# *EPPUR, SI MUOVE...* (*)

Luc TROUCHE
Irem de Montpellier

*Cela fait maintenant plusieurs années que l'équipe "Analyse" de l'*IREM *de Montpellier s'intéresse à l'utilisation des calculatrices graphiques. C'est donc tout naturellement que, dans les stages "module en seconde et en première", nous avons été amenés à faire des propositions d'activités utilisant cet outil. Et à réfléchir sur les conséquences de cette utilisation.*

*Un exemple, parmi d'autres* (1) *: il s'agit d'une activité proposée en* 1^re^S, *après un premier cours sur la résolution des équations du second degré, et avant toute leçon sur la dérivation.*

*Le défi (pour les élèves !) : déterminer une parabole tangente à trois droites données* (2)

*L'objectif (pour le maître ! ) : fixer le rôle des coefficients a, b et c du trinôme*

(*) "Et pourtant, elle se meut" aurait grommelé Galilée dans sa barbe, après avoir dû abjurer ses erreurs devant l'Inquisition...

(1) On pourra trouver d'autres idées dans les publications récentes de notre groupe :
– 1993 : *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, ouvrage collectif (Faure, Nogués, Nouazé, Trouche), publication de l'IREM, Université de Montpellier II.
– 1993 : *Quelques idées pour la mise en pratique des modules en seconde*, ouvrage collectif (Faure, Nogués, Nouazé, Trouche), publication de l'IREM, Université de Montpellier II.
– 1994 : *Activités mathématiques pour les classes scientifiques de lycée*, ouvrage collectif (Bernard, Faure, Nogués, Nouazé, Trouche), publication de l'IREM, Université de Montpellier II.

(2) Une parabole d'axe "vertical", ce qui garantit, dans des conditions "honnêtes", son existence et son unicité. S'il s'était agit d'une parabole d'axe quelconque, on aurait pu alors en trouver beaucoup... Sur ce point, se reporter à Sortais Y. et R., 1987 : *La géométrie du triangle*, pp. 66 et suivantes, Hermann.

*$ax^2 + bx + c$. On lira ci-dessous un bilan de l'activité des élèves, et de l'évaluation qui a suivi.*

*Il en ressort que les images mentales qu'induit, dans la tête des élèves , la manipulation des calculatrices graphiques sont des images animées. Et que ce caractère "dynamique", laissé sans contrôle, peut vite se constituer en obstacle...*

## UNE ANALYSE *A PRIORI*

Les élèves, arrivant de seconde, ne "savent" faire fonctionner la correspondance registre graphique / registre algébrique qu'à propos des fonctions affines et des droites. Et de nombreuses études ont montré que cette correspondance était loin d'être évidente (3). On peut partir de l'hypothèse que la correspondance coefficients du trinôme / "forme" de la parabole est beaucoup plus difficile : il y a plus de coefficients (si...), et plus d'éléments interfèrent : convexité / concavité, coordonnées à l'origine / coordonnées du sommet, intersection avec les axes, "forme" de la courbe elle même ("étroite" ou "large").

*D'où, pour aborder ce problème, trois nécessités :*

– faire manipuler par les élèves un grand nombre de fonctions et de courbes ; l'utilisation des calculatrices graphiques semble donc tout à fait adaptée.

– faire apparaître la connaissance des rôles respectifs des trois coefficients comme indispensable pour la résolution d'un problème donné ; il faut donc un problème stimulant qui doit apparaître pour tous comme un véritable enjeu.

– mettre en place un cadre de travail qui nécessite à chaque étape que les élèves justifient, ou au moins explicitent les choix faits ; les élèves travaillent donc à deux (ce qui est en plus commode : chaque table dispose ainsi d'au moins une calculatrice graphique), et il est clairement indiqué en début de séance que les résultats annoncés devront être justifiés.

Et tout ceci se passe en module, en 1°S, cadre qui permet de concilier, en principe, ces trois exigences : expérimentation, recherche (presque) libre d'un problème, échange entre élèves, et entre les élèves et le maître.

*Une démarche expérimentale pour les élèves... et pour le maître !*

Pour le promoteur de cette activité, il y avait aussi un objectif expérimental :

– quels seront les théorèmes formulés par les élèves au cours de l'activité ?
– comment pourront-ils être réinvestis ultérieurement dans une activité du même type ?

C'est ce qui explique que le cours proprement dit n'interviendra que lors de la quatrième séance, et que la démarche suivie par les élèves, et les problèmes posés ne seront pas tout à fait ceux attendus, comme on le verra ci-dessous.

(3) Sur ce point, voir DUVAL R., 1988 "Graphiques et équations : l'articulation de deux registres", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, IREM de Strasbourg.

## PREMIÈRE SÉANCE

### Le sujet donné aux élèves

**On suppose connu ici un résultat simple : la représentation graphique d'un polynôme du 2e degré, c'est à dire d'une fonction**

$$f : x \to f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

**est une parabole.**

**On se propose de déterminer la, ou les parabole(s) de ce type, vérifiant un certain nombre de propriétés, en procédant par approximations successives, avec l'aide d'une calculatrice graphique.**

**1. Observer** sur un écran graphique les trois droites d'équation :

$$y = -7{,}3x - 24{,}075$$
$$y = -1{,}3x - 9{,}075$$
$$y = 7{,}7x - 9{,}075$$

**2. Choisir** un repère adapté pour tracer, avec la plus grande précision, ces trois droites dans le même repère orthonormé.

**3. On cherche** maintenant une, ou des, parabole(s), tangentes à ces trois droites.

– Combien de paraboles solutions **imaginez-vous** ?
– **Chercher** des équations s'approchant le plus possible de l'objet souhaité. **Préciser** la méthode suivie.
– **Utiliser les tentatives successives pour préciser l'influence des coefficients a, b et c sur la forme, et la position, de la parabole.**

Deux remarques sur l'énoncé :

*– les coefficients des droites ont été choisis de telle façon que les coefficients a, b et c de la parabole ne soient ni immédiats, ni inaccessibles (voir graphique 2). a, b et c sont des décimaux "avec un chiffre après la virgule"*

*– l'énoncé insiste sur les dessins* à la main. *L'hypothèse implicite est en effet qu'une courbe qui se construit toute seule (sur l'écran), et une courbe que l'on trace soit même, à la main, ce n'est pas pareil...* (4)

Une remarque sur le dispositif expérimental :

*Il faut noter aussi une disposition pratique, mais dont les conséquences sont décisives pour l'animation du débat dans la classe, et pour la validation des résultats proposés : il y a une calculatrice graphique rétroprojetable dans la classe. Les élèves estimant avoir trouvé une solution viennent la proposer à la classe, le graphique projeté sur l'écran permet la discussion par tous, et la comparaison d'éventuelles solutions concurrentes.*

### Ce que font les élèves

Leur activité peut se décomposer en plusieurs étapes.

***Première étape : recherche brouillonne***

L'appropriation du problème est immédiate pour tous les groupes. Aucune question sur la définition d'une tangente (on y

(4) Sur ce point, voir TROUCHE, 1994 : "Généralisation des calculatrices graphiques, anatomie d'une déréglementation", dans les *dossiers du CNDP "Les outils de calcul"*.

reviendra plus tard), aucune question sur la stratégie à mettre en œuvre. Les trois droites apparaissent à l'écran, elles sont tracées beaucoup plus laborieusement à la main (à cause des coefficients non entiers, et aussi parce que la nécessité du dessin n'apparaît pas : "pourquoi dessiner ce que l'on voit ?"). Tous les groupes commencent par faire apparaître des paraboles standards (à coefficients pris parmi les premiers entiers...), et font varier les coefficients en désordre. Mais très vite (10mn) les démarches, pour cause d'économie de mouvement, vont se rationaliser.

***Deuxième étape : rationalisation des démarches***

La méthode utilisée par tous les groupes (au départ par l'un, et les méthodes efficaces se répandant vite...) est la méthode attendue : les élèves laissent fixes deux des trois coefficients a, b ou c, et font varier le troisième. En faisant cela, les rôles respectifs des coefficients a, b et c apparaissent vite, et les élèves les font vite ressortir sous des formes qui évoquent le mouvement :

- *quand a est positif, la parabole est tournée vers le haut ;*
- *quand a augmente, la parabole s'allonge ;*
- *quand b augmente, la parabole se déplace à gauche, monte puis descend ;*
- *quand c augmente, la parabole monte.*

Les ambiguïtés de ces expressions sont nombreuses, mais ces "théorèmes en actes" permettent à la majorité des élèves de résoudre le problème posé, ou presque. Et la difficulté pour les élèves ne va pas être de prouver ces "théorèmes": pour eux, *ils ne posent pas problème.* Ils se prouvent en s'éprouvant, en permettant de trouver la parabole cherchée. La difficulté va surgir d'où on ne l'attendait pas : qu'est-ce qui permet d'affirmer que la parabole trouvée est bien la bonne, c'est à dire qu'elle est bien tangente aux trois droites données ? Et, question liée à celle-ci, qu'est-ce qui permet d'affirmer qu'il n'y a qu'une solution au problème posé ?

Pour valider le trinôme proposé, les élèves procèdent à des zooms de plus en plus poussés. Evidemment, la situation de "droite tangente à une courbe" va se traduire pas la confusion des deux objets "vus de près". Ce que l'on peut traduire aussi par le caractère "localement plat" de la représentation graphique d'une fonction dérivable en un point.

Ainsi, outre les considérations sur l'influence des coefficients a, b et c, la séance de module se termine-t-elle, de façon totalement imprévisible, par la proposition de définition suivante (qui ne soulève pas de tollé dans la classe), proposée par un élève : *Une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de point de contacts avec elle...*

**Quelques questions, suite à cette première séance**

*Question 1*

On l'a vu, à propos du rôle des coefficients a, b et c. Les élèves tirent de leur propre activité des "théorèmes", qu'ils traduisent avec leurs mots. Le fait que ces "théorèmes" aident à la résolution du problème ne garantit pas leur exactitude. Faut-il laisser les élèves découvrir, puis écrire, leurs propres théorèmes, avant de corriger et de donner une version correcte de ceux-ci ? Il faut évidemment préciser que le temps imparti à une séance de module (ou de travail dirigé) ne permet pas de corriger tout de suite une version erronée d'un résultat mathématique... Cette réécriture interviendra nécessairement lors d'une séance suivante. Mais on le verra lors des évaluations qui interviendront plus tard, le temps de l'apprentissage est souvent plus long que prévu, il faut laisser le temps de la maturation...

*Question 2*

Faut-il laisser les élèves découvrir eux-mêmes certains objets avant toute définition mathématique ? (ici la tangente à une courbe). En fait, il ne s'agit pas ici de découverte... Si une définition émerge, c'est qu'elle existe déjà dans la tête d'un, ou des élèves. La faire émerger est sans doute nécessaire, si on veut la remplacer par une autre. Et même, on le verra dans le cadre de la séance suivante, il s'agit bien souvent d'organiser un conflit entre de vieilles définitions, et des nouvelles, pour faire apparaître ces dernières comme étant indispensables à la résolution des problèmes posés...

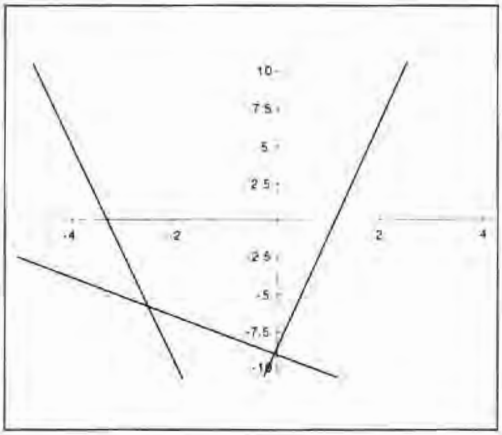
*Question 3*

Est-ce que la manipulation d'une calculatrice graphique fait émerger des définitions, des notions, des images mentales, différentes de celles issues d'un travail plus classique papier-crayon ? On l'a vu pour la définition d'une tangente ("une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de points communs avec elle") l'aspect *représentation discrète* des pixels de l'écran pèse probablement d'un grand poids. Mais aussi le fait que tout bouge sur un écran (une courbe est ainsi plus la représentation d'une trajectoire, d'un point courant, que la représentation d'un graphe) fait que les définitions et théorèmes élèves sont imprégnés d'un vocabulaire dynamique, ou cinématique. On en verra les conséquences dans les évaluations qui seront proposées ultérieurement aux élèves.

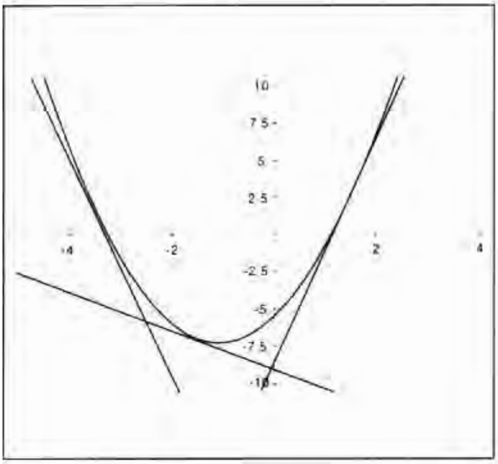
*Question 4*

Est-ce que cette vision dynamique des choses est positive, ou négative, pour l'enseignement de l'analyse dans les classes de lycée ? Vaste question qui ne peut trouver de réponse dans le cadre de cet article... Disons simplement que les outils à disposition des élèves induisent nécessairement cette vision, et que le fait de prendre en compte ces outils dans le cadre de l'enseignement, mieux encore d'en faire les moyens de l'instauration d'un débat dans la classe, permet sans doute de mieux en contrôler les effets induits.

*Pour que le lecteur comprenne bien ce qui se passe, sur les deux graphiques qui suivent, les trois droites que vont faire apparaître les élèves, et la parabole solution.*




**Graphique 1 : une vue des trois droites**




**Graphique 2 : la parabole solution**
$y = 1,5x^2 + 3,2x - 5,7$

## DEUXIÈME SÉANCE : LES MÊMES, UNE SEMAINE PLUS TARD...

Une semaine plus tard, toujours en module, on revient sur l'activité précédente, avec pour objectif : valider par le calcul les découvertes expérimentales (5). Et on commence par quoi on avait terminé : la définition d'une tangente. Successivement sont proposées par la classe les définitions successives, et les objections suivantes :

*Première définition :*

*Une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de points communs avec elle.*
Objection : *une droite est droite, et une courbe... est courbe.*

*Deuxième définition :*

*Une droite est tangente à une courbe si et seulement si elle a exactement un point commun avec cette courbe.*
Objection : *il y a l'axe de la parabole...*

*Troisième définition :*

*Une droite est tangente à une courbe si elle a exactement un point commun avec elle, et si toute la courbe est située du même coté de la droite.*
Objection : *cela ne marche pas pour toutes les courbes...*

*Quatrième définition :*

Idem *que la 3e, en remplaçant courbe par parabole...*

Il est en fait impossible de résumer la discussion qui a lieu : beaucoup de propositions fusent, qui ne sont pas prises en considération par la classe. Ainsi la définition *une droite est tangente à une courbe si elle est perpendiculaire au rayon au point de contact* revient périodiquement (cette définition, qui a une application simple dans le cas du cercle... est en fait la seule connue par les élèves). Mais elle n'est pas reprise dans la discussion, faute de point d'appui dans le cadre de la parabole.

C'est en fait le maître qui clôt la discussion, en annonçant que la dernière définition, au domaine de validité nettement précisé, sera suffisante pour le traitement du problème. Mais des jalons sont posés, pour un retour sur cette définition, quand on abordera les dérivées. Démarche finalement naturelle : toute vérité énoncée en mathématiques n'est vraie que dans un contexte donné,

(5) En fait, cette séance avait été primitivement prévue pour préciser l'influence des coefficients a, b et c sur la forme de la parabole, et "corriger" les théorèmes écrits par les élèves. Mais le cours de la recherche collective en a décidé autrement...

souvent implicite (exemple : "tout" carré estpositif...)

La définition ayant été fixée, la résolution peut alors avoir lieu...

*Résolution...*

On recherche $a \neq 0$, b et c, tels que les équations suivantes aient chacune une solution unique :

$$ax^2 + bx + c = -7{,}3x - 24{,}075$$
$$ax^2 + bx + c = -1{,}3x - 9{,}075$$
$$ax^2 + bx + c = 7{,}7x - 9{,}075$$

L'écriture de la nullité des trois discriminants pose un problème : les rôles de a, b et c ne sont pas habituels...

$$(b + 7{,}3)^2 - 4a\,(c + 24{,}075) = 0$$
$$(b + 1{,}3)^2 - 4a\,(c + 9{,}075) = 0$$
$$(b - 7{,}7)^2 - 4a\,(c + 9{,}075) = 0$$

La résolution du système n'est pas immédiate... Mais les nombres ont été choisis pour que le calcul de b, puis de a et c, soit possible. Cela demande néanmoins une certaine habileté pour sélectionner b, et choisir les "bonnes" équations. Seuls les groupes les plus alertes y parviennent.

Le calcul de a, b, et c dissipe en tous cas tout malentendu : la définition des tangentes était la bonne, le calcul exact, puisque... ça marche. Ceux qui avaient trouvé expérimentalement a, b et c sont confortés dans leur certitude, les autres sont séduits par le résultat, et sa vérification graphique immédiate. Bref, deux séances de module tout à fait complémentaires, qui "ont bien marché".

Mais qu'auront retenu les élèves de cette activité, outre un certain plaisir lié au jeu de la recherche lui même ?

## TROISIÈME SÉANCE, ET PREMIÈRE ÉVALUATION

Une semaine plus tard, les élèves ont un contrôle de deux heures. *Il est annoncé à l'avance qu'ils n'auront pas à leur disposition leur calculatrice graphique.* Il peut paraître étrange d'interdire la calculatrice, alors que celle-ci a été un outil déterminant lors des séances précédentes. Deux raisons à cela :

– une raison d'ordre général : la calculatrice est un outil précieux, qui doit rester sous contrôle de l'élève. Et on contrôle d'autant mieux ce dont on sait se passer... Ainsi, il est sans doute bon d'alterner les séances avec, et sans, calculatrice (ce ne seront évidemment pas les mêmes problèmes qui seront donnés dans chaque cas !). Au bout du compte, on peut aussi espérer une rationalisation des démarches des élèves, qui ne demanderont ainsi à leur machine que ce qu'il est utile de lui demander (de la même façon qu'il est inutile de demander le résultat d'une multiplication élémentaire à une calculette, il n' est pas indispensable de faire afficher le graphe d'une fonction constante sur un écran...)

– une raison liée à l'exercice : il s'agissait de contrôler les traces que les activités précédentes avaient laissées dans la tête des élèves. Il y avait plusieurs possibilités pour cela : on aurait pu donner plusieurs paraboles, et demander de trouver grâce à la calculatrice graphique des équations plausibles. Ou alors demander de tracer à la main, et sans le secours de la calculatrice, une parabole simple dont l'équation était donnée. Comme il ne s'agissait pas ici de tester l'habileté manœuvrière des élèves, mais les images mentales qui s'étaient forgées, c'est la deuxième solution qui a été choisie. Et ceci est lié à une préoccupation beaucoup plus générale : est-ce que l'adaptation à une calculatrice graphique produit nécessairement un apprentissage exploitable hors de cet environnement ?

Notons aussi que, comme toute évaluation, celle-ci s'adressait avant tout aux élèves eux-mêmes : c'est bien le meilleur moyen de les convaincre que les théorèmes qu'ils avaient formulés étaient (au mieux !...) insuffisants.

*Le contrôle était ainsi formulé :*

**a) Tracer le plus précisément possible la parabole d'équation $y = 2x^2 + 6x - 5$**

**b) Vérifier que le point A de coordonnées (1; 3) appartient à cette parabole. Démontrer que les droites passant par A, et qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, ont pour équation $y = ax + 3 - a$.**

**c) On sait que, si une droite est tangente à une parabole alors elle a un unique point commun avec elle. En utilisant cette propriété, déterminer l'équation de la tangente à la parabole en A.**

*Résultats de l'exercice :*

Ils sont franchement mauvais. La majorité des élèves ne sait pas traiter les questions b et c. Et, chose plus inquiétante, un élève sur trois trace même une parabole insensée du point de vue des coefficients a ou c (parabole tournée vers le bas, ou ordonnée à l'origine positive). Pis encore, un élève sur cinq trace quelque chose qui n'est même pas une parabole : des points sont déterminés par le calcul, puis reliés entre eux. Et comme une erreur de calcul est vite arrivée, les objets obtenus de cette façon ont peu de chance de ressembler à une parabole...

Bref, la connaissance acquise lors des deux séances de module est restée très liée à l'activité elle-même, et très liée aussi à l'outil manipulé : la calculatrice graphique. Privé de l'outil, et sortis de l'activité traitée, les élèves n'avaient plus de références utilisables.

## QUATRIÈME SÉANCE, ET PREMIER COURS

Avec la correction du contrôle, le professeur revient alors sur les leçons du module. Les "théorèmes élèves" sont repris, critiqués. En particulier le professeur essaie de montrer que ce sont les nombreuses ambiguïtés de ces théorèmes qui ont entraîné les erreurs du contrôle. Le raccord est fait avec les leçons antérieures sur les polynômes du deuxième degré : la mise sous "forme canonique" avait permis de mettre en évidence le sommet de la parabole et les variations de la fonction. Il faut noter que très peu d'élèves dans le contrôle, et aucun dans le module, n'ont utilisé ces résultats vus en cours trois semaines auparavant...

De nombreux aller-retour sont faits avec la calculatrice graphique pour visualiser les résultats prouvés par le calcul.

Les élèves notent dans le cahier de cours ce qui fait désormais consensus (chaque phrase est accompagnée du petit dessin adéquat).

**La courbe d'équation**
**$y = ax^2+bx+c$**
**est une parabole.**

**– Si deux paraboles ont le même coefficient a, elles sont superposables par translation**
**– Si a > 0, la parabole est tournée vers le haut ;**
**– Si a < 0, la parabole est tournée vers le bas ;**

**– Le sommet d'une parabole a pour coordonnées**
**$(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$**

**– Le coefficient "c" est "l'ordonnée à l'origine".**

On peut discuter bien sûr du choix fait pour fixer les rôles respectifs de a, b et c. Pour c, pas de problème.

– Pour a, le choix a été fait d'insister sur la convexité, et sur l'idée simple *la valeur de a fixe la forme de la parabole.* On aurait pu être plus ambitieux, en disant que la forme de la parabole ne dépendait que de la valeur absolue de a, ou que, à une isométrie près, il n'y avait qu'une parabole pour $|a|$ fixé. Mais le résultat, plus complet, en aurait perdu de la netteté.

– De même pour b on aurait pu dire que c'était la "pente" à l'origine. Mais les élèves n'ont pas encore vu la dérivation. Et on perdait de vue un point essentiel, le sommet.

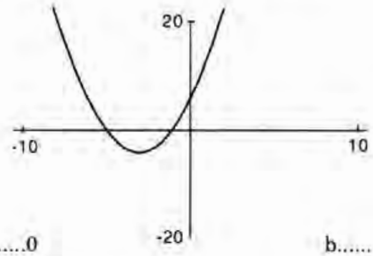
Un choix clair avait été fait en tout cas : exclure toute considération de "mouvement" des propositions données (sauf éventuellement le "superposables", qui contient un mouvement au moins potentiel...)

Au terme de cette leçon, un contrôle est annoncé pour la semaine suivante, portant uniquement sur la représentation graphique des trinômes du deuxième degré, et dans les mêmes conditions que le précédent (l'utilisation de la calculatrice sera exclue).

## CINQUIÈME SÉANCE, ET DEUXIÈME ÉVALUATION

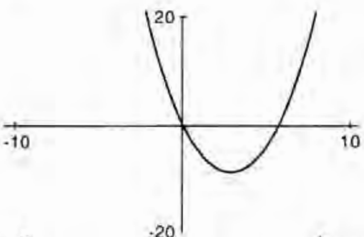
Les élèves ont une heure pour *compléter* les cadres ci-dessous (il s'agit de donner les positions de a, b, c et Δ par rapport à zéro), et **justifier** leurs réponses au verso de la feuille.

**A**



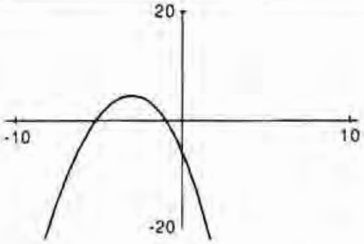

a..........0 b..........0
c..........0 Δ..........0

**B**



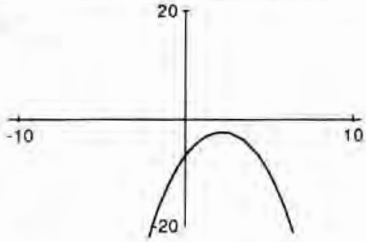

a..........0 b..........0
c..........0 Δ..........0

C



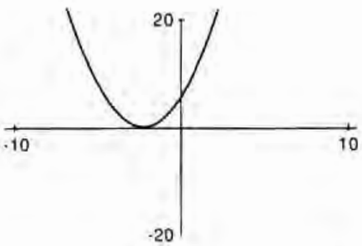

a.........0 b.........0
c.........0 Δ.........0

D



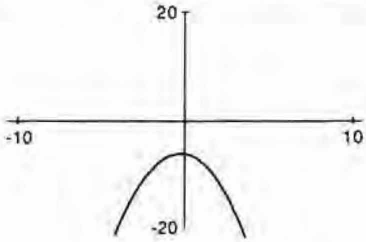

a.........0 b.........0
c.........0 Δ.........0

E




a.........0 b.........0
c.........0 Δ.........0

F




a.........0 b.........0
c.........0 Δ.........0

**Bilan du bilan**

On lira dans le cadre ci-dessous le pourcentage de bonnes réponses à chaque question.

| Courbe A | Courbe B | Courbe C | Courbe D | Courbe E | Courbe F |
|---|---|---|---|---|---|
| a ... 100% | a ... 100% | a ... 100% | a ... 100% | a ... 100% | a ... 100% |
| b ... 72% | b ... 72% | b ... 43% | b ... 79% | b ... 43% | b ... 79% |
| c ... 29% | c ... 11% | c ... 29% | c ... 79% | c ... 43% | c ... 79% |
| Δ ... 79% | Δ ... 93% | Δ ... 93% | Δ ... 93% | Δ ... 100% | Δ ... 93% |

– Pour a et Δ, ce n'est pas mal, cependant apparaissent des "erreurs" significatives dans les commentaires, ou justifications que les élèves notent au verso de leur feuille.

*Contagion de la "rationnalité du quotidien" sur la rationnalité mathématique* (6)

> Plus a est petit, plus la parabole est étroite
> Si a est positif, il y a un maximum,
> Si a est négatif, il y a un minimum.

Il faut noter que la première proposition n'avait aucune utilité ici (dans le contrôle donnée, toutes les paraboles étaient isométriques). Ce "théorème élève", faux evidemment pour a positif, sonnait bien, et à ce titre, il faut croire qu'il avait sa place dans les commentaires du dos de la feuille. Quant aux deux propositions suivantes, relatives au maximum et au minimum, elles ont le même statut (fausses, et frappées au coin du bon sens...), et n'interviennent pas dans la résolution du problème, puisque les élèves concernés ont bien déterminés le signe de a... malgré leur théorème. On est loin du théorème-outil-de-résolution... Ici il ne s'agit plus que du théorème-ritournelle, ou du théorème-alibi. Et, plus grave, une fois mémorisé, quand il sera exhibé lors d'une autre activité, du théorème-obstacle.

*Confusion du cadre géométrique et du cadre algébrique*

> La courbe admet un minimum, un maximum
> Quand $\Delta = 0$, la courbe s'annule en un point.

Cette confusion, favorisée par la manipulation des calculatrices graphiques (la fonction est rendue concrète par l'apparition automatique de son graphique, elle est pour ainsi dire révélée, elle *devient* sa courbe) ne présente pas de conséquences ici. On peut penser par contre que ce ne sera pas sans conséquence quand il s'agira de fixer des notions plus précises, par exemple relatives aux limites de fonction.

*Relative étanchéité des cadres algébriques et analytiques*

Pour déterminer le signe de $\Delta$, plus de la moitié des élèves passe par l'ordonnée du sommet, et non pas par un dénombrement, plus simple pourtant, des racines du trinôme. Il est vrai que le contexte du contrôle induisait ce genre de détour, mais le contexte plus général de l'enseignement des mathématiques dans cette classe était l'étude du trinôme, et donc aussi les conditions d'existence de ses racines. Mais, malgré toutes les tentatives (du professeur) de changement de points de vue lors de l'étude des équations et des fonctions, cette attitude est très tenace : quand les élèves étudient une équation du second degré, ils étudient le signe du discriminant, sans référence à la fonction sous-jacente. Et quand ils étudient les variations de cette fonction, exit l'équation et les zéros éventuels du trinôme...

**Pour la détermination de b et c, c'est beaucoup plus mauvais...**

*La détermination de b est perturbée par des considérations de mouvement*

C'est ce qui explique sans doute que les résultats sont plus mauvais que pour $\Delta$, alors que la méthode utilisée est souvent la même (coordonnées du sommet)

> b définit le déplacement latéral de la parabole ;
> quand b est positif, la parabole se dé-

(6) Par référence à la thèse d'Alain Lerouge 1992 : *Rationalité du quotidien, rationalité mathématique*, Université de Montpellier II.

place vers la gauche, quand b est négatif, la parabole se déplace vers la droite. plus b est grand, plus la parabole glisse à gauche, plus b est petit, plus la parabole glisse à droite

Les élèves remplacent donc l'étude précise du signe de l'abscisse de la parabole (fonction des signes de a et de b) par des considérations générales sur des mouvements de la parabole.

Il s'agit à chaque fois de "théorèmes" cohérents, liés à une qualité d'observation certaine, et que cette cohérence même rend très résistants. Mais dont la mise en application crée d'énormes problèmes (que veut dire "plus petit que" ? Quel est le plus petit, de 0,1 ou de −1000 ?), et suscite autant de nouveaux "théorèmes" : interrogés précisément, les partisans du "glissement de la parabole" approuvent les corollaires proposés par le maître : "deux paraboles ayant le même coefficient b ont des sommets de même ordonnée" (c'est à dire, précise un élève, sont "à la même hauteur"), "si une parabole a son sommet à gauche de l'axe des ordonnées, alors elle a un b négatif".

*La détermination de "c" est perturbée par des considérations "géométrico-dynamiques"*

quand c augmente, la parabole monte
"c" est négatif car la parabole est basse
"c" est nul parce que la parabole est au niveau 0, sur l'axe des abscisses.

Ainsi les élèves ne considèrent pas l'ordonnée à l'origine, mais la "hauteur" globale de la parabole, c'est à dire en fin de compte la position du sommet par rapport à l'axe des abscisses. Si celui-ci est par exemple "posé" sur cet axe, alors la hauteur de la parabole est nulle, et c = 0...

Que conclure de tout ceci ? Il y a une logique très forte à l'œuvre dans les leçons que les élèves tirent eux mêmes de leur propre activité :

– les résultats nouveaux qui apparaissent sont réinterprétés à la lumière de ce qu'ils savaient déjà ;
– les théorèmes proposés par le professeur sont réécrits, au moins mentalement, avec leurs propres mots, et leurs propres conceptions ;
– ces "théorèmes-élèves" vont alors vivre leur propre vie. Ils suivent un processus de simplification interne, et d'extension en tâche d'huile...
– et bien entendu, plus leur vie autonome sera longue, plus efficace sera leur résistance à tout anti-corps. Ils seront alors constitués comme autant d'obstacles pour les apprentissages ultérieurs...

## ALORS, LES MODULES SONT-ILS UTILES, OU DANGEREUX ?

Il me semble que les activités "type module" (l'étiquette n'a pas grande importance) sont indispensables, particulièrement en mathématiques.

Débusquer les idées fausses, montrer leur caractère erroné en les faisant agir comme obstacle pour la résolution d'un problème donné, suppose que les élèves soient en position eux mêmes d'agir.

Mais il ne faut pas imaginer que l'activité elle-même est gage d'apprentissage. Une activité-qui -marche peut induire de nombreuses idées fausses. Dans la classe de mathématique *comme dans l'atelier de l'Alchimiste, l'élève et l'adepte ne se présentent pas de prime abord comme de purs esprits. La matière elle-même ne leur est pas une raison suffisante de calme objecti-*

*vité. Au spectacle des phénomènes les plus intéressants, les plus frappants, l'homme va naturellement avec tous ses désirs, avec toutes ses passions, avec toute son âme. On ne doit donc pas s'étonner que la première connaissance objective soit une première erreur* [7]..

Il reste pour le professeur, comme le dit Bachelard, à organiser le va-et-vient entre la table d'expérience... et le tableau noir. Le mérite de l'instauration des modules est d'avoir délimité une place pour la table d'expérience. Il reste à organiser le va-et-vient...

(7) BACHELARD G., 1938 : *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique Vrin.