UNE VOITURE À LA DÉRIVE

Gilles ALDON
Irem de Lyon

LES CONDITIONS ET LES HYPOTHÈSES DE TRAVAIL

L'activité que je veux décrire dans cet article repose sur le travail d'un groupe de recherche de l'IREM de Lyon [1]. Il n'a été rendu possible que grâce au soutien, aux remarques et aux critiques de tous les membres du groupe ainsi qu'au grand effort financier de l'IREM de Lyon qui a acheté une grande partie des ordinateurs destinés à l'expérience dont cet article décrit une partie.

Depuis quelques années, je travaille assez régulièrement avec mes élèves dans un environnement informatique et en particulier avec le logiciel DERIVE [2]. Les différentes expériences menées en classe nous ont montré que la connaissance "profonde" du logiciel était un élément important dans les méthodes de recherche développées par les élèves dans une situation de recherche de problèmes. De plus, en se plaçant dans une perspective constructiviste, il est nécessaire que les apprenants aient le temps de développer leurs propres démarches, ce qui me semble en contradiction avec une situation habituelle de classe dans une salle informatique. Pour analyser plus finement le rôle que pouvait jouer un logiciel de calcul formel dans la construction des connaissances d'un élève, la pos-

(1) Gilles ALDON, professeur au lycée Jacques Brel à Vénissieux, Françoise DUBAIL, maître de conférence à l'université LYON I, Georges MOUNIER, professeur au lycée Lumière à Lyon, Claude TISSERON, maître de conférence à l'université LYON 1, Eric SUBTIL, professeur au lycée Saint Exupéry à Lyon. Par ailleurs Gilles ALDON et Georges MOUNIER travaillent également dans le groupe national de la DITEN dirigé par Anne HIRLIMANN.

(2) DERIVE est un logiciel de calcul formel développé par A. Rich et D. Stoutemeyer (Software house).

session privée de cet objet était une condition initiale indispensable. C'est pourquoi, dans le cadre du projet de recherche évoqué, l'IREM de Lyon (3) a décidé d'équiper tous les élèves de ma classe de première S (4) d'un micro-ordinateur portable sur le disque dur duquel était implanté le logiciel DERIVE. Le développement de ces machines laisse à penser que dans peu d'années la situation particulière qu'ont vécue mes élèves sera une situation banale. Il est donc, me semble-t-il, grand temps de réfléchir aux modifications que de tels outils pourront apporter pour l'enseignement et pour l'apprentissage des mathématiques.

Quelles utilisations pertinentes du logiciel ?

Pour préparer cette expérience, je me trouvais devant un double défi : le programme de première à respecter (les élèves n'auront pas le logiciel à disposition l'année suivante et en particulier au baccalauréat) et la formidable capacité de calcul du logiciel. Quels problèmes pourraient vivre dans la classe ? Quelle ingénierie mettre en place pour tirer profit des possibilités du logiciel en liaison avec l'apprentissage des mathématiques ? Pour répondre à ce double défi, je me suis appuyé sur les objectifs du programme de première S ainsi que sur les hypothèses émises par le groupe de recherche de l'IREM de Lyon quant à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel dans la classe.

(3) Les machines ont pu être achetées grâce à un effort financier important de l'IREM de Lyon ainsi qu'à une subvention du ministère de l'Education nationale.

(4) Une classe "banale" du lycée Jacques Brel à Vénissieux.

Hypothèses de travail

Je donne ici la formulation exacte des hypothèses écrites avant l'expérience.

L'utilisation de DERIVE dans la classe de mathématiques doit permettre :

* de s'approprier une gamme d'heuristiques variées, de mettre en place un meilleur contrôle, de garder comme guide le problème posé.
* de modifier l'enseignement de l'analyse en réduisant les entraînements aux techniques de calcul et en mettant en œuvre les concepts de l'analyse (approximation, comparaison...).
* de permettre aux élèves de construire des micro-théories mathématiques sur des micros-champs du savoir.

La possession privée du logiciel doit permettre :

* une meilleure connaissance des possibilités et des limites du logiciel.
* une appropriation de l'outil et un regard critique quant à son utilisation.

Actuellement, l'optimisme de ces hypothèses a été tempéré par les observations faites en classe. Par exemple, en ce qui concerne la première hypothèse, nous pensions que, libérés des contraintes techniques, les élèves pourraient garder en tête le but du problème. La réalité n'est pas aussi simple et il est nécessaire de nuancer ces propos (voir à ce propos l'article de Michèle Artigue dans *Repères-IREM* n°19 [Artigue 95]). De même, la possibilité de multiplier les essais, la facilité pour passer du cadre numérique au cadre algébrique et au cadre graphique devaient permettre aux élèves d'acquérir des méthodes de recherche transposables dans d'autres situations. Là encore, la prudence est nécessaire et la seule utilisation du logiciel n'est, bien sûr, pas suffisante pour faire acquérir des méthodes !

Dans l'exposé des motifs des programmes de la classe de première S, on peut lire :

"Les intentions majeures :
a) entraîner les élèves à la **pratique d'une démarche scientifique**, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique.
b) insister sur l'importance du **travail personnel** des élèves, tant en classe qu'à la maison, et sur le rôle formateur des activités de **résolution de problèmes.** [...]
c) développer les **capacités d'organisation et de communication,** renforcer les objectifs **d'acquisition de méthodes** et promouvoir **l'unité de formation** des élèves en exploitant les interactions entre les différentes parties du programme et entre les mathématiques et les autres disciplines. [...]"

Plus loin, dans les "objectifs et fonctions des différents types d'activité", on peut lire :

"deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
– entraîner les élèves à **l'activité scientifique** et promouvoir **l'acquisition de méthodes** : la classe de mathématique est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.
– développer les capacités de communication : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite [...]."

Par ailleurs, les différentes parties du programme d'analyse et d'algèbre de première S s'appuient sur la notion de fonction : fonction polynôme (factorisation, résolution d'équations, de systèmes d'équations...), fonction dérivée (notion de limite, nombre dérivé), comportement à l'infini...

Les objectifs de la partie *Algèbre* du programme sont énoncés comme suit :

"la résolution de problèmes issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés, les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats [...]. Les travaux s'articulent suivant deux axes :
– consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique en relation étroite avec l'étude de fonctions.
– poursuivre l'étude des équations et inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations et inéquations linéaires".

Quant aux objectifs de la partie *Analyse*, on peut lire :

"en ce qui concerne les fonctions, le programme est organisé autour de deux objectifs principaux :
– exploiter la dérivation pour l'étude locale et globale des fonctions,
– acquérir une bonne maîtrise des fonc-

tions usuelles indiquées dans le programme...
[...]
"Le programme combine les études qualitatives (croissance, allure générale des représentations graphiques...) avec les études quantitatives (majorations, recherche de maximums, approximation d'un nombre à une précision donnée...). On exploitera systématiquement les interprétations graphiques et les problèmes numériques."

CONSÉQUENCES SUR LES CHOIX PÉDAGOGIQUES : UN VRAI PROBLÈME

DERIVE permet justement de travailler simultanément dans trois registres : numérique, algébrique et graphique. Le problème auquel j'étais alors confronté était de mettre en place l'ingénierie dans la classe. Tout d'abord, j'ai choisi de travailler en laissant les élèves utiliser le logiciel comme ils utilisent "habituellement" une calculatrice : ils possèdent cet outil et peuvent s'en servir (ou ne pas s'en servir) à leur gré. Ensuite, j'ai organisé mon enseignement autour de deux types de problèmes : des problèmes "à court terme" qui étaient repris séance après séance et qui "rebondissaient" sur les questions des élèves [(5)] et des problèmes "à long terme" qui vivaient plusieurs mois dans la classe.

Qu'est-ce que j'entends par "problème à long terme" ?

Les objectifs de ces problèmes à long terme sont précisément les objectifs du programme : entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. Un moyen utilisé pour tenter de répondre à cette exigence est de laisser développer par les élèves eux-mêmes des recherches sur un temps long, en utilisant au fur et à mesure de leur apprentissage les notions enseignées comme outil dans la résolution d'un problème.

Les caractéristiques d'un problème à long terme :

– il sera cherché par les élèves sur un temps long, dépassant les barrières temporelles habituelles du temps de la classe ;

– il pourra être abordé par les élèves dès la donnée de l'énoncé. Une première phase d'expériences pourra être mise en rapport avec des connaissances théoriques. La ou les premières solutions que les élèves pourront donner en utilisant leurs connaissances seront incomplètes (une ou plusieurs hypothèses ne pourront pas être prises en compte) ;

– les élèves pourront décider de la correction d'une solution proposée ;

– il rebondira au fur et à mesure de l'avancée du cours. Soit à la demande des élèves soit parce qu'un objet enseigné pourra devenir outil dans sa résolution.

– il sera cherché dans un premier temps en classe puis repris à intervalles réguliers par l'organisation de comptes rendus (mise en commun des résultats favorisant la communication entre élèves). Il se distingue par ces deux derniers points d'un devoir de recherche à la maison. La problématisation et la reformulation du problème seront l'objectif de ces phases.

(5) En annexe on pourra trouver quelques problèmes qui ont jalonné l'année.

Les problèmes à long terme se distinguent des situations-problèmes par plusieurs aspects essentiels :

– prise en compte du temps dans la recherche du problème,
– prise en compte du travail privé des élèves,
– situations de communication de deux natures : présentation de l'état de recherche, présentation de l'aboutissement du travail.

UN EXEMPLE DE PROBLÈME À LONG TERME

Je voudrais ici développer un exemple d'un tel problème dont la recherche a duré environ 6 mois.

L'énoncé du problème tel qu'il a été proposé aux élèves :

"Je suis, à cette occasion, dessinateur et j'ai besoin de mathématiciens pour "rentrer" mon dessin sur ordinateur. C'est vous (les élèves de la classe) qui serez ces mathématiciens. Je vous propose donc le profil d'une carrosserie de voiture (6). Le problème est de trouver deux fonctions qui modélisent cette carrosserie."

Voici l'analyse préalable que je faisais de l'intérêt de ce problème par rapport à l'enseignement du programme d'analyse de Première S :

– la notion de fonction est centrale, avec les changements de cadres (graphique-algébrique) que la situation sous-tend.

– la résolution tient compte d'un système de contraintes mathématiques qui rebondissent sur l'idée que l'élève a, *a priori*, d'une solution acceptable pour ce problème réel :

- les raccordements à angle vif sont peu crédibles : d'où l'hypothèse que les élèves allaient chercher des raccords par tangentes, mettant en œuvre le concept de nombre dérivé.
- la nécessité de localiser le tracé dans une bande de plan "acceptable" dont je pensais qu'elle conduirait les élèves à se poser des problèmes d'approximation et d'encadrements de fonctions, qui sont des concepts de base de l'analyse, comme l'exprimait Jean Dieudonné dans la préface de son livre *Calcul infinitésimal* : "Pour acquérir le sens de l'analyse, indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est "grand" de ce qui est "petit", ce qui est "prépondérant" de ce qui est "négligeable". En d'autres termes, le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités et on pourrait résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher."

– la résolution amène les élèves à manipuler et à se constituer une "bibliothèque de courbes" et à se familiariser à la reconnaissance graphique des courbes des fonctions usuelles.

Par ailleurs, tout au long de l'année, les élèves pourraient chercher des solutions qui évolueraient au fur et à mesure de l'apport de nouvelles connaissances. Je faisais l'hypothèse que les élèves feraient le lien avec les autres activités faites en classe (7).

(6) On pourra trouver en annexe le document distribué aux élèves.

(7) Voir en annexe, quelques problèmes qui ont jalonnés l'année.

Les élèves ont été regroupés en équipes de quatre ou cinq. A intervalles réguliers, j'ai organisé des "séminaires" pendant lesquels des groupes exposaient l'état de leurs recherches. Le but de ces séances était double : maintenir un intérêt pour cette recherche et mettre en commun les pistes explorées par chaque groupe. J'ai également organisé des séances de travail en classe. Dans ces séances, je suis resté neutre quant au problème et n'ai répondu qu'aux questions relatives à la manipulation du logiciel.

Le déroulement de la recherche des élèves :

Dès que la notion de fonction polynôme a été enseignée, les élèves ont tenté de résoudre le problème en faisant passer la courbe d'une fonction polynôme par des points "caractéristiques" du dessin. Lorsque sept points sont choisis, cette solution fait résoudre un système de huit équations à huit inconnues. Il me semble important de noter les obstacles que peuvent rencontrer les élèves au cours de cette réalisation.

Tout d'abord un obstacle lié à *l'organisation des données* : c'est une situation inhabituelle pour un élève de première S de manipuler un système de huit équations à huit inconnues et pour réaliser complètement ce travail, les qualités d'organisation des données sont importantes.

Mais aussi un *obstacle technique* : le logiciel joue ici son rôle de calculateur et fait dépasser rapidement cet obstacle.

Enfin un *obstacle lié à l'interprétation des résultats* : il est peut-être encore plus inhabituel d'obtenir comme solution à un problème une fonction polynôme du septième degré dont les coefficients sont des rapports de nombres d'une quinzaine de chiffres. Une élève m'a dit : "cette solution je l'ai abandonnée parce que c'était des nombres pas possibles". Le but du problème étant cependant une représentation graphique, cette fonction polynôme n'est qu'une étape intermédiaire du travail qui n'est pas écrite. La présentation du résultat à la classe passe par une explicitation de la méthode et bien sûr par le dessin obtenu.

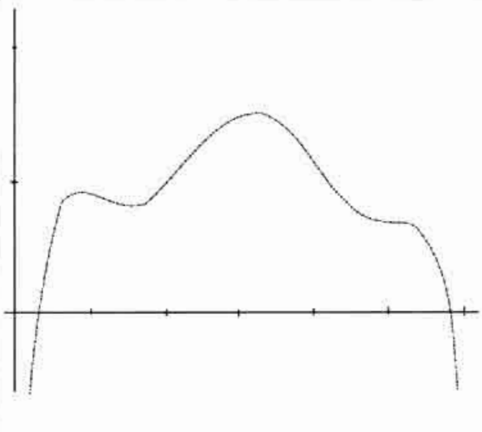


Figure 1

Au cours d'une séance de travail qui précédait un "séminaire", cette solution avait été développée par tous les groupes. Avec 7 points, ils obtenaient le résultat de la figure 1 [8]:

La stratégie que les élèves développèrent alors était de choisir un plus grand nombre de points pour approcher d'une façon plus fine le dessin. Je pensais que la

(8) L'ensemble des images présentées sont des reproductions de copies d'écrans de dessins réalisés par des élèves de la classe

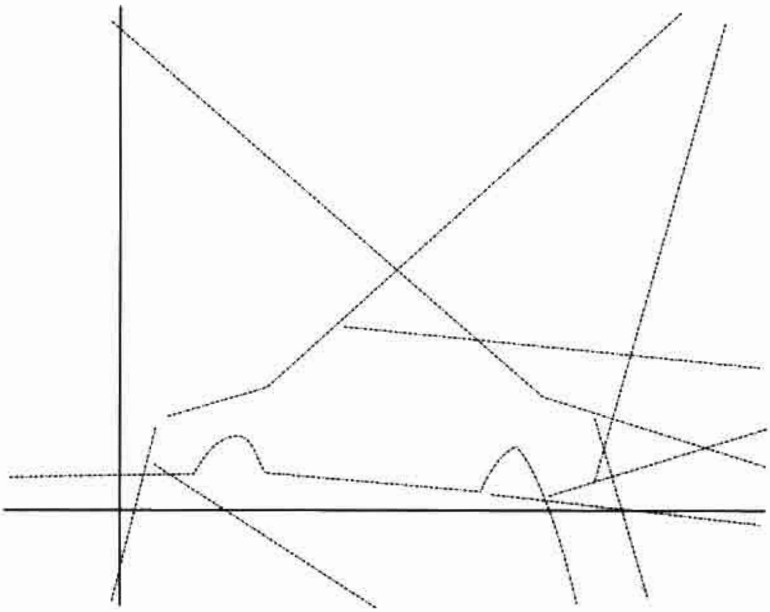


Figure 2

mise en commun porterait sur les phénomènes "chaotiques" (9) qui se produisent lorsque le nombre de points augmente. Quelle ne fut pas ma surprise de constater que les élèves avaient abandonné cette piste durant le week-end et présentèrent une solution utilisant des fonctions affines par morceaux (10). Mes préparations d'explication du phénomène n'étaient plus au goût du jour ! La séance m'a permis de montrer l'utilisation de la fonction SI de DERIVE (11). Quelques difficultés apparurent pour manipuler cette fonction et les premiers essais furent difficiles (Figure 2),

... Quelques jours plus tard, un groupe d'élève me proposa la solution suivante (Figure 3 ci-dessous).

Le côté "rigide" de cette carrosserie me permit de relancer le problème en demandant une carrosserie moins désuète ! Un élève proposa de remplacer les morceaux de droites par des morceaux de paraboles ; la proximité de l'étude en classe des

(9) Comme pour tout traceur de courbes, DERIVE simule la continuité d'une courbe en reliant des points calculés de manière discrète. Tout se passe bien si la courbe est suffisamment régulière sinon la représentation peut être tout à fait farfelue. Voir à ce propos le travail de Luc Trouche [Trouche 1992].

(10) Je ne sais pas comment ni pourquoi la première stratégie a été abandonnée ; malheureusement, je n'ai pas questionné les élèves sur le moment et les explications de ce revirement sont perdues. Il est cependant probable que devant la lenteur de tracé des machines les élèves aient recherché une autre piste de travail.

(11) Voir en annexe la syntaxe de la fonction SI de DERIVE.

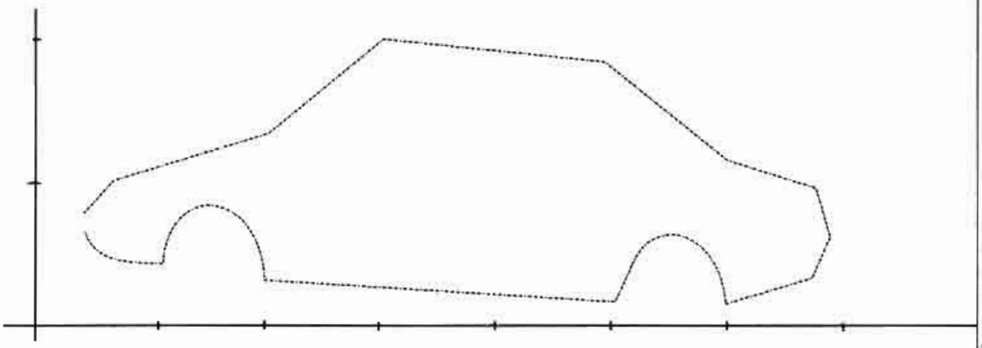


Figure 3

fonctions trinômes du second degré ainsi d'ailleurs que la faible "bibliothèque de courbes" de fonctions disponibles chez les élèves est sans doute à l'origine de cette proposition. J'ai repris cette proposition en la faisant reformuler. Le problème relancé, les élèves cherchèrent à construire des fonctions "trinôme par morceaux". Il est cependant à noter que le passage de fonction définie par une seule formule à fonction définie par intervalle et utilisant un grand nombre de formules ne fut pas simple. Malgré mon intervention, certains élèves ont longtemps refusé ce type de solution et ont continué leurs recherches pour obtenir une fonction définie par une formule unique. Cette difficulté des élèves renvoie à l'obstacle épistémologique lié à la définition du concept de fonctions, aux hésitations historiques de la mise en place d'une définition du concept de fonctions et aux distinctions envisagées par Euler entre "les courbes *continues* graphes de fonction définies par des expressions analytiques et les courbes *"discontinues* réunion de morceaux qui correspondent à diverses fonctions" (12).

(12) Encyclopedia Universalis, article Fonction (notion de)

La difficulté suivante résidait dans les "jonctions" des différentes courbes. Le problème resta en l'état pendant quelques temps, jusqu'à l'étude en classe de la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. Cet objet, introduit indépendamment du problème, a été intégré par des élèves en tant qu'outil, adapté à la question jusque là non résolue du raccordement harmonieux des courbes. Au départ, cette idée, amenée par quelques uns, a vite diffusé dans la classe complète. Enfin, pour les plus acharnés des "chercheurs", il était inconcevable de présenter une voiture sans ses roues et bien que les courbes paramétriques ne soient pas au programme de première, j'ai indiqué comment tracer un cercle de rayon et de centre donnés en utilisant les "vecteurs" DERIVE.
Voici (page suivante) quelques dessins fournis par les groupes.

Dans l'ensemble de ces recherches, les élèves ont effectivement utilisé un grand nombre des objets d'enseignement de la classe de première S.

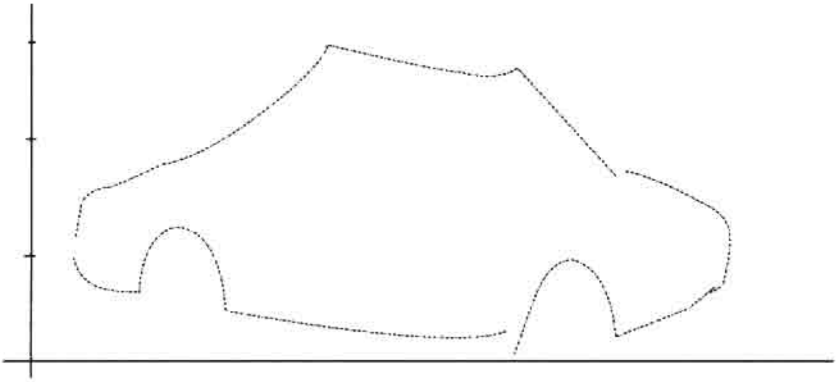


Figure 4

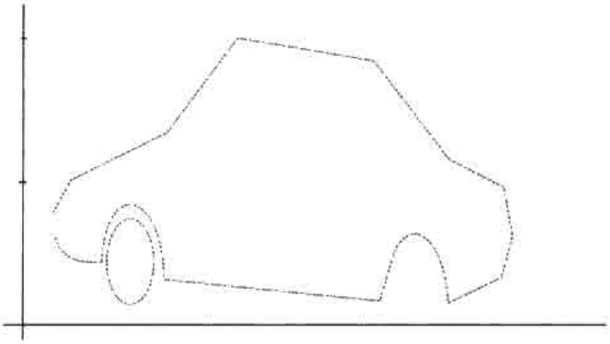


Figure 5

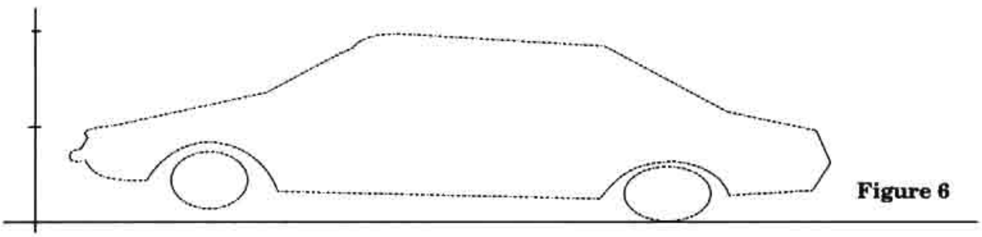


Figure 6

EN GUISE DE CONCLUSION... ENCORE PROVISOIRE !

Le point de vue de l'enseignant

A l'issue de cette expérience, l'enseignant que je suis est globalement satisfait par le travail fourni par les élèves de la classe. Je voudrais cependant terminer cet article par quelques réflexions globales concernant le travail des élèves, la gestion de la classe et un retour sur les hypothèses initiales. En particulier, si la possession privée du logiciel permet aux élèves une meilleure connaissance de ses possibilités et une utilisation critique, j'ai pu constater l'importance de l'ingénierie et de la phase de dévolution à l'intérieur de la classe.

La situation de recherche d'un problème sur un temps long est inhabituelle pour les élèves, d'où l'importance des phases de communication (qu'elles soient internes à la classe ou externes en direction d'autres classes). Elles permettent de jalonner le travail des élèves et de faire profiter à l'ensemble de la classe des recherches de chaque groupe. Mais aussi, elles permettent à l'enseignant de rediriger les recherches des élèves. Dans l'idéal, les élèves utilisent les notions, les méthodes vues dans le cadre de la classe pour avancer dans la résolution du problème. Cependant, l'expérience prouve que les interventions de l'enseignant sont parfois nécessaires pour "faire le lien" entre les notions vues, plutôt comme objets dans le cours avec leur statut nouveau d'outil dans la résolution d'un problème. Pour que le contrat soit clair, ces phases de communication nécessitent une véritable structuration, des consignes précises de production écrite et de communication orale.

En début et en fin d'année cinq élèves de la classe ont été interviewés en utilisant les techniques de l'entretien d'explicitation [13]. L'objectif de ces dialogues étaient de comprendre la manière dont les élèves avaient utilisé le logiciel et l'aide qu'il avait apporté dans leur apprentissage des mathématiques.

En m'appuyant sur ces interviews, je voudrais présenter les opinions de mes élèves à propos de ce travail [14] en parallèle avec mes réflexions *a posteriori*. Il me semble important de noter que, dans cette première année d'expérience, si j'ai pu confirmer quelques-unes des hypothèses émises, un travail est encore nécessaire pour les affiner et en valider d'autres. J'ai essayé de regrouper certaines des réflexions des élèves pour tenter de confirmer les hypothèses émises en début d'expérience et les préciser. Cependant, il serait illusoire de penser pouvoir confirmer toutes les hypothèses de travail en ne reposant l'analyse que sur cette activité. Il est nécessaire pour mieux comprendre le fonctionnement de la classe de lire les annexes dans lesquelles je développe quelques uns des problèmes cherchés par les élèves. On pourra en particulier mieux comprendre les questions que les élèves ont été amenés à se poser et les stratégies mises en place pour y répondre.

Intérêt du problème et de sa résolution

Parlant du problème de la voiture, un élève déclare : "ça, c'est le plus beau, ce

(13) Ces interviews ont été réalisés par les membres du groupe "entretien d'explicitation" de l'IREM de Lyon

(14) J'ai choisi de citer les élèves sans modifier leurs formulations même si elles peuvent paraître parfois maladroites.

qu'on a le plus réussi et puis qu'on a passé le plus de temps". Il explique en particulier qu'il a travaillé avec ses camarades pour réaliser les différents calculs nécessaires à la réalisation d'une stratégie choisie. Depuis la recherche d'une fonction polynôme passant par des points choisis sur le dessin jusqu'à l'utilisation de la notion de dérivée : "au début de l'année quand je l'utilisais c'était des petits calculs ; après pour la voiture là c'était des gros calculs... au point de jonction de différentes courbes, j'en avais quatorze ou seize, donc quand elles se croisaient je me débrouillais pour que la dérivée soit identique au même endroit".

Un autre élève note à propos de cette recherche : "on a fait comme l'ingénieur quand il faut créer une voiture".

Le rôle du logiciel est important dans ce problème : tout d'abord, il permet de mener à bien des calculs tout à fait inaccessibles à un élève de première S d'un point de vue technique mais parfaitement abordable d'un point de vue conceptuel ; il facilite de ce fait la dévolution du problème. Les différentes observations montrent que l'implication des élèves dans la recherche a été proportionnelle à leur habileté à utiliser le logiciel. Même si tous les élèves de la classe disposaient du même matériel et travaillaient au lycée dans des conditions identiques, l'investissement personnel était différent. La transférabilité d'une telle situation pour des élèves ne disposant pas tous d'un logiciel de calcul symbolique pose des problèmes qui ne sont pas résolus actuellement. Un travail d'observation et d'analyse est encore nécessaire pour permettre de mieux comprendre l'importance du rôle du logiciel et des différentes phases dans une telle situation de recherche de problèmes dans un long temps. Michèle Artigue dans [Artigue 94] note : "...Entrer grâce à DERIVE dans des fonctionnements mathématiques plus intéressants, n'est pas garanti par la richesse de la situation mathématique elle-même, mais avant tout par la façon dont y est organisé le travail de l'élève".

Apprentissage du logiciel et de ses possibilités

Une hypothèse forte fondant cette expérience résidait dans le fait que la possession privée du logiciel permettrait une meilleure connaissance de ses possibilités et de ses limites. Cette hypothèse se trouve confirmée par l'utilisation que les élèves en ont fait : "de toute façon, l'ordinateur il réfléchissait par rapport à ce que je lui donnais donc si je lui donnais des données fausses il me donnait un résultat faux". Un autre élève raconte : "Comme on faisait les fonctions, j'aimais bien regarder la courbe que l'ordinateur me traçait, je visualisais et en même temps je voyais les calculs à côté". Voilà une utilisation des différents registres bien comprise !

L'utilisation de DERIVE est "intelligente" : les élèves ont compris que le logiciel n'allait pas résoudre les problèmes à leur place mais qu'il permettait de faire des maths plus expérimentales : à propos d'un problème concernant des courbes du quatrième degré (15) : "J'ai dû utiliser DERIVE 10 minutes , j'ai dû lui faire tracer deux exemples après je voyais à peu près les courbes et après j'ai passé un bon moment dessus tout à la main... après je l'ai utilisé pour vérifier si mes fonctions dérivées étaient justes". Utiliser DERIVE

(15) Voir en annexe l'énoncé du problème

permet-il de gagner du temps ? A cette question un élève de la classe répond : “l'ordinateur, il m'a aidé à démarrer le problème, il m'a pas fait gagner du temps, j'ai tout calculé à la main, oui, enfin il m'a fait gagner un peu de temps parce que sinon j'aurais passé plus de temps à réfléchir”. Cette idée est reprise par d'autres élèves : le logiciel aide à appréhender les problèmes posés, permet de rentrer dans le problème, de tester, d'émettre des conjectures, de se faire une idée de la solution : “quand on demande à calculer quelque chose à l'ordinateur, il faut savoir ce que c'est et les résultats à quoi ils correspondent. Ça c'est en fait nos connaissances”.

Encore une hypothèse qui semble se confirmer ! A condition, cependant qu'un véritable apprentissage du logiciel soit intégré au cours de mathématiques et que cet outil ne soit pas marginal dans la classe mais souvent utilisé. Il est intéressant de noter que, justement, la recherche d'une solution de ce problème a permis aux élèves de se familiariser avec le logiciel : “au début, la voiture, on avait fait pas mal d'erreurs et puis après avec cette voiture ça m'a permis d'apprendre les fonctions de DERIVE”. Un autre élève note : “avec la voiture, ça nous a permis d'apprendre pas mal de truc sur DERIVE”. Cette connaissance du logiciel est réutilisable dans d'autres situations : “si j'ai des problèmes, vu que je sais utiliser DERIVE je pourrais toujours aller sur les ordinateurs du CDI voir s'il peut m'aider”. Là encore un autre élève note : “maintenant que je sais l'utiliser je peux l'utiliser ailleurs”. Ces remarques semblent montrer que les élèves ont acquis une autonomie par rapport aux outils et sauront utiliser les ordinateurs mis à leur disposition.

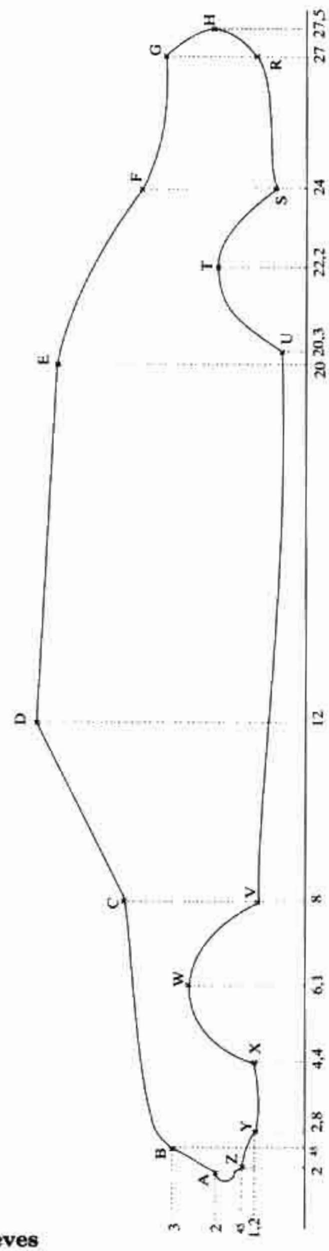
Approfondissement des connaissances, centration sur l'aspect conceptuel.

Les élèves pensent que le travail réalisé cette année leur a permis de comprendre plus en profondeur le programme de mathématiques : “les autres classes de première, ils avaient pas l'ordinateur, ils ont fait le même programme que nous, mais nous peut-être qu'on a fait des problèmes qu'eux, ils ne sont pas capables de faire”. Bien sûr l'ingénierie mise en place dans la classe joue un rôle important et quel meilleur plaidoyer pour le travail en groupe que cette réflexion : “Quand on travaille en commun, s'il y a quelque chose qu'on comprend pas on peut toujours expliquer à l'autre soit l'autre il nous explique tandis que quand on est tout seul si on est paumé on est paumé !”. L'utilisation de DERIVE est censée favoriser un rapport plus conceptuel aux mathématiques. Les différentes observations montrent clairement que les choses sont plus complexes ; Michèle Artigue [Artigue 1994] note :

> “il semblerait que l'on soit plutôt face à un système didactique soumis à des forces contradictoires :
> la première favorisant comme indiqué un fonctionnement réflexif et conceptuel,
> la seconde favorisant au contraire une atomisation de la résolution en une multiplicité d'actions élémentaires.
> L'équilibre résultant entre ces forces contraires dépend à la fois des caractéristiques de la tâche mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.”

La prise en charge des aspects techniques par le logiciel est probablement réalisée lorsqu'il s'agit d'objets bien maîtrisés mais lorsque les objets sont nouveaux ou en phase d'appropriation, les liens entre les phases de conceptualisation et les phases techniques sont plus difficiles à dénouer et l'utilisation du logiciel peut être un obstacle à la conceptualisation. "Il semble donc nécessaire, quand on élabore des situations avec DERIVE, de prendre en compte ces caractéristiques pour trouver un équilibre adéquat entre les tendances antagonistes qui seront nécessairement en jeu et, de plus, jouent différemment d'un élève à l'autre." [Artigue 1994]

Je voudrais, cependant, laisser la phrase de conclusion à cet élève qui déclarait : ***"Cette année les maths étaient différentes parce qu'on les inventait".***



Le document distribué aux élèves

ANNEXE 1

Quelques problèmes qui ont jalonné la progression du cours

A propos de l'étude des polynômes :

Y'a-t-il une fonction polynôme du troisième degré dont la courbe passe par 4 points de la courbe d'une fonction du second degré ? (16)

Donner des exemples de fonctions polynômes du quatrième degré ayant 0, 1, 2, 3, 4 racines. Généralisation.

Trouver une fonction polynôme dont la courbe approche la courbe de la fonction sinus sur $[-\pi, \pi]$.

(16) Ce problème provient d'une question posée par un élève. Dans un premier temps, je demandais aux élèves de trouver une fonction trinôme dont la représentation passe par 3 points donnés, problème classique de première. J'ai demandé que les élèves choisissent les points. Or un élève a choisi trois points alignés. Après avoir constaté l'impossibilité de résoudre le problème posé, il a cherché une généralisation du résultat qu'il avait découvert et m'a interrogé. J'ai évidemment repris au bond ce problème pour le poser à la classe entière. Quelles sont les démarches solutions proposées par les élèves :
Démarche graphique : d'où l'erreur : deux courbes se coupent en une infinité de points.
Démarches algébriques :
– démarche "lourde" : choisir 4 points d'une courbe du second degré et chercher une fonction du troisième degré dont la représentation graphique passe par ces 4 points : D'où la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues avec 11 paramètres.
– démarche plus légère : trouver le nombre maximum de points d'intersection d'une courbe du troisième et du second degré.
Cette deuxième démarche est évidemment plus légère du point de vue des calculs mais elle nécessite une reformulation beaucoup plus délicate que la première. En majorité, les élèves aidés de DERIVE ont choisi la première voie de résolution : poser le problème et le faire résoudre ont obligé à un travail de reformulation et de clarification (distinction entre inconnues et paramètres) non négligeable. Les calculs étant dévolus au logiciel, la lourdeur de cette solution est très discutable !

Pour aborder la notion de limite :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$.

Trouver une fonction polynôme de degré 2 dont la courbe approche celle de f pour des grandes valeurs de x.

Trouver un exemple de fonction ayant une limite 2/3 en plus l'infini. 2/3 par valeur supérieure, 2/3 en oscillant autour de cette valeur...

Pour aborder la notion de nombre dérivé :

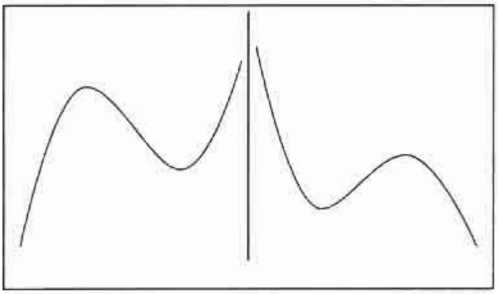
Trouver une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ en $x = 4$ (17).

(17) J'ai donné aux élèves ce problème avant d'avoir parlé du nombre dérivé. J'ai laissé les élèves chercher seuls pendant environ une heure ; ensuite j'ai fait le point des résultats auxquels les élèves étaient arrivés : le seul résultat qui emportait l'adhésion de tous était que la tangente devait passer par le point de coordonnées (4,16). Les approches et les stratégies mises en place par les groupes d'élèves étaient très variées : approche graphique (en utilisant le zoom et en confondant la courbe et sa tangente), approche géométrique (un groupe d'élèves a cherché, par analogie avec le cercle, un point qui pour la parabole pourrait jouer un rôle similaire au centre du cercle ; à mon grand regret, j'ai dû interrompre ces recherches en expliquant, que bien que leur travail était intéressant, les propriétés géométriques de la parabole n'était pas à l'ordre du jour en première), approche utilisant un résultat que les élèves avaient vu en physique (la tangente est parallèle à la corde obtenue en joignant deux points symétriques par rapport au point (4,16). Finalement, j'ai repris la main dans ce travail après qu'un élève m'eût dit que "d'abord, on sait pas ce qu'est une tangente, il faut la définir avant de la chercher".

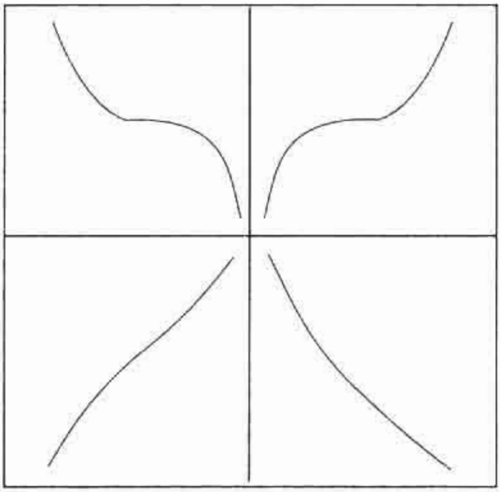
Pour utiliser la notion de fonction dérivée :

J'ai représenté graphiquement 6 fonctions polynômes de degré 3. J'ai obtenu les 6 courbes suivantes. Pouvez-vous trouver des exemples de fonctions polynôme de degré 3 illustrant chacune de ces courbes.

Qu'est ce qui vous permet de décider que vos exemples correspondent à la courbe que vous avez choisie ?



Trouver tous les tableaux de variations des fonctions polynômes de degré 4.



ANNEXE 2

La fonction *SI* de DERIVE

Syntaxe :

Si (condition; traitement1, traitement2)
Si la condition est vraie alors le traitement 1 est réalisé, sinon c'est le traitement 2.

Exemple :

Soit à représenter la fonction définie par :

$$f{:}x \rightarrow f(x) = \left| \begin{array}{l} x+3 \text{ si } x<0 \\ x^2 \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ x^3 \text{ si } x \geq 2 \end{array} \right.$$

Dans le mode Auteur :

F(x):= SI (x > 0, SI (x < 2, x^2, x^3), x + 3)

ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., DROUHARD J.-P., LAGRANGE J.-B., 1993 : *Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, IREM, Université Paris VII.
– 1994 : *Impact de l'intégration de systèmes de calcul symbolique dans l'enseignement sur les représentations et les pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire,* IREM, Université PARIS VII.

ARTIGUE M., 1995 : "Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel", *Repères-IREM*, n°19.

CANET J.-F., 1994 : *Exemple d'utilisation d'un système de matématique symbolique*, DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université de Montpellier 2.

HIRLIMANN A. *et alter*, 1993 : *Enseignement des Mathématiques et logiciels de Calcul Formel*, Ministère de l'éducation nationale.

HOWSON A.G. et KAHANE J.P., 1986 : *The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, Cambridge University Press.

JUGE G., 1994 : *Actes de l'université d'été : les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, Ministère de l'éducation nationale DITEN B2, Commission inter-IREM Mathématiques et informatique.

KUTZLER B., WALL B., WINKLER F., 1992 : *Mathematische Expertensysteme,* Expert Verlag, 119 pages.

LLORENS FUSTER J. L., 1993 : *Aplicationes de DERIVE* : Geometrica afin y Euclidea de R^3, Servicio de publicaniones de la EUITA, Valencia, 75 pages.

MOUNIER G., VEDRINE J.-M. : "Calcul Formel sur micro-ordinateur et enseignement des mathématiques au lycée", *in Bulletin APMEP,* n°383.

NEUWIRTH E., 1993 : "DERIVE und der HP95LX : Höhere Mathematik in der Hosentasche", *in Monitor,* n°3/93, pp. 42-43.

SHOENFELD A. 1992 : "On Calculus and Computers : Thoughts About Technological Based Curricula That Might Make Sense", *in The Mathematical Association of America : Symbolic computation in undergraduate mathematics education,* Zaven A. Karian Editor (10 pages).

ZORN P., 1992 : "Symbolic computating in Undergraduate Mathematics : Symbols, Pictures, Numbers and Insight", *The Mathematical Association of America Symbolic computation in undergraduate mathematics education* (14 pages).

ARTICLES CONCERNANT L'UTILISATION DE *DERIVE*

BÖHM J. 1992 : "Teaching Mathematics with DERIVE", Proceedings of the international School on the didactics of Computers Algebra, 15 articles.
– 1991-1993 : "DERIVE News letter", *The Bulletin on the DERIVE* User group, 310 pages.

GARCIA C. 1992 : *Compte-rendu d'une expérimentation du logiciel DERIVE* en classe de première, DEA didactique, Université de Montpellier II.

HEUGL H 1990 : *The Austrian Research Project : Symbolic Computation Systems in the Classroom*, 42 pages.

JOHSON J., EVANS B. 1990 : *Discovering Calculus with DERIVE*, John Wiley & Sons, Inc., 193 pages.

STOUTEMYER D.R. 1991 : *DERIVE* Tutorial, (Draft), Soft Warehouse, 70 pages.
– 1991 : *Supplementary Notes for an Advanced DERIVE* minicourse, (Draft), Soft Warehouse, 62 pages.

Lettre des utilisateurs du calcul formel, n°1 à 5, Commission Inter-IREM Mathématiques et Informatique, IREM de Rennes.

AUTRES ARTICLES

KUNTZ G. : "Quelques idées d'activités glanées au contact des entreprises", *Repères-IREM* n°7.

POUGET J.P. : "Modélisation géométrique : modèles de Bézier et modèle de B.Spline", *Repères-IREM* n°14 et 15.

TROUCHE L., 1992 : *Les calculatrices graphiques en lycée : statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA, Université de Montpellier.