculatrice, qui donne une valeur approchée de la dérivée en un point, ou un graphe très proche de celui de f ', via la dérivée symétrique. Rappelons que si f est dérivable en a, la quantité (f(a + h) – f(a – h))/2h a pour limite f '(a) lorsque h tend vers zéro ; pour h donné, de l'ordre de 0,001, la quantité en question constitue une approximation "correcte" de f '(a). (La limite peut exister sans que f '(a) existe ; elle s'appelle alors la dérivée symétrique de f en a.)



G1 et h *G2 et h*

dérée comme exacte. (Remarque. Un petit programme permettant de calculer fog (x) pour des valeurs de x que l'on introduit à la demande, est peut-être aussi efficace, mais on utilise par cette technique une autre caractérisation d'une application et de son application inverse.)

7) Vérification du calcul d'une dérivée.

(Avec les TI 81et 82 ou avec la Sharp EL 9200 ou 9300.) Si f est une fonction donnée, les graphes de f ' et de NDeriv(f, h) où h est un nombre réel fixé (par exemple h = 0,01) doivent coïncider (en première approximation). La non coïncidence (qui est très visible) indique une erreur dans le calcul de f '.

Par exemple, soit

$$f(x) = \text{Arc sin}\,\frac{x}{x^2+x+1}.$$

Un premier calcul de la dérivée a donné

$$g_1(x) = \frac{1-2x^2}{(x^2+x+1)\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}}\ ;$$

après "vérification", on a trouvé :

$$g_2(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}}\ .$$

La comparaison entre les graphes de g_1, g_2 et h = N Deriv (f(x),..) montre que g_1 n'est certainement pas l'expression de f' et que g_2 est très certainement la valeur exacte (ci-dessus).

De même, il est possible de vérifier le calcul de la dérivée seconde d'une fonction. Il suffit de comparer les graphes de NDeriv(NDeriv(f,..),..) et de la dérivée seconde que l'on a calculée.

(Avec une autre calculatrice.) La cohérence ou plutôt la non cohérence des graphes de f et la dérivée calculée "à la main" permet de (presque) affirmer que le calcul de f' est correct ou non.

8) Vérification du calcul d'une primitive.

C'est évidemment la même démarche que ci-dessus.

9) Division euclidienne des polynômes.

Si l'on effectue la division euclidienne de f par g, on doit obtenir une relation du type f = gq + r, avec les conditions habituelles sur r. Si le résultat est juste, les graphes de f – gq et de r doivent coïncider ; la non coïncidence est la preuve d'un calcul faux. Il est aussi possible de tracer le graphe de (f-gq)/r qui doit coïncider avec la droite y = 1. {Ce type de vérification pourrait tout à fait s'appliquer au résultat de la division suivant les puissances croissantes.}

10) Vérification de la solution d'une équation différentielle.

(Avec les TI 81ou 82 ou avec la Sharp EL 9200 pour l'équation d'ordre 1.)

Équation différentielle d'ordre 1. Par exemple, imaginons que par une démarche quelconque on soit amené à vérifier que $y = (-x)/(x^2 + Cx + 1)$, où C est un nombre réel arbitraire, est solution de l'équation différentielle $y' - (1 - \frac{1}{x^2})y^2 = 0$. On vérifie graphiquement, pour des valeurs de C quelconques, que le graphe de NDeriv(y, h) coïncide avec celui de $(1 - \frac{1}{x^2})y^2$. (Cette vérification ne dispense pas de la vérification habituelle par le calcul ! *Voir l'encadré*).

Équation différentielle d'ordre 2. Supposons que l'on ait à résoudre une équation du type $y'' + \omega^2 y = 0$. Si l'on a trouvé une solution z, on vérifie que c'est effectivement une solution en vérifiant graphiquement que $\text{NDeriv}(\text{NDeriv}(z,h),h) = -\omega^2 z$.

11) Contrôle de l'équation d'une asymptote.

Si l'on a trouvé l'équation de l'asymptote, $y = ax + b$, la calculatrice graphique permet de visualiser le fait que la droite correspondante est asymptote au graphe de f. Cela peut se faire, soit en traçant les graphes de $y = ax + b$ et de f, soit en traçant le graphe de $f - y$. (Voir aussi le paragraphe consacré aux conjectures.)

12) Visualisation de la continuité d'une fonction en un point.

En fait, il s'agit de traduire, ou du moins d'approcher en termes géométriques, la définition de la limite d'une fonction en "termes de ε et η". En se donnant un ε quelconque, on détermine, si c'est possible, le η qui convient. De manière pratique, si a est la limite en x_0, on trace les droites $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$, et on détermine un η. De fait, ce qui est le plus intéressant, c'est le cas où la fonction n'est pas continue [9].

13) Contrôle de la validité d'un développement limité.

Supposons que nous ayons trouvé le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0. Pour vérifier si nous n'avons pas commis d'erreur, nous cherchons *graphiquement* si $\frac{f(x) - P_n(x - x_0)}{(x - x_0)^n}$ tend vers zéro quand x tend vers x_0.

Exemple.

Le développement limité à l'ordre 5 de sin au voisinage de 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$$

* On vérifie que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})}{x^5} = 0$

* Supposons que nous ayons trouvé $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{110}$ pour partie polynôme.

(9) Quand on sait combien les étudiants ont des difficultés pour "apprivoiser les ε et les η", et ceci bien sûr aussi bien en Deug A qu'en Deug B, ce type de manipulation peut être bénéfique. Ceci étant, il va sans dire que la définition par ε et η de la continuité est hors de propos en Deug B : c'est l'aspect géométrique qui prime.

Alors, dans ce cas, la calculatrice graphique va nous dire que $\dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{110})}{x^5}$ tend vers environ $-7,5.10^{-4}$.

En effet :

$$\begin{aligned}\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{110}) &= \sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^5}{110}) \\ &= \sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{110}\end{aligned}$$

et donc $\dfrac{\sin x - P_5(x)}{x^5}$ a pour limite $(\dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{110})$ soit environ $-7,58.10^{-4}$.

* Supposons que nous ayons trouvé $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{120}$ (erreur courante qui consiste à oublier le signe “factoriel”, ainsi 3 ! se transforme en 3). Alors, le graphe de $\dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120})}{x^5}$ présente une discontinuité en zéro.

Ceci s'explique de la manière suivante. On a :

$$\begin{aligned}\sin x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120}) &= \sin x - (x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{6}) \\ &= \sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3}.\end{aligned}$$

Quand on divise par x^5, on obtient, $\varepsilon(x) + \dfrac{1}{x^2}(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6})$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers zéro ; le terme en $\dfrac{1}{x^2}$, dont le coefficient est non nul, donne la discontinuité.

Ainsi, en présence d'un développement limité la représentation graphique de

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P_n(x - x_0)}{(x - x_0)^n}$$

nous donne divers renseignements :

1°– Si $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont exacts ;

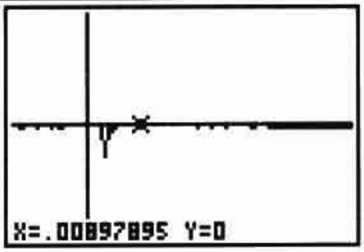
2°– Si $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) \neq 0$ et est finie, le coefficient a_n, et seulement lui, est faux ;

3°– Si $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \pm\infty$, un au moins des coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ est faux, (et aussi, peut être, le coefficient a_n).

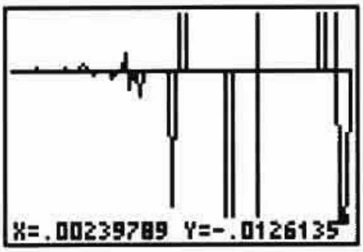
La conclusion du 1° serait fausse, si $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x)$ n'était pas nulle, mais égale à une quantité finie inférieure à la précision de la machine. En pratique, cela ne se produit jamais, car les erreurs, quand elles existent, sont bien plus franches.

Voici les graphes (page suivante) et les domaines de variations dans les situations envisagées.

En ce qui concerne l'algèbre linéaire, la calculatrice prend ici aussi tout son intérêt dans la réalisation des calculs : qui ne s'est jamais trompé dans le calcul d'un déterminant, dans le calcul de l'inverse d'une matrice, le calcul d'un polynôme caractéristique...?

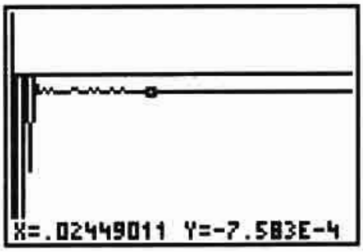


RANGE
Xmin=■.013
Xmax=.045
Xscl=0
Ymin=-.018
Ymax=.018
Yscl=0
Xres=1



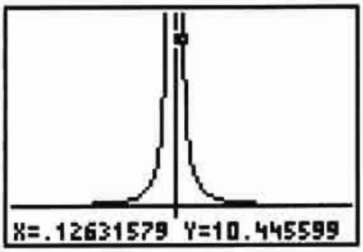
RANGE
Xmin=■.007
Xmax=.0026
Xscl=0
Ymin=-.014
Ymax=.0046
Yscl=0
Xres=1

Ci-contre, développement limité correct. La recherche d'une trop grande précision donne des résultats aberrants (10) *(graphe inférieur).*



RANGE
Xmin=■2.4E-4
Xmax=.06
Xscl=0
Ymin=-.008
Ymax=.003
Yscl=0
Xres=1

Dernier terme du développement limité faux ; la limite n'est pas nulle.



RANGE
Xmin=■2.4
Xmax=2.6
Xscl=0
Ymin=-2
Ymax=12
Yscl=0
Xres=1

Un des coefficients, autre que le dernier, est faux. Le graphe est tout de suite explicite.

(10) Dans le cas qui nous concerne, pour $x = 1{,}6\ 10^{-6}$, le numérateur vaut, pour la calculatrice, -1.10^{-18}, et ne comporte donc plus qu'un chiffre significatif ; le numérateur vaut $4{,}096\ 10^{-18}$, et ne comporte donc que quatre chiffres significatifs. C'est cette "perte de substance" concernant les chiffres significatifs qui provoque des résultats très approximatifs : les troncatures jouent alors un rôle énorme.
Dans le cas présent, la valeur -1.10^{-18} est peut-être, en fait, $-1{,}9.10^{-18}$, auquel cas la valeur du rapport passe quasiment du simple au double !

Tous les calculs fastidieux sont éliminés : pensons à l'exercice classique consistant à écrire la matrice d'une application linéaire après un changement de bases.

Ceci étant, il faut savoir un peu de mathématique pour "aider la calculatrice" : le déterminant d'une matrice à coefficients entiers ne peut pas être égal à $-1{,}5.10^{-11}$; si A est une matrice inversible à coefficients entiers, la matrice (dét A) A^{-1} est une matrice à coefficients entiers, ce qui permet, dans la plupart des cas, de remplacer les éventuels éléments "trop petits" de A^{-1} par zéro. Ainsi, l'application de cette remarque permet de dire que l'élément 4.10^{-13} qui apparaît dans l'inverse de A est en fait égal à 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}35 & 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}40 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{50}{9} & -10 & \frac{70}{9} & \frac{-10}{3} \\ \frac{-25}{3} & 5 & \frac{-5}{3} & 5 \\ \frac{74}{9} & 6 & \frac{-26}{9} & \frac{-22}{3} \\ \frac{-40}{9} & 4.10^{-13} & \frac{-20}{9} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Concernant la résolution d'un système de n équations linéaires à m inconnues, la méthode de Gauss peut être facilement [11] mise en œuvre afin que l'on puisse effectivement suivre le détail des opérations.

D'autre part, alors que la plupart des calculatrices (dans la gamme de prix considérée ici, à savoir en dessous de 700 FF) ne permettent pas de travailler formellement, la connaissance de la théorie va permettre, malgré tout, de "faire comme si". Par exemple, le système suivant, bien que comportant un paramètre, se résoud simplement avec une calculatrice.

$$\begin{cases} -2x + 3y - 5{,}1z = 1 - 4{,}3m \\ 2{,}1x - 3{,}1y + 4{,}2z = -0{,}5 + 2{,}3m \\ 7{,}2x - 2{,}5y + 3{,}7z = 2{,}1 - 5{,}1m \end{cases}$$

On pourrait encore montrer de nombreux exemples d'utilisation d'une calculatrice mobilisant des connaissances mathématiques ; nous laissons le soin au lecteur de les imaginer.

Ajoutons, pour terminer, qu'une calculatrice permet d'aborder des situations plus complexes que celles habituellement mises en œuvre : les fonctions polynômes ont des racines différentes de ± 1, ± 2 ou 0, les coefficients qui interviennent ne sont pas des entiers... etc. [12].

Dans le cas du DEUG B, cela est intéressant car dans les disciplines autres que les mathématiques, ces situations se rencontrent plus souvent, et très naturellement.

Compte tenu de ces nouveautés, nous avons rédigé un polycopié prenant en compte ces caractéristiques. Disons qu'il est classique par son contenu, et beaucoup

(11) A condition que la calculatrice le permette !

(12) Je me demande d'ailleurs si tous les exercices que l'on donne, où les coefficients sont entiers, où les solutions sont entières ou "classiques" ($\sqrt{2}$, π,...), ne donnent pas une idée un peu fausse des problèmes que peuvent résoudre les mathématiques. Les calculatrices doivent permettre de donner un autre point de vue.

moins par le recours assez systématique à une calculatrice, notamment au niveau des exercices. Bien évidemment, un certain nombre d'exercices habituels y figurent également. De toute manière, tout ne peut pas être fait avec une calculatrice.

LA VÉRIFICATION

Le problème de la vérification d'un résultat est un problème complexe. En effet, il n'échappe à personne, lycéen, étudiant, enseignant, que le fait de savoir si le résultat auquel on aboutit à un moment donné est exact, est important, soit en lui-même, soit pour la suite ; et pourtant, on constate très souvent que cette vérification n'a pas lieu. Plusieurs raisons, me semble-t-il, concourent à cette situation.

Bien souvent le résultat est obtenu à la suite d'une succession de calculs perçus comme difficiles, et la perspective de revérifier tous ces calculs "désespère" l'élève qui ne veut pas se relancer dans les dits calculs. S'ajoute à cela, et je pense que c'est la raison essentielle, la peur diffuse mais bien réelle, de s'apercevoir que le résultat est faux et qu'il faudra refaire tous les calculs. Ajoutons aussi que, souvent, une vérification reproduit dans la plupart des cas les erreurs "bêtes" déjà faites, et que la vérification n'apporte rien, (et elle est considérée alors, bien souvent, comme du temps perdu), sinon le fait d'être conforté dans un résultat faux, ou pire (?) la certitude que l'on s'est trompé quelque part et que l'on ne trouve pas la source de l'erreur.

C'est pourquoi, je pense qu'il y a cette absence de vérification : on ne vérifie pas de crainte d'avoir à remettre en question, et le résultat, et toute les démarches réalisées pour obtenir le résultat. S'y ajoute sans doute aussi un certain fatalisme : "j'ai fait les calculs, j'ai un résultat, il vaut ce qu'il vaut, est-il juste, est-il faux ?, je ne me pose plus la question".

Je me demande si les résultats aberrants que l'on trouve quelquefois, et dont l'élève sait qu'ils sont aberrants, ne sont pas la conséquence d'une telle attitude. En fait, je pense que c'est la non appropriation du problème qui est est la cause de cette attitude.

Dans certains cas, la calculatrice propose un mode de vérification différent de celui utilisé pour arriver au résultat ; ainsi, l'obstacle constitué par la perspective de refaire des calculs compliqués disparaît. Le problème demeure de la situation où l'on trouve deux résultats différents ; disons même qu'il se complique, puisque la divergence des deux résultats peut provenir d'une erreur de calcul ou d'une erreur dans le maniement de la calculatrice ! On n'en sort pas !

LE DÉROULEMENT DE L'EXPÉRIENCE

Seule une série (sur cinq) de DEUG B 1re année était concernée par cette expérience qui a eu lieu pendant l'année universitaire 1992/93. Les étudiants qui y étaient inscrits l'avaient fait par choix : au moment des inscriptions, en Juillet, ils étaient avertis de la possibilité de suivre cette série. En outre, s'ils s'y inscrivaient, il leur était demandé de se (re)familiariser avec le fonctionnement de leur calculatrice.

Afin d'homogénéiser autant que faire se pouvait, le parc de machines utilisées, les calculatrices suivantes étaient recommandées : Texas Instruments TI 81, Casio 7700G et 7800G (13), Sharp EL 9200 (14). A la rentrée, les étudiants avaient à leur disposition le polycopié dont il a été parlé ci-dessus (15).

Le cours se faisait en amphi, avec utilisation ponctuelle d'une calculatrice rétroprojetable, plus pour illustrer le cours que pour montrer le maniement de la calculatrice. Il y avait environ 35 étudiants par groupes de TD. L'organisation était donc celle habituellement retenue. Les enseignants qui intervenaient au niveau des TD étaient des adeptes, voire des propagandistes de l'utilisation des calculatrices.

Enfin, les étudiants étaient avertis que, lors des épreuves écrites (partiel et examen), ils disposeraient de leur polycopié et, bien sûr, de leur calculatrice (16).

L'ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE

Disons tout de suite que les résultats n'ont pas été à la hauteur des espoirs.

Un des points essentiels et même fondamentaux, que nous avions considéré comme acquis, comme allant de soi, était que les étudiants devaient connaître la manipulation de leur calculatrice : ils étaient volontaires et il leur avait été demandé de réviser leur technique. Il s'est révélé immédiatement, dans la première semaine d'enseignement, que pour la plupart d'entre eux, ce n'était pas le cas : ignorance de l'emplacement des touches, ignorance de la syntaxe..., pour tout dire, ignorance du b-a-ba du fonctionnement. Compte tenu de cette constatation, nous avons alors proposé aux étudiants une ou deux séances de prise en main. Cette proposition, accueillie favorablement dans un premier temps, a été refusée quand il est apparu que ces séances auraient lieu en dehors de l'horaire normal. Ainsi donc, dès le départ, les dés étaient pipés pour une grande partie de l'auditoire qui n'était pas en mesure de mettre correctement en œuvre sa calculatrice. Par exemple, les quelques programmes proposés : résolution d'un système par la méthode de Gauss, calcul du polynôme caractéristique d'une matrice, méthode de calcul approché d'une intégrale par la méthode de Simpson... n'ont pas été introduits (sauf rares exceptions) dans les calculatrices.

La nouveauté du recours à une calculatrice nous avait imposé, comme il a été dit, la réalisation d'un polycopié. Malgré les précisions que nous avions apportées sur l'utilisation de celui-ci (notes de cours réduites en particulier), une bonne partie des étudiants a considéré que sa possession remplaçait le cours et dispensait par la même d'y assister ! Comme en plus ce polycopié était autorisé pendant les épreuves écrites, il n'était même pas nécessaire de l'étudier ! Cette réaction est malheureusement bien connue des auteurs de polycopiés. Certains ont trouvé une sorte de parade, en distribuant le polycopié, chapitre par chapitre, une fois que le cours correspondant avait été fait.

(13) Bien que ces deux calculatrices soient très limitées en matière d'algèbre linéaire.

(14) Ceci n'a pas empêché un certain nombre d'étudiants (environ 10% !) de terminer l'année avec des calculatrices totalement inadaptées.

(15) *Cours de Mathématiques . Deug B Première année*, Y. NOUAZÉ , IREM de Montpellier. Une version corrigée et fortement augmentée est en cours de parution aux Editions Ellipses sous le titre : *Mathématiques et calculatrices.*

(16) Dans les autres séries, les calculatrices étaient interdites. C'est aussi , malheureusement, la règle dans la plupart des séries du DEUG A.

LES LEÇONS À TIRER

– Il nous semble fondamental que les étudiants aient une bonne pratique de leur calculatrice. Il n'est absolument pas nécessaire qu'ils soient des virtuoses, mais ils doivent être familiarisés avec leur outil. Si ce n'est pas le cas, il faut organiser des séances d'apprentissage, et ces séances doivent être intégrées dans l'horaire de l'enseignement. Nous pensons que, pour nombre d'étudiants, ces séances faisaient partie du contrat et que leur absence en a déstabilisé un certain nombre. On peut espérer toutefois, avec l'extension de l'utilisation des calculatrices dans le secondaire, que ce problème disparaisse ou s'atténue fortement.

– Il nous semble également qu'un modèle unique de calculatrice, par exemple fourni par l'Université (avec toutes les garanties nécessaires), aurait facilité grandement les choses [17].

– Dans le même ordre d'idée, un recours plus grand à une calculatrice rétroprojetable, en cours et encore plus en TD, doit très certainement être bénéfique. Dès lors que tous les étudiants ont la même calculatrice, ils retrouvent (et c'est surtout important en TD) sur l'écran de projection leur propre écran de calculatrice. L'appropriation des problèmes et des solutions en est évidemment améliorée.

– L'utilisation d'une calculatrice pour "faire des mathématiques" et non plus seulement pour tracer des graphes sans se fatiguer, emmagasiner des données... est nouveau pour la plupart des étudiants. Pour ceux-là, la calculatrice n'était qu'un outil personnel, non intégré à l'enseignement ; elle n'avait pas de statut bien défini, comme pouvait l'avoir en son temps, par exemple, la règle à calculs. Par la même elle n'avait pas droit de cité : ainsi, certains étudiants n'osaient pas utiliser les résultats obtenus avec leur calculatrice. On peut penser que pour ceux-là, les résultats obtenus à l'aide de leur calculatrice étaient "trop beaux pour être vrais" et, à tout le moins non utilisables, car obtenus par des voies autres que celles habituellement empruntées. Il est très vraisemblable que ce blocage a désorienté bon nombre d'étudiants. Ici encore, on peut espérer que la généralisation de l'utilisation des calculatrices et leur intégration dans l'enseignement du secondaire sera bénéfique.

– L'usage "raisonné" d'un polycopié doit être très précisément expliqué ; il est clair que les étudiants étaient très peu préparés à cette utilisation, cela rompait trop avec les habitudes du secondaire.

– Pour les deux premières raisons ci-dessus, il devrait être nécessaire de réduire le volume des mathématiques. Il faut ne pas oublier que le programme est vaste, trop vaste sans doute, et qu'il comporte beaucoup de notions nouvelles, difficiles, délicates, surtout en algèbre linéaire. De fait, les difficultés purement mathématiques se sont ajoutées aux difficultés d'emploi des calculatrices. Mais ce problème de l'étendue d'un programme n'est pas spécifique au type d'enseignement abordé.

Bien que cette expérience n'ait pas eu tous les résultats positifs escomptés, nous

(17) Certaines Universités ont imposé aux étudiants un modèle unique de calculatrice ; malheureusement, il s'agit de modèles à performances très réduites : pas la moindre programmation (il faut surtout que les étudiants ne puissent pas emmagasiner des données !), pas d'écran graphique, etc. Ce n'est évidemment pas de ce type d'outil dont il est question ici.

pensons tout de même, compte tenu des remarques ci-dessus, que l'utilisation d'une calculatrice [18] peut améliorer l'enseignement des mathématiques, et la perception qu'en ont les étudiants, en DEUG B, ...et aussi en DEUG A.

BIBLIOGRAPHIE

Il existe de nombreux ouvrages sur les calculatrices, en fait, souvent, sur un type de calculatrice. Mais ce sont pour beaucoup des ouvrages s'apparentant plutôt à des modes d'emploi élaborés comportant des séquences d'utilisation. Ils diffèrent donc en cela de ce que nous avons voulu faire... mais ils ne sont surtout pas à dédaigner !

Outre le polycopié et sa version augmentée (Editions Ellipses) précédemment cités, le lecteur intéressé par l'utilisation des calculatrices, telle qu'elle est présentée ici, pourra se reporter, entre autres, aux ouvrages suivants.

1 – *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée,* Christian Faure, Maryse Noguès, Yvon Nouazé, Luc Trouche, 1993, IREM de Montpellier.

2 – *Des activités mathématiques en classes scientifiques (1re S et Terminale S),* Christian Faure, René Bernard, Maryse Noguès, Yvon Nouazé, Luc Trouche, 1994, IREM de Montpellier.

3 – *Des fonctions et des graphes,* Christian Faure, René Bernard, Maryse Noguès, Yvon Nouazé, Luc Trouche, 1995, IREM de Montpellier.

4 – *Arithmétique, le retour...,* Christian Faure, René Bernard, Maryse Noguès, Yvon Nouazé, Luc Trouche, 1995, IREM de Montpellier.

Pour des articles et des références plus étendues sur l'utilisation des outils informatiques, dont les calculatrices, on pourra consulter :

5 – Actes de l'université d'été *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, 29 Août-2 Septembre 1994, Caen ; Publication de l'IREM de Basse Normandie; Caen.

6 – "Des outils pour le calcul et le traçage des courbes", ouvrage collectif, *Les dossiers de l'ingéniérie éducative*, n°19, mars 1995, Publications du CNDP.

(18) Certains collègues nous ont objecté que les calculatrices, "c'était dépassé" et qu'il valait beaucoup mieux utiliser les ordinateurs. Nous répondons simplement, qu'une calculatrice est un outil **personnel**, ce que n'est pas encore pour la plupart des étudiants un micro ordinateur, que c'est un outil peu cher, et surtout que les problèmes didactiques posés par l'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur sont quasiment les mêmes. Quant à l'argument qui conteste à la calculatrice ses "faibles" capacités de calcul comparées à celles d'un micro ordinateur, il ne tient pas à notre avis. En effet, ce type d'argument peut être opposé à tout ordinateur, micro ou pas ; il y aura toujours une machine plus puissante.
Toutefois, la taille de l'écran n'est pas indifférente. En effet, la petitesse de l'écran d'une calculatrice, réduit ou du moins complique, au niveau des TD, les échanges entre les étudiants d'une part, et l'enseignant d'autre part ; c'est beaucoup moins le cas avec l'écran d'un ordinateur qui est visible plus facilement par plusieurs.