Point de vue

LA DÉRIVE DES CONTINENTS

Ces quelques réflexions proviennent d'une dizaine de réunions d'un groupe IREM de Strasbourg sur le thème de la jonction terminales DEUG.
Ce groupe IREM est composé de :

BLASCO L. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.),
DIDIERJEAN A. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.),
KAHN C. (Lycée Marie Curie),
KHARLAMOV S. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.),
KOCH B. (LEGT Haguenau),
WEIL D. (Lycée International).

I. Quelques caractéristiques structurelles de chacun des continents

Le second degré, les terminales

Les élèves sont regroupés dans des classes de 30 à 40 élèves pour un enseignement de 9 heures par semaine (dont une heure dédoublée en travaux dirigés) pour les C, ou de 6 heures par semaine pour les D. Un élève de terminale suit de 31 à 40 heures de cours suivant son choix d'options.

On constate ces dernières années un afflux d'élèves vers les sections scientifiques ; les uns s'y rendent par goût, d'autres, nombreux, pensent que cette filière offre le plus de débouchés. Ces éléments conduisent les bons élèves à déserter les filières littéraires A et économique B, d'où le cliché : la filière scientifique est une filière d'élite. Dans cette phrase on oublie trop souvent qu'au lycée le passage dans la classe supérieure est facilement accordé : on trouve aujourd'hui dans les Terminales scientifiques :

– de bons élèves dans toutes les matières,
– des élèves ayant du goût pour les sciences,
– des élèves bons en lettres, mais qui espèrent être plus stimulés au travail dans une filière d'élite,
– de nombreux élèves très moyens que le système scolaire n'a pas arrêtés dans leur choix et qui pensent que toutes les possibilités sont offertes à un bachelier scientifique.

Les élèves des trois premières catégories essaient de se diriger vers les classes préparatoires, les écoles d'ingénieurs à préparation intégrée ou vers des études littéraires ou juridiques.

Certains s'orientent par choix vers un DEUG A où ils retrouveront souvent ceux de la dernière catégorie.

On peut imaginer que ce schéma va évoluer si le Ministre arrive, comme il le proclame, à réduire la part des mathématiques dans l'enseignement secondaire et leur poids dans l'orientation. La filière scientifique ne serait plus filière d'élite et l'on retrouverait de bons élèves dans les classes littéraires et économiques.

L'enseignement supérieur, les DEUGS

L'enseignement en DEUG est constitué de cours magistraux en amphis et de T.D. par groupes d'environ 30 étudiants.

Les horaires de cours pour un étudiant du DEUG sciences, mention Maths Informatique, se répartissent comme suit :

	COURS	T.D.	
1er semestre (Mathématiques A)	40 h	50 h	10 semaines
2^{e} semestre (Mathématiques B)	32 h	48 h	16 semaines
2^{e} semestre (Analyse A)	32 h	48 h	

L'ensemble est réparti sur 26 semaines de cours, soit une moyenne de 9,5 h de mathématiques par semaine et de 1,4 heure de T.D. pour une heure de cours en amphi.

L'horaire total de cours pour un étudiant (toutes matières confondues) est de 490 h soit une moyenne de 19 h par semaine.

Les étudiants sont répartis en amphis pour les cours (150 à 300 étudiants) et en groupes de T.D. pour des séances d'exercices.

Ainsi, par exemple, une unité comme Mathématiques A a quatre amphis qui tournent en parallèle pour 20 groupes de travaux dirigés.

Un étudiant peut avoir pour ses 9,5 h de mathématiques par semaine jusqu'à 4 enseignants différents.

Les problèmes de moyens matériels (salles) et humains (postes d'enseignants) sont au cœur de ces caractéristiques. Le rapport, nombres d'heures de T.D. pour une heure de cours, qui était toujours, en mathématiques, supérieur à 2 il y a quelques années, est passé a une moyenne de 1,5 actuellement. Les groupes de T.D. qui comprenaient en général une vingtaine d'étudiants il y a dix ans sont plus près actuellement de 40 que de 30.

A titre de comparaison , en classes préparatoires, l'horaire de mathématiques est de 15 h par semaine, dont 12 h de cours par classe de 45 étudiants, 2 h de T.D. par groupes de 20 à 25 étudiants, 1 h de colles par groupes de 3 étudiants et ceci sur 35 semaines.

II. Méthodes d'enseignement de chaque continent

Dans le second degré, les terminales

Actuellement les élèves sont très encadrés au lycée et cela ne changera probablement pas. Durant leur année de terminale, ils ont un professeur de mathématiques chargé de la totalité de l'enseignement. Les méthodes pédagogiques ont beaucoup évolué ces dernières années et les projets de programme, pour la réforme qui interviendra dès la rentrée de septembre 1994, vont dans le même sens.

Le cours magistral tend à disparaître. Les instructions officielles, qui régissent tout l'enseignement du second degré, préconisent des activités préparatoires pour introduire une notion nouvelle, suivies d'une "synthèse brève". Le cours n'est souvent qu'un résumé fait de définitions, de propriétés et de théorèmes presque tous admis.

1. Les textes officiels

Dans l'exposé des motifs du programme de seconde (BO n°20, 17 mai 1990) on relève les recommandations suivantes que nous ne pensons pas dénaturer en les sortant de leur contexte :

On a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique.
On a voulu insister sur... le rôle formateur des activités de résolution de problèmes.
On cherche une meilleure solidité sur des points essentiels.
On a voulu s'en tenir à un vocabulaire théorique modeste,...
la résolution de problèmes constitue, comme au collège, l'objectif essentiel.
la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion et de débat sur les démarche suivie et les résultats obtenus,
la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps
Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique
Pour les démonstrations, le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités.

2. Un scénario presque parfait (à partir de ces textes)

A partir de ces conseils, on peut imaginer un scénario "idéal" pour l'introduction d'une nouvelle notion ou d'un nouvel outil :

a. Le professeur propose, ou mieux, fait découvrir un problème (ouvert !) Il crée un débat dans sa classe à propos de ce problème.

b. Les élèves s'approprient le problème qui devient leur problème. Ils sont motivés pour le résoudre (par exemple pour prouver aux autres qu'ils ont raison, par curiosité, par défi...). Les élèves cherchent (sèchent), expérimentent, inventent sans parvenir à une solution totalement satisfaisante, le problème ayant été choisi pour exiger un apport de connaissances nouvelles.

c. De cette insatisfaction naît la demande d'outils ou de notions plus performants à laquelle le professeur va répondre atteignant ainsi l'objectif visé. Les éléments nouveaux nécessaires à la résolution du problème sont alors construits en dialogue avec les élèves. D'autres problèmes sont proposés qui montrent la généralité de ces nouveaux outils, leur valeur de méthode.

d. Une synthèse permet de préciser ce qui devra être retenu, de donner l'une ou l'autre démonstration d'un résultat déjà fourni et utilisé, de relier les éléments nouveaux aux connaissances anciennes. C'est ce qui donne le "cours" bref souhaité.

e. Les élèves "apprennent" ce cours qui a du "sens" pour eux et sont à même de le réinvestir pour résoudre de manière efficace une nouvelle classe de problèmes.

3. Le beau scénario à l'épreuve des faits

La réalité est souvent bien différente sans que la responsabilité de cette dérive puisse être nettement située :

Les classes sont nombreuses (plus de 30 élèves), hétérogènes et la marge entre un débat animé et un chahut larvé est parfois mince.

Le professeur n'a pas toujours l'imagination, la créativité, les connaissances lui permettant de mettre ainsi en scène toute séquence d'acquisition. Sa formation entièrement centrée sur les connaissances mathématiques l'a mal préparé à cette "ingénierie didactique". Il trouvera dans les manuels peu de matériel lui facilitant la préparation d'une telle séquence. De plus certaines notions nouvelles se prêtent mal à ce type de présentation.

Le scénario dit "idéal" ci-dessus est gourmand en temps et le professeur jugera souvent que le coût est trop lourd par rapport aux résultats. Les effets bénéfiques secondaires ne sont pas immédiatement visibles.

En terminale où l'envie de faire des mathématiques est, même chez des élèves intéressés, momentanément occultée par l'envie de réussir le BAC, la tentation est alors grande d'atomiser les connaissances et de procéder à un bachotage intensif sur des méthodes de type assez algorithmique ce qui développe des compétences ponctuelles qui sont précisément celles qui seront évaluées par les épreuves de BAC.

4. Quelques conséquences

La démonstration d'un théorème a presque disparu de l'enseignement du lycée. Elle fait tellement figure d'exception, que les élèves n'en comprennent souvent pas le statut.

Par exemple :

En terminale C, la première démonstration de cours peut être celle du résultat $\lim \ln(x) / x = 0$, l'on retrouve ensuite dans certaines copies cette démonstration complète dès que le résultat est utilisé. Le sens même de la démonstration disparaît.

Avec le cours bref, utilisé comme un mode d'emploi ou une règle de jeu, l'élève est prêt à chercher des exercices et des problèmes, à effectuer des travaux pratiques, à condition qu'ils soient proposés en difficulté croissante, qu'il y ait beaucoup de questions intermédiaires, que l'on retrouve un certain nombre de fois le même schéma.

Le problème ouvert (chronophage !) a presque disparu en terminale, la part d'initiative personnelle est très limitée, le temps des recherches de plus en plus réduit. En terminale on apprend moins à "sécher" qu'à reproduire.

On réduit le cours magistral et on offre des activités variées à chercher en groupe. Les élèves "zappeurs" ont moins l'habitude de se concentrer. Le nouveau public d'élèves, plus actif en principe que le précédent, n'est pas du tout prêt à subir une séquence d'une heure et demie de cours magistral ; il n'est pas prêt non plus à le travailler, car il ne "sait pas". Il est coulé dans un autre moule, celui de l'exemple qui précède ou suit la définition : il utilise des mots, dont il ne connaît le sens que dans des cas particuliers.

Par exemple, un test a prouvé, dans une classe de terminale C, que tous les élèves "connaissaient" les mots *réunion* et *intersection*, pas un n'était capable d'en donner une définition, peu nombreux étaient ceux qui savaient les illustrer sur un diagramme.

Le mot *réunion* est attaché à l'ensemble de définition d'une fonction et le mot *intersection* à celle de deux courbes.

Au lycée on s'entend bien, entre élèves et enseignants, avec cet usage. Lorsqu'on pousse la curiosité plus loin et qu'on exige des définitions on arrive à des phrases telles que :

"$A \cap B$ sert à identifier ce qui appartient à deux ensembles."
"Une union est un ensemble de choses dont certains ne font pas partie."
"$A \cup B$ signifie que les points de A font aussi partie de B et vice-versa."
"Le symbole $\cup$ sert à rassembler les parties différentes pour exprimer plus facilement un nombre de conditions importantes."
"Dans une réunion on associe des éléments."

Dans un problème les questions intermédiaires sont toujours données, les élèves n'ont pas à faire preuve de beaucoup d'initiative, de créativité (sauf peut-être en géométrie où il est moins rare d'obtenir plusieurs propositions de solution). Le but global du problème (lorsqu'il est explicité) est occulté par les difficultés des élèves sur chaque question.

De l'objectif ambitieux d'"entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique" il ne subsistera trop souvent que "dresser les élèves à bien faire les exercices des annales de BAC".

Dans l'enseignement supérieur, les DEUGS

Les méthodes pédagogiques sont très différentes dans l'enseignement supérieur de celles décrites précédemment pour le second degré.

Un étudiant devrait, en un espace de temps réduit, acquérir et assimiler un grand nombre de notions.

Les cours de mathématiques sont formés de petites théories complètes construites avec rigueur. Un étudiant doit pouvoir prendre des notes de cours, les retravailler et les appliquer dans les différentes situations présentées en TP.

Cependant, en place d'évolution des méthodes pédagogiques, c'est le manque progressif de moyens qui a imposé la situation actuelle.

En dehors des contraintes structurelles décrites précédemment, cours magistral en amphis et séances d'exercices, le canevas de programme laisse à chaque enseignant une grande latitude dans la façon de le traiter.

Nous nous trouvons actuellement dans une situation contradictoire qui ne fait que de s'aggraver: La nécessite ressentie de maintenir le niveau des licences et maîtrises actuelles et l'évolution des terminales nous mettent, en DEUG dans une situation impossible.

Souvent sur le thème du cours des listes d'exercices sont distribués aux étudiants, ces listes servent alors de base pour le travail dans l'ensemble des groupes de T.D. d'une unité.

L'année scolaire se trouve partagée en deux semestres de longueurs inégales (10 et 16 semaines).

Au bout de ce premier semestre, à la suite des partiels, les étudiants sont soit autorisés à poursuivre dans la filière de leur choix, soit orientés sur une remise à niveau qui leur permettra de reprendre, l'année suivante, le cursus choisi sans qu'une année de redoublement ne leur soit comptabilisée.

Difficultés des étudiants

L'évolution des méthodes d'enseignement en terminale décrites précédemment, conjuguée aux énormes difficultés des DEUGS ne fait qu'accroître la faille entre ces deux continents.

Hormis en préparatoire (du fait de ses moyens matériels) sauter la faille pour un étudiant devient de plus en plus hasardeux.

Au fil des dernières années les étudiants sont, de moins en moins préparés à suivre et travailler un cours magistral, alors que la part de celui-ci dans l'enseignement supérieur est devenu de plus en plus important, de moins en moins habitués à acquérir des notions par eux mêmes (au moyen de notes de cours, d'ouvrages) alors que cela leur est de plus en plus nécessaire à leur arrivée en DEUG.

L'augmentation du nombre d'enseignants à laquelle les étudiants ont à faire face rend l'adaptation difficile.

Durant leur scolarité dans le second degré les élèves ont été habitués à une très grande homogénéité, voire une très grande rigidité des notations qui leurs sont proposées. A leur arrivée en DEUG, les élèves devenus étudiants semblent avoir beaucoup de mal à s'adapter à de nouvelles notations. Il semble que souvent, dans leur cursus du second degré, les notations ont fini par occulter les concepts qu'elles recouvrent.

Ainsi, par exemple à propos des fonctions périodiques :

Amenés à étudier la fonction $\tan(x) - x$ sur l'intervalle $[\ 0, \pi\ /\ 2\ [$, des élèves croient utile de préciser que la fonction est de période π. Dialogue entre un professeur *(P)* et ses élèves de T.C. *(E)* :

P : la fonction $f(x) = \cos(x)$ est elle périodique ?
E : oui de période 2π (pour tous les élèves)
P : qu'en est-il de la fonction $x(t) = \cos(\varpi t)$?
E : C'est pas des maths ! (sans doute parce que la variable s'appelle t et la fonction x), si vous posez la question, la période est 2π (sans doute parce qu'il y a cos dans l'écriture)
P : et en physique, quelle est la période, c'est 2π ?
E : Ah non, en physique c'est $2\pi/\varpi$ (logique non !)

Les propriétés $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, plus généralement $f(x + t) = f(x)$ ne sont pas connues des élèves et très longues à faire émerger. Les élèves ne disposent donc d'aucune définition générale, pire, d'aucun moyen de vérifier si une fonction est ou non périodique. Ils n'ont que des exemples de fonctions périodiques.

Les professeurs évitent de définir dans le cadre général la notion de fonction périodique car une définition rigoureuse n'est pas facile à donner (toutes celles des livres de seconde de 1981 étaient fausses !). Cette exigence de rigueur excessive et prématurée a totalement stérilisé l'étude de la notion.

La donnée de deux heures de cours de DEUG correspond à une quantité à assimiler pour un étudiant qui serait répartie en terminale sur plusieurs semaines.

Les étudiants ont une très grande difficulté en mathématiques, à tirer leurs acquisitions de connaissances d'un écrit. Qu'en est-il alors de leurs notes de cours ?

Un étudiant de première année du DEUG peut avoir à passer son temps à essayer de trouver un cours. Plusieurs enseignants ayant quitté les amphis suite à un chahut, il faut que les étudiants complètent leurs cours par les notes d'un autre étudiant qui a eu un cours complet dans un amphi parallèle. Malgré l'autonomie dont a pu faire preuve un élève en terminale, il lui sera très difficile de construire un cours à partir de livres dont le style est très différent de celui des manuels de terminale.

Dans des listes d'exercices de DEUG, souvent, chaque exercice met en œuvre une idée nouvelle (ils sont tous différents). En terminale les élèves fonctionnent souvent par analogie (sur des exercices très proches). Ils sauront peut-être démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel après avoir vu la démonstration pour $\sqrt{2}$.

Les élèves de terminale manquent de sens critique dans les calculs. Ils ne savent pas s'arrêter avant de se noyer dans des calculs dont l'échec est prévisible (attitude souvent constatée dans des calculs sur les nombres complexes).

III. Passage du programme de terminale à celui du DEUG

Dans cette partie nous avons repris en italique le programme de mathématiques du DEUG A première année, option Mathématiques-Physique. En regard de ce programme nous mettons les notions correspondantes vues en terminale.

Mathématiques A

> ***Sensibilisation aux problèmes de logique*** *: Ensembles, opérations ensemblistes élémentaires, produit cartésien, égalité*

Ces notions sont introduites sur des exemples, sans définitions claires. (par exemple on parle d'ensemble de nombres réels, complexes...)

Les notions d'intersections, de réunion ne semblent pas devoir être considérées comme opérationnelles au sortir de terminale.

Toutes ces notions restent liées aux exemples qui ont permis leur introduction.

***Applications :** Image directe, image réciproque, injection, surjection, bijection. Composition, restriction.*

Les mots injection, surjection, bijection, restriction ne sont pas introduits dans le second degré.

En analyse la notion de fonction réciproque est rencontrée sur des exemples : e^x, $\ln x$, x^n, $\sqrt[3]{x}$.

La notion de composition de fonction se retrouve dans la formule de dérivée des fonctions composées.

En géométrie les notions de composition et de transformation réciproque sont utilisées.

***Nombres réels et fonctions d'une variable réelle :** Majorants, minorants, bornes supérieure et inférieure, suites, limites, théorèmes sur les limites, approximation d'un nombre par des rationnels.*

La notion de limite est introduite à partir de suites ou de fonctions de références . La notion de borne n'est pas abordée. Les majorants et minorants sont liés à l'étude des variations d'une fonction.

***Fonctions d'une variable réelles :** Continuité, dérivabilité, méthode de calcul approché des zéros, fonctions inverses, fonctions usuelles.*

Une fonction est presque toujours définie par une unique expression de préférence calculable.

Des problèmes apparaissent avec les fonctions définies "par morceaux" par des expressions différentes. Les fonctions de x de la forme $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ sont bannies, ainsi que l'étude des fonctions dépendant d'un paramètre. Ces dernières sont cachées lors de la résolution des équations différentielles.

La continuité sur un intervalle apparait comme conséquence de la dérivabilité et est utilisée essentiellement pour justifier l'emploi de certains résultats (par exemple dans le calcul des primitives). La continuité en un point, définie avec la notion de limite, intervient dans les problèmes de prolongement par continuité en un point.

La dérivabilité est définie par le développement limité à l'ordre un. En général cette définition n'est pas exploitée et ne semble pas rester dans la mémoire des étudiants. Par contre, les formules de dérivation et les calculs de dérivées sont acquis.

Les changements de variables interviennent dans les calculs de limites (vus comme fonctions composées) ou les équations.

Pour les méthodes de calcul approché des zéros, la méthode par dichotomie et celle de Newton sont vues et utilisées pour des calculs numériques, sans majoration de l'erreur.

Les fonctions usuelles (fonctions puissances, exponentielles, logarithme...) sont longuement étudiées.

***Algèbre linéaire :** Espaces vectoriels sur les réels et sur les complexes, sous espaces vectoriels, intersection, somme, supplémentaire. Combinaisons linéaires, générateurs, dépendance linéaire, bases, rang d'un système de vecteurs, espaces vectoriels de* *dimension finie, matrices associées à un système de vecteurs, formules de changements de bases. Applications linéaires, somme, composition, noyau, image, rang, formule du rang, isomorphismes. Matrices associées à une application linéaire.*

C'est une partie entièrement nouvelle sauf en ce qui concerne les systèmes linéaires.

Une première approche des nombres complexes a été vue en terminale.

Les vecteurs du plan et le calcul vectoriel sont des outils de géométrie.

Mathématiques B

Algèbre des matrices : *Lois de composition. Réduction à la forme canonique. Applications matricielles. Systèmes linéaires. Déterminants. Rang d'une matrice. Matrices inversibles.*

Partie nouvelle.

Espaces vectoriels euclidiens *: Espaces affines, vocabulaire, applications affines, exemples : équation de la droite et du plan. Isométrie du plan et de l'espace. Barycentres. Produit vectoriel.*

Il se pose un problème de vocabulaire, les élèves de terminale ont été habitués à pratiquer la géométrie plane.

Structures algébriques *: Groupes anneaux et corps. Arithmétique élémentaire (algorithme d'Euclide, théorème de Bezout). Polynômes à une variable. Division des polynômes. Décomposition sur **R** ou **C**.*

Dans le second degré, on n'étudie pas les structures. Aucune notion d'arithmétique n'est vue. Au mieux les élèves savent simplifier une fraction en cherchant des facteurs communs au numérateur et dénominateur, rarement en décomposant en produit de facteurs premier. La division euclidienne n'est pas maîtrisée, on peut comprendre que la suite (i^n) est périodique de période 4 et ne pas savoir écrire $i^{4n} = 1$, i^{4n+1} ...

La division des polynômes n'est pas au programme. Dans un polynôme qui s'annule en a les élèves savent factoriser par $(x - a)$ par identification.

Analyse A

Calcul intégral *: Intégrale de Riemann. Primitives et intégrales. Cas des fractions rationnelles. Calcul numérique d'une intégrale.*

Il est vu dans le second degré en tant que calcul des primitives. L'intégration par parties est au programme, mais aucun changement de variables. Les élèves savent lire "à l'envers" les formules de dérivation. Ils ne connaissent rien sur les fonctions réciproques et sur les fractions rationnelles (sauf éventuellement par identification).

Les élèves éprouvent des difficultés à établir des propriétés pour une intégrale qu'ils ne savent pas calculer.

Les sommes de Riemann ne sont pas vues mais il existe des activités sur la méthode des rectangles.

Formule de Taylor, développement limités résolution des équations algébriques :

Dans le secondaire on évoque les développements limités à l'ordre 0 et 1, on voit l'inégalité des accroissements finis, mais pas le théorème des valeurs intermédiaires.

Courbes *: Courbes planes, paramétrées.*

Étude des courbes classiques, un peu de paramétrées.

Équations différentielles linéaires : *Premier et deuxième ordre, variables séparables, taux, vitesse, modélisation, exemples classiques.*

Sont vues celles du premier et du deuxième ordre à coefficients constants réels sans second membre.