UN REGARD DIDACTIQUE SUR L'UTILISATION DES OUTILS DE CALCUL FORMEL DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Michèle ARTIGUE, Equipe DIDIREM
Université Paris 7 et IUFM de Reims

Comme en témoigne l'existence du groupe "Apport des logiciels de calcul formel à l'enseignement des mathématiques" de la DITEN B2 au Ministère de l'Education Nationale, il existe une volonté institutionnelle explicite de réfléchir aux potentialités offertes par les logiciels de calcul formel pour l'enseignement des mathématiques et ce, dès le niveau du collège, ainsi que de trouver les moyens de permettre une intégration réellement efficace de ces outils à l'enseignement [1].

Il ne s'agit pas là d'une tâche facile. Le décalage persistant entre les discours et écrits enthousiastes des innovateurs dans le domaine informatique et la faible intégration réelle de l'outil informatique, de façon générale, dans l'enseignement des mathématiques permet de le supposer. On peut s'attendre à des difficultés plus importantes encore avec l'intégration des logiciels de calcul formel qui, bien plus que d'autres, tendent à perturber les équilibres usuels de l'enseignement.

Quelles sont les potentialités réelles des logiciels de calcul formel pour l'enseignement des mathématiques, à tel ou tel niveau d'enseignement ? Quelles conditions favorisent la concrétisation de ces potentialités ? Quels obstacles au contraire s'y opposent, qu'ils soient de nature matérielle, logicielle, cognitive, didactique ou institutionnelle ? Sur toutes ces questions, nos connaissances sont encore très limitées et, pour progresser, il est sans doute indispensable de confronter l'analyse et la réflexion *a priori* sur les produits

(1) Cet article reprend un exposé fait à l'université d'été sur les systèmes de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques (Caen, août 1994).

logiciels de calcul formel et leurs potentialités pour l'enseignement à l'élaboration et l'analyse d'expérimentations et innovations réalisées effectivement avec ces produits.

C'est ce type de démarche que je voudrais illustrer dans cet exposé, en m'appuyant sur une recherche didactique en cours, menée au sein de l'équipe DIDIREM [(2)], en collaboration étroite avec le groupe de la DITEN cité plus haut. Je présenterai tout d'abord très brièvement le cadre de cette recherche. Ensuite, après avoir rappelé les potentialités des logiciels de calcul formel pour l'enseignement le plus souvent évoquées dans la littérature, j'essaierai de préciser quelques enseignements que nous pouvons tirer des observations de séances DERIVE effectuées dans le cadre de cette recherche. Ceci me conduira à souligner un certain nombre de points qui semblent mériter de la part des enseignants et formateurs d'enseignants, une vigilance particulière.

I. PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

La recherche menée est une recherche contractuelle en cours programmée sur 1993 et 1994. Elle a pour objet de contribuer à l'étude de l'impact de l'utilisation de logiciels de calcul formel et, plus particulièrement, de l'utilisation du logiciel DERIVE, sur les représentations et pratiques des élèves de l'enseignement secondaire.

Cette recherche croise deux types de méthodologies :

– une méthodologie qualifiée d'externe où, par voie de questionnaires (un questionnaire enseignant et un questionnaire élève), nous essayons de cerner la façon dont DERIVE est utilisé actuellement dans les classes de collège et lycée et les effets de cette utilisation sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves,

– une méthodologie qualifiée d'interne basée sur l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement impliquant l'utilisation du logiciel DERIVE.

Ces deux méthodologies sont complementaires : la première nous permet d'embrasser de façon large l'utilisation actuelle de DERIVE dans l'enseignement secondaire. Mais nous sommes bien conscients que nous n'atteignons, via les questions posées, que les rationalisations *a posteriori* des acteurs de cette utilisation et que de nombreux biais entâchent nécessairement ce type de méthodologie. La seconde nous permet une approche beaucoup plus fine de cette utilisation mais elle a l'inconvénient de rester excessivement locale. Par la conjugaison des deux approches : externe et interne, par l'analyse croisée des informations que chacune d'elles nous apporte, nous pensons compenser, au moins partiellement, les limites inhérentes à chacune d'elles.

Les questionnaires ont été soumis à une quarantaine de professeurs volontaires répartis dans toute la France et à leurs élèves.

Les observations sont menées dans les classes de membres du groupe "Calcul Formel" de la DITEN. Ces membres proposent des séquences d'enseignement qui, à leur avis, sont susceptibles de mettre en

(2) Cette recherche est menée par Maha Abboud-Blanchard, J.-P. Drouhard, J.-B. Lagrange et moi-même.

évidence l'intérêt de l'utilisation du logiciel DERIVE pour l'enseignement des mathématiques. Nous n'intervenons pas en principe dans la conception de ces situations qui nous sont proposées par des enseignants "experts" de l'utilisation de DERIVE. En revanche, nous demandons aux enseignants de nous fournir une analyse *a priori* de la séquence projetée, sur la base d'un questionnaire qui a été mis au point et négocié avec le groupe (*cf.* annexe 1). C'est à cette analyse *a priori* et aux hypothèses qui y sont faites concernant l'utilisation de DERIVE, que sont confrontées, dans une démarche didactique classique, les observations réalisées.

Dans le cadre de la recherche, une dizaine d'observations ont été réalisées, de la troisième à la terminale.

Nous voudrions souligner, pour conclure cette brève présentation, l'intérêt tout particulier que nous voyons au travail avec des experts :

– d'une part, il nous semble important de mettre à jour une expertise que les experts eux-mêmes ont souvent du mal à expliciter pour faciliter sa transmissibilité en formation, important aussi d'attirer l'attention des formateurs sur le degré d'expertise que peut requérir la gestion efficace de telle ou telle situation.

– d'autre part, les difficultés rencontrées par les experts eux-mêmes, les décalages existants entre leurs attentes et la réalité du fonctionnement des classes, nous semblent des éléments particulièrement pertinents pour essayer de comprendre les obstacles à l'intégration et identifier des questions qui méritent une attention particulière de la part des chercheurs dans ce domaine.

II. LES POTENTIALITÉS *A PRIORI* DES LOGICIELS DE CALCUL FORMEL

La littérature concernant l'utilisation de logiciels de calcul formel dans l'enseignement attribue à ces logiciels un certain nombre de potentialités pour l'enseignement et l'apprentissage, la plupart d'entre elles n'étant d'ailleurs pas spécifiques de ce type précis de logiciel.

Ces potentialités concernent à la fois la nature des activités mathématiques que ces environnements logiciels permettent de proposer aux élèves, leur gestion dans l'enseignement, ainsi que, bien sûr, le fonctionnement cognitif des élèves.

Ainsi, le travail bibliographique systématique en cours dans le cadre de la recherche (*cf.* Artigue, Drouhard, Lagrange, 1993) tend à mettre en évidence que l'utilisation de logiciels comme DERIVE dans l'enseignement est présentée très fréquemment comme [3] :

– *Permettant de développer plus efficacement une approche expérimentale des mathématiques* avec ses phases d'exploration, d'émission et test de conjectures, de validation, au moins pragmatique, également. Cette affirmation est argumentée notamment en invoquant la facilité de prise en mains de l'environnement (tout particulié-

(3) L'ordre dans lequel sont citées ces potentialités ne renvoie pas à une hiérarchie d'apparition. Nous avons essayé de regrouper d'une part des potentialités se référant plutôt aux tâches et à leur gestion, d'autre part des potentialités renvoyant plutôt au fonctionnement cognitif de l'élève.

rement évoquée pour DERIVE), le coût fortement réduit des activités d'exploration si on compare aux environnements traditionnels ainsi que certaines caractéristiques de l'interaction élève/machine : rapidité, fréquence de l'interaction, exploitabilité des feed-back fournis par la machine en cas d'erreur...

– *Permettant d'aborder des problèmes plus riches, plus intéressants, moins strictement scolaires que ceux rencontrés usuellement*, du fait des aides diverses à la résolution (numériques, algébriques, graphiques) fournies par le logiciel. Beaucoup des publications consacrées à DERIVE ont d'ailleurs, jusqu'à ces derniers temps, consisté essentiellement en illustrations de cette thèse par propositions de telles activités.

– *Permettant une meilleure convivialité de l'enseignement et une meilleure adaptation de celui-ci aux particularités du fonctionnement de chaque élève*. Cet aspect est classiquement argumenté en invoquant les caractéristiques de la communication élève / machine et en les comparant à celles de la communication élève / enseignant. On insiste aussi en général sur le fait que l'erreur prend, dans ces environnements, un statut moins pénalisant et que, l'enseignant, déchargé par la machine d'un certain nombre de médiations et évaluations, est à la fois plus disponible pour faire face aux problèmes nécessitant réellement son intervention et perçu davantage comme une personne ressource et un partenaire dans la résolution des tâches proposées.

Il est clair que ces différentes potentialités sont généralement perçues comme induisant un accroissement de la motivation des élèves pour la discipline et une activité accrue de ces derniers [4].

L'utilisation de logiciels comme DERIVE est aussi présentée, sur un plan plus cognitif, comme :

– *Permettant de compenser jusqu'à un certain point les difficultés mathématiques rencontrées par certains élèves et leur permettant de continuer à apprendre sans être sans cesse arrêtés par les mêmes obstacles*. En ce qui concerne des logiciels comme DERIVE, on invoque tout particulièrement la possibilité de compenser des difficultés dans le domaine du calcul numérique et dans celui de l'algèbre élémentaire [5].

– *Favorisant, en libérant l'élève des calculs et des opérations de tracé graphique, en un mot du travail technique, un fonctionnement plus réflexif, plus stratégique, plus conceptuel*, et, par voie de conséquence, la compréhension, le sens, le contrôle plus que l'acquisition de simples capacités d'exécution technique. Ce point est sans aucun doute l'un des plus fréquem-

(4) La littérature oppose ainsi souvent de façon simpliste les situations d'enseignement traditionnelles où l'élève est passif, toute l'activité étant réservée à l'enseignant qui transmet ses mathématiques aux situations d'enseignement en environnement informatique (ou calculatrice) où c'est l'élève qui est actif et l'enseignant presque passif.

(5) L'exposé de B. Kutzler à l'université d'été de Caen, à paraître dans les actes de cette université d'été, montre l'intégration de cette perspective dans une théorie d'apprentissage avec DERIVE basée sur la notion d'échafaudage (scaffolding). L'apprentissage des mathématiques y est comparé (en première approximation) à la construction d'un édifice, par blocs successifs : numérique, algébrique ... et DERIVE présenté comme un moyen de commencer la construction de l'étage supérieur alors même que l'étage inférieur n'est que partiellement édifié.

ment cités et associé, en général, à une critique de l'enseignement usuel, présenté comme centré sur l'acquisition de pures compétences techniques. Des logiciels comme DERIVE sont alors vus comme les vecteurs possibles de l'évolution souhaitée de l'enseignement.

– *Favorisant, par les possibilités de visualisation, le développement d'images mentales et, par voie de conséquence, la compréhension mathématique et également, par le fonctionnement conjoint permis dans les cadres numériques, algébriques et graphiques, une meilleure articulation de ces cadres dans le travail mathématique.* En ce qui concerne des logiciels comme DERIVE, l'impact supposé de la visualisation sur la compréhension est le plus souvent illustré en se référant à l'enseignement de l'analyse : notion de dérivée, approximations polynomiales, séries de Fourier... Pour ce qui est de l'interaction entre graphique et algébrique, les illustrations fournies concernent essentiellement l'étude des fonctions élémentaires (6).

– *Favorisant en algèbre le travail sur les aspects syntaxiques, la reconnaissance de formes, la généralisation, sur le statut des différents objets manipulés, en permettant de les faire vivre comme exigences du milieu et non comme exigence du seul contrat didactique.* Les aspects syntaxiques sont tout particulièrement mis en valeur dans l'utilisation de DERIVE au niveau des débuts de l'apprentissage de l'algèbre, au Collège ou en Seconde (7).

– *Contribuant à "mathématiser" les gestes de l'algèbre, en favorisant leur appréhension explicite et opérationnelle via des commandes ou successions de commandes logicielles.* Cet aspect là est encore une fois plutôt cité à propos des débuts des apprentissages algébriques, en particulier en ce qui concerne la résolution des équations et systèmes dont on sait que les gestes ont du mal à prendre et garder un réel statut mathématique pour les élèves.

– *Permettant de modifier le rapport des élèves aux nombres,* via *la possibilité d'effectuer des calculs exacts.* Sur un plan cognitif, cet aspect est notamment perçu comme susceptible de remettre en cause certaines conceptions erronées des nombres, induites ou renforcées par l'usage massif des calculatrices.

Toutes ces potentialités sont des potentialités théoriques. Dans la plupart des textes, elles sont illustrées par des exemples et analyses *a priori*, éventuellement appuyées par des récits succincts d'expérimentations en classe, mais elles sont en fait peu questionnées. On retire alors de la lecture l'impression que leur actualisation va plus ou moins de soi, qu'un enseignant suffisamment familier avec le logiciel concerné ne devrait pas rencontrer de difficulté particulière à les actualiser (surtout en ce qui concerne DERIVE, jugé particulièrement accessible). Pourtant, les recherches qui commencent à se développer, en particulier celles qui dépassent sur le plan méthodologique la seule comparaison

(6) Le mémoire de DEA de J.-F. Canet [Canet, 1994] concerne plus précisément cet aspect, l'analyse de l'interaction se faisant, sur le plan cognitif, en référence aux travaux sur les registres de représentation sémiotique développés par R. Duval et ses élèves [Duval, 1993].

(7) Pour cet aspect, on pourra consulter par exemple la partie consacrée au niveau collège de la brochure diffusée par la DITEN [Hirlimann, 1994].

groupe expérimental / groupe témoin, dont les limites et biais sont connus, tendent à montrer que, en ce qui concerne les logiciels de calcul formel comme en ce qui concerne les autres types de logiciels, les résultats obtenus ne sont pas toujours à la hauteur des attentes (*cf.* par exemple Monaghan, 1994).

Dans la suite de cet exposé, nous essayerons de tirer quelques pistes d'analyse et de réflexion pour l'enseignement et la formation des observations réalisées dans le cadre de notre recherche. Notre approche est didactique. Une séance de classe y est ainsi analysée comme un système mettant en jeu de façon interactive des élèves, un enseignant et des savoirs mathématiques, via les interactions des différents acteurs entre eux et avec un milieu, ici à composante informatique. On étudie la dynamique de ce système en la situant par rapport à des dynamiques possibles, envisagées *a priori*, compte-tenu des caractéristiques de la situation projetée, dans le but de comprendre comment s'organisent dans la situation réelle les rapports entre enseignement et apprentissage et ce qui les détermine, dans le but aussi de déterminer quel jeu sur les variables de commande de la situation permettrait en un sens d'optimiser ces rapports, compte-tenu des apprentissages visés. Enfin, plus synthétiquement, on cherche à dépasser le niveau des caractéristiques de chaque analyse particulière pour identifier des régularités plus transversales au fonctionnement des types de systèmes didactiques spécifiques étudiés. C'est à ce niveau plus synthétique que nous essayerons de nous situer dans la suite de l'exposé, tout en nous référant à des observations précises.

III. L'ACTUALISATION DES POTENTIALITÉS THÉORIQUES. QUELQUES PISTES D'ANALYSE

Nous articulerons cette partie autour de quelques points qui, comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous semblent des points clefs en ce qui concerne l'actualisation des potentialités théoriques. Pour la clarté de l'exposé, nous sommes tenus de les séparer mais il faut savoir que, dans le fonctionnement des situations, leurs actions s'imbriquent dans un jeu relativement complexe. Nous avons choisi ici de nous centrer sur les trois points suivants :

- fonctionnements technique, procédural, conceptuel,
- pratiques expérimentales,
- stratégies formelles de DERIVE, stratégies favorisées par l'utilisation de DERIVE et stratégies visées par l'enseignement.

Précisons que cette liste n'a rien d'exhaustif et ne prétend pas rendre compte de l'ensemble des directions de synthèse possibles mises en évidence dans la recherche [8].

(8) Dans la recherche, un certain nombre de lignes d'analyse globales ont été envisagées a priori, ce sont les suivantes (*cf.* le rapport intermédiaire [Artigue, Drouhard, Lagrange, 1994]) : problèmes liés à la connaissance du logiciel DERIVE, problèmes de concurrence entre DERIVE et les calculatrices, problèmes d'articulation de l'ergonomie de DERIVE et du fonctionnement papier / crayon, problèmes de centration sur la démarche et les aspects conceptuels, problèmes liés à la mise en place d'une démarche expérimentale et niveaux d'activité mathématique, problèmes liés au statut et à la manipulation des objets algébriques, expertise DERIVE du côté de l'enseignant.

III.1. Fonctionnements technique, procédural, conceptuel

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'utilisation de logiciels comme DERIVE est généralement vue comme favorisant le détachement de l'élève d'un rapport purement technique ou procédural aux mathématiques au profit d'un rapport plus réflexif, plus conceptuel.

DERIVE prenant en charge en effet, efficacement et rapidement les aspects calculatoires ou de tracé graphique du travail mathématique, d'une part l'élève a moins de chance, pense-t-on, de perdre le fil de la résolution en cours, d'autre part le travail qui lui est dévolu est nécessairement un travail qui relève non de l'exécution technique mais de l'organisation, du contrôle, de l'interprétation, un travail donc de nature réflexive, qui le mettant à distance de l'exécution de l'action, centre son activité, à un niveau supérieur, sur la conception et le contrôle de cette action.

La justification peut s'appuyer, à un autre niveau, sur les acquis de certaines recherches didactiques s'appuyant sur une théorie constructiviste de l'apprentissage comme celles initiées par A. Sfard et Ed Dubinsky, même si celles-ci ne portent pas directement sur l'apprentissage dans un environnement incluant des logiciels de calcul formel. Ces auteurs, en effet, centrent leurs travaux sur la dualité des concepts mathématiques - concepts qui peuvent être vus à la fois comme des processus et des objets (*cf.* par exemple Sfard, 1992 ; Dubinski, 1991) et ils ont mis en évidence que :

– pour de très nombreux concepts, les premières connaissances, celles issues de l'action, donnent d'abord naissance à des processus dynamiques, la capacité de concevoir ces processus comme des entités en soi, des objets statiques, engageables dans d'autres processus de niveau supérieur est une opération d'intériorisation et d'encapsulation qui est cognitivement complexe,

– un fonctionnement mathématique efficace suppose une bonne flexibilité entre ces deux aspects : processus et objet.

Dans la littérature se référant à ces cadres théoriques, l'utilisation d'environnements informatiques adaptés est vue comme un moyen de favoriser la conceptualisation en aidant la transition du processus à l'objet. Ed Dubinsky écrit par exemple dans l'article déjà cité :

"Il semble par exemple que si un étudiant implémente un processus sur un ordinateur, en utilisant un logiciel qui n'introduit pas de distractions au niveau de la programmation (comme une syntaxe complexe, des constructions non directement reliées à des idées mathématiques...), ceci favorise l'intériorisation du processus par l'étudiant. Si ce même processus, une fois implémenté, peut être traité par le logiciel comme un objet sur lequel des opérations peuvent être effectuées, ceci favorise l'encapsulation du processus en objet" [9]

Les logiciels de calcul formel permettent effectivement ce type de travail, même ceux comme DERIVE dont les possibilités de programmation sont limitées, et ils le permettent à propos de processus qui ne relèvent pas nécessairement du numérique

(9) Citation originale en anglais.

comme par exemple la résolution exacte d'équations et de sytèmes [10].

Que ressort-il des observations que nous avons menées à ce sujet ?

En fait, que les choses sont plus complexes que ce qui précède ne le laisse supposer. Il semblerait que l'on soit plutôt face à un système didactique soumis à des forces contradictoires :

- *la première favorisant comme indiqué un fonctionnement réflexif et conceptuel.*
- *la seconde favorisant au contraire une atomisation de la résolution en une multiplicité d'actions élémentaires,*

l'équilibre résultant entre ces forces contraires dependant a la fois des caractéristiques de la tâche mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.

Et certes, nous disposons de différents cas d'observation où le deroulement est conforme aux hypothèses faites ci-dessus mais ceci n'a rien de systématique.

(10) On peut aussi, comme Monaghan dans l'article cité plus haut se référer à la notion de procept introduite par D. Tall [Gray et Tall, 1993]. Un procept est un objet mental associant un processus, un concept produit par ce processus, au sens précédent, et un symbole qui peut être utilisé pour dénoter aussi bien le processus que le concept ; par exemple $2x + 5y^2$ est une expression symbolique qui peut être aussi bien pensée comme un processus de calcul que comme une entité algébrique substituable à une autre entité dans un calcul. Monaghan fait l'hypothèse que DERIVE, en prenant en charge la mise en œuvre du processus, peut aider les étudiants à se concentrer sur la composante "objet" ou "produit" du procept dans de nombreux cas (calcul algébrique, résolution de sytèmes, calcul matriciel, intégration...). Il souligne néanmoins que l'on manque pour l'instant de théorie pour penser les relations entre procepts et travail avec des logiciels de calcul symbolique.

L'exemple que nous avons choisi pour illustrer ce paragraphe est une des premières observations réalisées. Elle a eu lieu en 1992-93, en classe de seconde. Les élèves avaient, à une séance précédente avec DERIVE, résolu diverses équations, construit une formule générale de résolution de l'équation $ax + b = 0$ puis testé la formule sur un certain nombre d'exemples. La tâche qui leur était proposée pour la séance observée consistait à généraliser cette recherche de formule générale à un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Il s'agissait, à travers cette activité, de les amener à développer un travail réflexif par rapport aux processus particuliers de résolution numérique déjà mis en œuvre en troisième.

Les hypothèses faites dans l'analyse *a priori* de la séance sur le rôle potentiel de DERIVE sont tout à fait conformes à ce qui a été énoncé précédemment, puisque ce sont notamment les suivantes (*cf.* le rapport intermédiaire de la recherche déjà cité) :

"a) DERIVE, en libérant l'élève de l'exécution des calculs, peut l'aider à se centrer sur les processus de résolution en jeu, à ne pas perdre le fil de la démarche suivie et à développer l'attitude réflexive souhaitée.

b) D'autre part, l'explicitation nécessaire des étapes de la résolution via des commandes DERIVE comme Resol, Substitute, peut conduire les élèves à expliciter certains gestes implicites de la résolution et à leur donner davantage un statut opératoire. Les explicitations demandées dans l'utilisation de ces commandes vont également obliger à distinguer inconnues et paramètres, à réaliser qu'une équation peut être résolue par rapport à plusieurs inconnues et non uniquement par rapport à x.

L'enseignant fait l'hypothèse que ces deux caractéristiques du fonctionnement avec DERIVE devraient permettre d'empêcher ou au moins de limiter les comportements de cercle vicieux auxquels on peut légitimement s'attendre (résoudre en x, puis en y, puis en x...) et aider à gérer la résolution.

c) On fait aussi l'hypothèse que cette situation, par son caractère relativement formel, est une situation qui aurait du mal à vivre dans un environnement papier / crayon usuel mais qu'en revanche, dans l'environnement DERIVE, la question de l'élaboration de processus généraux de résolution généralisant ceux déjà existant du fait des commandes, semblera aux élèves un enjeu plus naturel.
d) De plus il s'agit d'une situation complexe, où les élèves ont à manipuler des écritures algébriques comportant 8 lettres distinctes et l'on peut penser que beaucoup d'élèves auraient du mal à mener à bien les calculs sans l'aide de DERIVE.

e) L'existence de feed back immédiats, dans une situation considérée *a priori* comme difficile, est considérée également comme un atout de DERIVE. Néanmoins, le contrôle exercé par DERIVE reste ici partiel. Excepté si les élèves prennent la peine de vérifier leurs formules par substitution dans les équations – et ceci semble peu probable – DERIVE ne "dira" pas si les formules trouvées sont ou non correctes."

Que ressort-il des observations ?

Les élèves s'investissent dans le problème posé (la dévolution ne posera aucun problème) et, en dépit des difficultés rencontrées, personne ne renoncera. Les difficultés purement informatiques rencontrées sont marginales. Mais, s'il y a activité indéniable des élèves, s'il n'y a pas blocage informatique, les hypothèses de l'analyse *a priori* n'en paraissent pas moins *a posteriori* très "optimistes".

Le problème posé est pour tous les élèves un vrai problème pour lequel ils ne disposent pas de stratégie de résolution dès le départ. Certains mêmes ne disposent pas de stratégie fiable de résolution d'un système numérique. On voit alors apparaître divers phénomènes favorisés par l'économie du milieu DERIVE et qui tendent à s'opposer à la mise en place des fonctionnements attendus : le faible coût des essais DERIVE incite, en l'absence de stratégie, à multiplier les essais en espérant que quelque chose de positif puisse en sortir. Il s'agit là d'un phénomène que nous avons dénommé "pêche" et qui, contrairement à ce que l'on pourrait penser, peut avoir une productivité raisonnable dans cet environnement. Ce faible coût des essais associé à la multiplicité des actions *a priori* possible fait aussi, et ce sera confirmé dans les observations ultérieures, que pour beaucoup d'élèves, la pression à interpréter les feed back est trop faible vis à vis du coût cognitif de cette interprétation. Ils préfèrent dans ces conditions simplement enregistrer la validation négative et essayer autre chose. Il s'ensuit pour certains groupes, un parcours erratique, qui finit par aboutir, suite aux interventions de l'enseignant ou à la diffusion des productions de groupes voisins, sans que l'on ait à aucun moment l'impression que s'est mise en place la distanciation attendue.

La centration sur la démarche peut être

aussi perturbée par divers autres facteurs :

- une confiance insuffisante dans les productions DERIVE, qui conduit à se perdre dans des vérifications annexes,
- de simples erreurs de frappe non repérées qui conduisent à des résultats bizarres, ceci étant d'autant plus pénalisant que l'élève ne maitrise justement pas suffisamment le processus de résolution pour différencier les différents types de productions non conformes à ses attentes,
- des erreurs plus mathématiques liées au non respect de la syntaxe DERIVE, en particulier dans cette situation, de nombreuses erreurs de parenthésage, ou des erreurs dans la compréhension du fonctionnement de la procédure RESOL au niveau des variables (entrée de valeurs constantes par exemple !). Il est clair qu'une meilleure appropriation du logiciel, notamment au niveau des commandes de recopie et de substitution aurait pu limiter la fréquence des parasitages dus à ces erreurs, en évitant un certain nombre de réécritures.

Le résumé d'observation cité en annexe 2 illustre un certain nombre de ces phénomènes.

De plus, si s'est mis en place à la fin de la séance, un schème de résolution des systèmes bien adapté au fonctionnement DERIVE, comme le suivant [11] :

- résoudre les deux équations en x,
- égaler les expressions trouvées
- résoudre en y,
- recommencer en inversant les rôles de x et y,

il est difficile de savoir quel ancrage conceptuel fonde ce schème. Les difficultés rencontrées par plusieurs groupes, en particulier ceux qui ne parviennent pas à sortir seuls du cercle vicieux de la double résolution en x et en y, ou qui ayant obtenu y par ce même processus, ne savent plus quoi faire pour obtenir x, laissent penser que pour ces élèves, résoudre une équation c'est, simplement, au bout d'un certain nombre de manipulations codifiées, arriver à x = ... On peut penser que le travail mené avec DERIVE dans cette séance, tout en produisant un nouveau schème, n'a pu que renforcer cette vision [12].

En revanche, l'analyse des observations met en évidence, dans certains groupes, un rôle tout à fait positif de l'utilisation de DERIVE. C'est par exemple le cas pour un groupe, qui dispose d'une stratégie numérique par combinaisons linéaires mais qui, lorsqu'il s'agit de la généraliser, revient à de simples différences d'équations inefficaces. L'enseignant conseille alors aux deux élèves de commencer par traduire en DERIVE leur résolution numérique. Cette traduction, qui ne va visiblement pas de soi mais que le groupe parvient à mener à bien de façon autonome, va provoquer spectaculairement la distanciation souhaitée. Ensuite, la généralisation demandée sera

(11) On notera que ce schème, particulièrement économique en commandes DERIVE, n'obligeant pas à aller chercher et à savoir manipuler la commande cachée de substitution, ne correspond précisément à aucune des deux méthodes classiquement enseignées : substitution, combinaison linéaire.

(12) Soulignons qu'un travail complémentaire articulant résolution algébrique et graphique, ou développant une approche fonctionnelle de la résolution d'équations pour dépasser ces aspects purement formels est tout à fait possible dans l'environnement DERIVE.

conçue comme une adaptation facile du travail déjà réalisé. On y verra d'ailleurs les deux élèves fonctionner d'abord en papier / crayon et ne passer en DERIVE que lorsqu'elles se retrouveront bloquées par la complexité formelle de l'équation : $y(eb - fa) = ce - ga$ obtenue en éliminant x par combinaison linéaire. Elles reproduiront la même démarche mixte pour trouver x.

Soulignons que le phénomène observé ici : changement qualitatif permis par la simulation DERIVE d'un processus "connu dans l'action" est tout en fait en accord avec la citation de Dubinsky reproduite plus haut.

Cet exemple, brièvement évoqué, attire nous semble-t-il la vigilance sur deux points précis, qui dépassent largement son seul cadre :

– Quand on déclare qu'en prenant en charge les aspects techniques, l'utilisation de DERIVE décharge l'esprit pour le conceptuel, on considère implicitement que ce fonctionnement conceptuel peut exister indépendamment de l'entrée effective jusqu'à un certain point dans le détail du travail technique. C'est sans doute vrai pour celui qui travaille avec des objets anciens et bien maîtrisés, mais en phase de conceptualisation, l'indépendance des deux niveaux n'a pas de raison d'être : des situations qui prennent en charge complètement le travail technique ou rendent complètement invisibles les aspects procéduraux, risquent de se constituer au contraire en obstacle à la conceptualisation voulue, voire aboutir à la construction de ce que l'on pourrait appeler des pseudo-objets : nommés, étiquetés mais dépourvus de toute la flexibilité nécessaire avec les niveaux procéduraux qui les sous-tendent. Sur ce plan, on voit bien que le travail avec DERIVE, s'il n'est pas soigneusement pensé et adapté aux élèves, peut entretenir l'illusion que les élèves se situent à un niveau de conceptualisation bien plus élevé que leur niveau réel, simplement parce qu'ils utilisent des commandes qui globalisent des processus complexes.

Quand DERIVE est utilisé, non pas comme assistant technique dans un travail mettant en jeu des objets et techniques familiers, mais comme outil permettant d'introduire des notions nouvelles et de favoriser certaines conceptualisations, il importe d'être attentif à ces questions, de ne pas utiliser nécessairement toute la puissance de DERIVE, pour permettre de faire vivre au niveau nécessaire les processus qui sous-tendent la conceptualisation [13].

– On voit également dans cette situation que si, pour certains élèves, le coût cognitif d'un fonctionnement réflexif et stratégique est ressenti comme élevé, l'économie du fonctionnement avec DERIVE permet divers échappatoires à l'entrée dans un tel fonctionnement, des échappatoires qui ne sont pas nécessairement d'ailleurs moins productifs (si l'on se limite à des critères de réussite externe), compte-tenu des difficultés rencontrées par ces élèves, qu'un engagement dans les fonctionnements attendus. Soulignons que s'ils sont d'une productivité raisonnable, ils en seront d'autant renforcés [14] !

(13) Cette stratégie est plus ou moins explicitement à l'œuvre dans un des exemples utilisés par B. Kutzler dans son exposé déjà cité pour présenter la théorie d'apprentissage par échafaudage : celui justement de l'apprentissage avec DERIVE de la résolution d'équations.

(14) En fait, il serait sans doute vain de vouloir réduire à tout prix ce type de fonctionnement : nous-mêmes n'y échappons pas quand nous avons recours à de tels environnements. Ce serait vouloir nier les caractéristiques de l'économie de tels environnements et les spécificités des processus d'adaptation qui s'y développent.

Il semble donc nécessaire, quand on élabore des situations avec DERIVE, de prendre en compte ces caractéristiques pour trouver un équilibre adéquat entre les tendances antagonistes qui seront nécessairement en jeu et, de plus, jouent différemment d'un élève à l'autre.

Mentionnons pour terminer ce paragraphe que le groupe a conçu en 1993-94 une nouvelle situation concernant la résolution de systèmes linéaires, en classe de troisième cette fois, où les rapports entre technique et conceptuel, la prise en compte de l'économie spécifique de DERIVE, devraient permettre pour la grande majorité des élèves, une bien meilleure actualisation des hypothèses faites concernant l'apport de DERIVE.

III.2. Une approche expérimentale des mathématiques

Les idées qui seront développées dans ce paragraphe sont loin de ne concerner que l'environnement DERIVE, elles jouent simplement dans cet environnement comme dans beaucoup d'autres environnements logiciels ouverts.

Comme nous l'avons précédemment mentionné, l'utilisation de logiciels comme DERIVE est généralement présentée comme un moyen de faire plus aisément vivre dans l'enseignement des mathématiques, une approche expérimentale de ces dernières, faite d'explorations possibles car peu coûteuses, d'émission de conjectures, de test de ces conjectures... Pour des logiciels comme DERIVE, la possibilité offerte de combiner des traitements numériques (en calcul exact ou approché), algébriques et graphiques en dimension 2 ou 3, contribue bien sûr à renforcer ces potentialités.

Que nous apprennent les observations effectuées à ce niveau ?

Encore une fois que ces potentialités sont réelles mais que leur actualisation requiert un minimum de vigilance.

Un exemple d'observation me servira à introduire la réflexion sur ce point. Elle se situe en troisième avec des élèves qui ont vu les identités remarquables. Intitulée "Carrés de sommes" et déjà présente sous une forme très voisine dans la brochure diffusée par le Ministère déjà citée, elle a pour objectif de contribuer à la prise de sens de ces identités en les situant dans le contexte plus large des carrés de sommes de plus de deux termes. DERIVE a dans cette situation un double rôle :

- celui de permettre l'exploration, la formulation de conjectures de généralisation des identités remarquables, dans un fonctionnement de type "boîte noire", en fournissant des résultats de développements de carrés,
- celui aussi à d'autres moments d'instrument de validation des productions des élèves.

Pour cette séance, les élèves travaillent par groupes de 2, de façon autonome, en suivant une fiche de travail (*cf.* annexe 3).

La première phase (Développements) est une phase d'entrée dans le problème où DERIVE fonctionne comme boîte noire. L'attention de l'élève est portée, *via* le tableau 1, sur le nombre de termes des différents développements et leur structure, dans le but de faciliter le travail de généralisation qui sera demandé. Dans la partie qui suit, une anticipation est demandée aux élèves et DERIVE prend le rôle d'outil de contrôle et validation. La première expression proposée correspond au type déjà rencontré dans la phase 1, les deux autres introduisent le problème des coefficients. On attend ici bien sûr des erreurs mais on fait l'hypothèse que les feed-back obtenus vont permettre à l'élève, via la remise en cause des procédures erronées de généralisation, de s'interroger sur le sens des coefficients numériques obtenus et d'engager le travail d'approfondissement visé. Les troisième et quatrième phases introduisent les signes – et sont gérées sur le même principe que les phases 1 et 2. Un dernier exercice, ensuite, intitulé : "Pour aller plus loin" demande de réinvestir ce qui a été fait précédemment pour compléter des identités à trous. Les élèves qui terminent la fiche avant la fin de l'heure se voient proposer le problème suivant : trouver le nombre de termes de $(a + b + ... + z)^2$.

Globalement, cette séance, expérimentée dans deux classes, l'une forte, l'autre faible, fonctionnera comme prévu, avec les bons élèves, qui s'engageront dans le jeu expérimental proposé et sauront en tirer parti. L'attitude de beaucoup d'élèves faibles sera sensiblement différente. Il semble bien qu'ils aient ici conçu leur contrat d'élève comme consistant à fournir des réponses aux questions successivement posées, sans rentrer nécessairement dans un questionnement quelconque. Par exemple, le travail d'anticipation demandé dans les phases 2 et 4, qui conduit à des réponses erronées (oubli de termes, non prise en compte satisfaisante des coefficients 2 et 3, au niveau des termes carrés ou des termes rectangles), n'induit en rien un questionnement. Soit ils suivent scrupuleusement les consignes données, notent développements et factorisations, constatent que c'est faux et passent à la suite, soit, ayant constaté l'erreur et ne voulant pas écrire quelque chose de faux sur la fiche de réponse, ils demandent à DERIVE les développements des carrés donnés et corrigent leurs réponses en conséquence, sans nécessairement se poser plus de questions.

En fait, ce comportement est sans aucun doute renforcé par un facteur essentiel à l'engagement dans le travail expérimental et qui n'a pas été suffisamment pris en compte : l'exploitabilité des feed back recueillis. En effet, si l'on factorise un développement erroné, par exemple : $2a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc$, en utilisant DERIVE, on obtient la réponse suivante : $2a^2 + 4a(b + c) + (b + c)^2$, qui constitue une validation négative mais ne donne pas d'éléments directs pour rectifier l' erreur commise.

La demande d'anticipation est sans aucun doute essentielle à l'engagement d'un travail expérimental où l'avancée se joue par preuves (DERIVE étant ici instrument de preuve) et réfutations. Mais pour que le jeu des preuves et réfutations puisse vivre de façon productive, dans ces conditions scolaires, il faut de plus que les feed-back reçus de la machine soient suffisamment chargés d'information pour l'élève pour permettre une avancée relativement rapide. L'activité de la phase 2, certes s'inscrit dans une demande d'anticipation mais d'une part, la façon dont elle est présentée n'oblige pas l'élève à s'engager dans le jeu voulu (et ce d'autant plus que les expressions sont envisagées simultanément et non l'une après l'autre), d'autre part, elle ne fournit pas à l'élève, en cas d'erreur, des feed-back suffisamment exploitables.

Il est intéressant de ce point de vue de comparer cette phase du travail au dernier exercice, où l'on ne pourrait voir *a priori* qu'une variante des activités précédentes. Pourtant, elle en diffère par un certain nombre de variables qui vont en faire une tâche beaucoup mieux adaptée. En effet, si l'on peut procéder par ajustements successifs, l'existence de trous des deux côtés de l'égalité, rend plus difficile le détournement de la tâche constaté plus haut. Le fait qu'un certain nombre de facteurs du développement soient déjà fournis limite par ailleurs les risques d'erreur par oubli et en même temps induit l'élève à tirer des informations de ces données. Enfin, s'il propose une solution sous forme de carré, et demande son développement à DERIVE (démarche normale ici), l'élève reçoit des feedback bien plus exploitables que ceux reçus dans une démarche inverse de factorisation.

Et, effectivement, les observations menées montrent que ces modifications de variables sont suffisantes pour induire, de la part de la quasi-totalité des élèves, cette fois, les comportements attendus.

Cet exemple, encore une fois brièvement évoqué, attire la vigilance, nous semble-t-il, sur un certain nombre de points :

a) Dans la conception de situations visant un travail de type expérimental en mathématiques, en tant qu'enseignants, nous avons généralement tendance à considérer nos élèves comme de "purs sujets mathématiques", en d'autres termes, à les imaginer prêts à rentrer, comme nous, dans le jeu que nous leur proposons, même si l'entrée dans ce jeu est faiblement contrainte par les variables de la situation. En ce sens, les situations construites peuvent se révéler adéquates uniquement à une frange d'élèves culturellement adaptés, les autres parvenant à jouer leur rôle d'élève sans s'engager dans le type de travail demandé.

b) La démarche expérimentale ne se réduit pas à des explorations suivies de constatations et remarques. On sait bien que, souvent, les activités préconisées par les programmes actuels, en particulier les activités introductrices, sont gérées dans les classes, pour des raisons diverses que nous ne pouvons analyser ici, sous cette forme pseudo-expérimentale. Et il est clair que le travail en environnement informatique ne peut qu'être influencé par ces tendances dominantes et ce, même s'il offre pour développer des activités réellement expérimentales, comme on le voit ici, des potentialités que n'offrent pas les environnements usuels. Il importe donc d'être particulièrement attentif à l'analyse des tâches proposées du point de vue de l'élève, dans la conception de telles activités :

– Où se situe réellement l'approche expérimentale ? Est-elle réellement dévolue à l'élève ou réside-t-elle essentiellement dans le travail de conception de l'enseignant, qui a complètement planifié et organisé cette démarche, ne laissant à l'élève qu'un travail d'exécution ?
– Aide-t-on suffisamment l'élève à s'engager dans la situation de façon réellement expérimentale ? L'engage-t-on en particulier dans des tâches d'anticipation comme c'est le cas ici, ou se limite-t-on à demander des remarques, constatations, qui le plus souvent renforcent un fonctionnement "au contrat didactique" (l'élève cherche à deviner ce qu'attend l'enseignant) loin de ce qui est prétendument visé ? Lui fournit-on enfin les moyens de réguler son travail expérimental, notamment via les moyens de validation, de contrôle et les feed-back fournis par l'environnement informatique ?

Il importe en particulier d'être attentif au fait que le fonctionnement avec fiche de travail élève, souvent privilégié dans les environnements informatiques, n'aide pas nécessairement à la dévolution à l'élève d'une activité expérimentale qui, par essence, doit comporter une certaine souplesse et autoriser une part d'initiative de l'acteur de cette démarche.

c) Enfin, développer une démarche expérimentale n'est pas un but en soi en mathématiques. C'est une forme de travail, parmi d'autres, au service de la construction de connaissances. On ne peut donc faire l'économie de se demander ce que l'on peut attendre en termes de connaissances du travail expérimental effectué par les élèves, en admettant qu'il s'effectue conformément aux attentes, et comment ce travail va s'insérer dans la progression de l'enseignement.

Il est clair que les activités correspondant à la séance décrite ici sont des activités qui se situent dans *une démarche d'action*. Même s'il s'agit d'une action réfléchie, supportée par des raisonnements, l'adaptation de l'élève est une adaptation en termes d'action. Il va percevoir des régularités, trouver des règles de fonctionnement, les valider pragmatiquement à l'aide de DERIVE, mais rien ne l'oblige dans cette adaptation à chercher les raisons de ces règles et à les relier explicitement aux propriétés de distributivité en jeu dans les calculs algébriques, par exemple. Les recherches menées en environnement informatique, de manière générale, mettent bien en évidence, la force prise par ces adaptations (favorisées par les caractéristiques de ces environnements, notamment au niveau de la manipulation des objets mathématiques en jeu et des interactions élève / tâche) ainsi que leurs limites [15].

Ainsi, dans le cas présent, on peut faire l'hypothèse que le travail fourni sera sans grand effet, si au delà de la réussite en termes d'actions, des validations pragmatiques offertes par DERIVE, il ne se prolonge pas à un autre niveau : celui des raisons et des preuves, même partielles, hors DERIVE.

Même si nous ne l'avons pas mentionné en présentant la situation, il va de soi qu'un tel travail a été mené ici avec les élèves, au cours de la séance suivante. Si nous insistons cependant sur ce point, c'est parce que, souvent dans la littérature concernant DERIVE, et en particulier les situations de recherche pour les élèves qui y sont présentées, cet aspect nécessaire du travail mathématique, qui ne se situe pas nécessairement en continuité directe avec les phases de travail expérimental où DERIVE joue le rôle d'outil de validation, est en quelque sorte oublié, l'accent étant mis sur la découverte assistée par DERIVE et fort peu sur les questions liées au statut de

(15) La thèse d'A. Dagher [Dagher, 1993] par exemple montre, dans le cas d'articulation entre représentations algébriques et graphiques de fonctions polynômes du second degré, comment les caractéristiques du logiciel utilisé induisent la construction perceptive de schèmes efficaces pour l'environnement, mettant en jeu l'interprétation algébrique de l'ouverture d'une parabole, sans que ces schèmes soient nécessairement ancrées sur des invariants cognitifs permettant dans un environnement papier / crayon de réussir la tâche suivante : plusieurs paraboles Pi d'équation $a_i x^2 + b_i x + c_i$ étant tracées dans un même repère, ordonner les coefficients a_i correspondants. On trouvera un exemple voisin dans l'exposé de L. Trouche à l'université d'été de Caen qui montre par ailleurs que, même lorsque des raisons sont demandées, certains élèves peuvent se satisfaire de la conciliation d'arguments mathématiquement incohérents.

ces découvertes en termes de connaissance mathématique, questions pourtant essentielles.

III.3. Stratégies formelles de DERIVE, stratégies favorisées par DERIVE et stratégies visées par l'enseignement

Nous voudrions aborder dans ce paragraphe deux points qui nous semblent maintenant d'autant plus importants qu'ils ne faisaient pas partie des directions d'analyse définies au début de la recherche et qu'ils se sont imposés à nous progressivement, au fil des expérimentations : d'une part, celui des spécificités du fonctionnement formel de DERIVE et des problèmes éventuels posés par son opacité pour l'utilisateur, d'autre part, celui des techniques et stratégies de résolution favorisées par l'utilisation de DERIVE et des décalages existant éventuellement entre ces dernières et celles dont le développement est visé par l'enseignement au niveau considéré. Nous traiterons simultanément ces deux points car l'analyse est ici, pour ce qui est des situations observées, tout particulièrement imbriquée.

Comme précédemment, nous introduirons la réflexion sur ce thème en nous référant à des observations, ici deux observations.

Observation 1 :

Cette observation a été effectuée en classe de première S à l'issue de l'enseignement sur les polynômes. Il s'agit d'une situation présentée de façon très ouverte, dans laquelle on attend que les élèves réinvestissent leurs acquis dans ce domaine. Elle a également, selon l'analyse *a priori* de l'enseignant, un objectif heuristique et devrait aider les élèves à développer des attitudes de recherche. Elle s'inspire d'une situation déjà présente dans la première brochure déjà citée élaborée par le groupe.

Le problème posé est le suivant : il s'agit de trouver des factorisations de $X^n - 1$. Le problème pourrait *a priori* être abordé sans DERIVE mais on ne peut en attendre alors grand chose à ce niveau d'enseignement hors les factorisations liées à l'existence des racines : 1 et, si n est pair : -1, obtenues par identification ou division par $(X - 1)$ et $(X^2 - 1)$ et, éventuellement, à la généralisation de l'identité remarquable :

$$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$$
à
$$X^{2n} - 1 = (X^n - 1)(X^n + 1)$$

DERIVE est sans aucun doute un outil indispensable ici pour ouvrir le champ des factorisations, susciter des conjectures variées et permettre de les tester économiquement ainsi que pour aider à mener à bien les calculs relativement complexes que l'élève peut avoir à envisager au fil de la recherche dans un comportement mixte : DERIVE - papier / crayon.

Cinq possibilités de factorisations sont offertes par DERIVE : trivial, sans carré, rationnel, radical et complexe. On peut penser que les élèves vont très vite se limiter aux factorisations rationnelles, les plus riches et parlantes à la fois, à leur niveau (si ce n'était pas le cas, rien n'empêche de le suggérer pour limiter le champ).

Mathématiquement, la question des factorisations rationnelles de $X^n - 1$ est réglée par les théorèmes concernant les polynômes cyclotomiques [16]. L'algorithmisation DERIVE passe, elle, par des factorisations intermédiaires dans Z/pZ (*cf.* la brochure DITEN déjà citée, pp. 33-37). Bien sûr, ces niveaux d'analyse ne sont pas accessibles aux élèves de première pour lesquels DERIVE va fonctionner comme une boite noire productrice de résultats divers dans lesquels il n'est pas évident de repérer des régularités. Mais, même si les stratégies de calcul formel utilisées par DERIVE ne peuvent que rester opaques aux élèves considérés, l'analyse de l'observation effectuée et du travail qui a prolongé cette séance montre qu'un travail de recherche intéressant peut se nouer ici et engager les élèves dans un travail de calcul et raisonnement sur les polynômes prolongeant utilement celui effectué dans des activités plus directement scolaires.

Signalons tout d'abord qu'au cours de l'observation vont apparaître deux représentations distinctes de la tâche : l'une consistant à produire des conjectures générales de factorisation en s'aidant de DERIVE, l'autre consistant à produire des conjectures sur les factorisations données par DERIVE. Ces deux tâches sont en fait fondamentalement différentes.

Les élèves qui se situent dans la première interprétation vont produire au cours de la séance une dizaine de conjectures, correctes ou erronées (les erreurs se situant le plus souvent au niveau de l'écriture indicielle (par exemple : $X^n - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^{n-2} + X^{n-4} + ... + X + 1)$ pour n pair) ou d'alternances de signes. La production de ces conjectures ne va pas de soi car elles ne correspondent justement pas aux factorisations données par DERIVE de façon générale. (*cf.* annexe 4) ; la factorisation par $(X - 1)$ par exemple n'est obtenue que pour n premier et la version correcte de la factorisation erronée ci-dessus que pour $n = 4$. Pour tester leurs conjectures, ces élèves sont donc obligés de combiner des termes pour effectuer des produits partiels, mentalement, par écrit ou en utilisant DERIVE (il faut souligner à ce sujet que l'impossibilité sous DERIVE de sélectionner simultanément plusieurs termes d'une expression ne facilite pas les manipulations). Ils peuvent aussi faire effectuer par DERIVE les divisions correspondantes et demander la simplification du résultat obtenu. Ceci les conduit à effectuer des raisonnements et des calculs mettant en jeu une gestion des polynômes plus souple et élaborée que celle usuellement nécessaire à ce niveau.

Les élèves (plus rares) qui se situent dans la deuxième interprétation ont, quant à eux, beaucoup plus de difficultés à produire des conjectures, comme on pouvait s'y attendre, les conjectures générales qu'ils cherchent se détruisant au fur et à mesure qu'elles sont testées sur des valeurs de n croissantes. On ne peut espérer à ce niveau que des conjectures partielles et on peut faire l'hypothèse que, même s'ils s'y résignent, les élèves vont rencontrer des difficultés certaines. En effet, les conjectures les plus aisées à obtenir concernent les factorisations de $X^n - 1$ pour n premier, n double de nombre premier ou n

(16) si $n > 1$, et si l'on désigne par P_n l'ensemble des racines primitives de l'unité (c'est à dire l'ensemble des $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tels que k et n soient premiers entre eux), le polynôme cyclotomique d'ordre n $\Phi_n(X)$ est défini comme le produit des polynômes $(X - \xi)$ pour ξ dans Pn. $\Phi_n(X)$ est dans Z[X] et irréductible dans Q[X] et $X^n - 1$ est le produit des $\Phi_d(X)$ pour d/n. D'où la factorisation rationnelle maximale de $X^n - 1$, qui est bien celle donnée par DERIVE.

puissance de 2. Le repérage et la formulation mettent ainsi en jeu des propriétés de divisibilité peu présentes dans les programmes actuels et ne correspondent donc pas à des modes de catégorisation des nombres familiers aux élèves. Les notes d'observation confirment ces difficultés tout en attestant la richesse du travail effectué sur les polynômes par ces élèves.

Bien sûr, *a posteriori*, il semble raisonnable de penser que l'on obtiendrait un fonctionnement plus satisfaisant en ne laissant pas vivre au début de la recherche cette interprétation de la tâche qui, même si elle induit un travail réel, est peu gratifiante pour les élèves. En revanche, après une synthèse liée au travail effectué avec la première interprétation, il pourrait être tout à fait intéressant de continuer à faire vivre la recherche en posant le problème de la prévision des productions DERIVE. Il ne s'agirait pas là uniquement d'établir des conjectures, pour les raisons indiquées plus haut, mais tout autant de trouver des méthodes de factorisation qui permettent d'engendrer certaines des factorisations DERIVE et de les justifier. Pour les 20 factorisations reproduites en annexe 4, c'est un travail qui ne met en jeu qu'un petit nombre de méthodes distinctes de celles déjà conjecturées (*cf.* annexe 4 pour un exemple).

Nous voudrions resouligner à cette occasion que le problème de recherche posé ici nous semble intéressant dans la mesure où il permet effectivement, avec l'aide de DERIVE, d'engager les élèves dans une activité de recherche productive, à leur niveau. La productivité de cette activité de recherche ne se mesure pas uniquement à l'aune des conjectures trouvées. Pour nous, elle se situe plus encore à la fois dans la mise en place d'une attitude de recherche avec toutes ses caractéristiques, et dans le type de travail mathématique engagé par les élèves dans cette activité, à la fois liée à la progression de l'enseignement dans la classe, permettant son réinvestissement et en même temps permettant de développer un mode d'appréhension des polynômes important mais peu nécessité par les activités usuelles de ce niveau. Ici encore, de plus, il nous semble essentiel de ne pas en rester au niveau de la découverte mais de prolonger la séance, comme cela a été fait dans l'expérimentation menée, par un travail de retour sur la phase de découverte assistée par DERIVE, visant à obtenir des validations qui s'affranchissent de la dépendance de DERIVE.. L'expérience menée tend à montrer que c'est ici tout à fait négociable (l'équivalence d'expressions algébriques de formes très différentes n'allant pas encore pour ces élèves de soi), à leur portée et que l'engagement du travail est facilité par la confrontation des différentes conjectures, certaines correctes, d'autres erronées [17].

Tout ceci nous conduit naturellement à un autre point. L'observation menée a été effectuée pendant une séance de classe ordinaire de 1h. Il est clair que cette durée ne permet que d'engager un travail de recherche conséquent. Un problème comme celui-ci, dont justement cette expérimentation pour limitée qu'elle soit, nous a aidés à prendre la mesure, nécessite pour vivre et dépasser le statut d'activité gadget, qu'on lui consacre du temps et ce,

(17) Ce qui précède ne signifie pas qu'il faille systématiquement bannir toute activité de recherche qui ne permettrait pas une validation complètement indépendante de DERIVE mais que cette question de la validation doit être sérieusement prise en compte dans le choix des situations et dans les scenarios didactiques élaborés à leur propos.

même si l'on dispose pour soutenir le travail, d'outils puissants comme DERIVE. Il est clair aussi que le temps effectif d'enseignement n'est pas extensible et que des choix s'imposent. On ne peut à la fois multiplier les activités de recherche et donner à chacune un temps suffisant pour la rendre significative et productrice. On ne peut non plus espérer qu'une activité de recherche conséquente soit entièrement intégrée au temps effectif d'enseignement. Il faut trouver les moyens de la faire vivre dans le travail privé des élèves, hors temps scolaire. Ceci pose bien sûr aussi le problème de l'accessibilité des outils nécessaires à la recherche, ici de DERIVE, hors temps d'enseignement officiel, loin d'être résolu à l'heure actuelle [18].

Dans l'exemple qui précède, DERIVE fonctionne comme une boîte noire dont les stratégies formelles sont inaccessibles mais où cette inaccessibilité en soi ne pose pas de problèmes spécifiques. En effet, les résultats obtenus sont fiables [19], des moyens de validation hors DERIVE sont de plus accessibles aux élèves, il est possible enfin, dans un nombre non négligeable de cas, de retrouver les productions DERIVE par des processus de factorisation élémentaires, à la portée des élèves (bien sûr différents de ceux employés par DERIVE), et ces caractéristiques suffisent pour engager et faire vivre une activité de recherche tout à fait consistante. Il est clair aussi que les méthodes favorisées par cette activité ne sont pas forcément celles qui sont particulièrement visées par l'enseignement à ce niveau, par exemple le théorème assurant que si a est racine du polynôme P(X) alors P(X) est factorisable par (X – a) : ce sont, l'observation le montre, des procédures d'identification plus formelles qui sont majoritairement en jeu ; mais le travail mathématique effectué n'en est pas moins intéressant et pertinent à ce niveau.

L'opacité des stratégies formelles de DERIVE comme les décalages pouvant exister entre les stratégies favorisées par DERIVE et ce qui est en jeu dans l'enseignement à un moment donné, ne sont pas pour autant sans poser problème de façon générale et nous voudrions pour illustrer ce point évoquer une autre observation, menée en terminale C.

Observation 2 :

La séance observée concernait l'étude de l'expression trigonométrique cosx + cos3x + cos5x, détermination d'écritures équivalentes, résolution de l'équation cosx + cos3x + cos5x = 0 et, pour les plus en avance, étude de la fonction associée à cette expression, les élèves pouvant au choix utiliser ou non DERIVE, pour les aider dans ce travail, mais devant fournir une solution rédigée "standard" de la résolution de l'équation. La séance était présentée comme une séance de révision en trigonométrie. Il s'agissait de revoir qu'une expression trigonométrique peut revêtir plusieurs formes, diversement adaptées à la résolution d'un problème donné, de revoir également la forme particulière de la multiplicité des solutions des équations

(18) L'exposé de G. Aldon, à l'université d'été de Caen, développe un exemple d'activité de recherche ayant accompagné pendant six mois la vie de cette même classe dans le cadre d'une expérimentation où les élèves disposaient de DERIVE en permanence sur quaderno.

(19) Comme l'a montré clairement G. Fortin dans son exposé à l'université d'été de Caen, cette fiabilité n'est garantie pour aucun logiciel actuel et l'opacité des algorithmes utilisés par DERIVE pour l'utilisateur ne permet pas de contrôler le travail avec DERIVE en vérifiant que les conditions de validité des algorithmes utilisés sont bien vérifiées dans tel ou tel cas précis.

trigonométriques. L'analyse *a priori* de la situation suggérait différents atouts possibles de l'utilisation de DERIVE dans cette situation, à la fois de nature algébrique et graphique : obtention aisée de formes diverses de l'expression donnée par utilisation des commandes algébriques usuelles en mode trigonométrique, constatation du fait que la résolution de l'équation avec DERIVE nécessite le choix d'une forme d'expression adaptée, aide dans des calculs intermédiaires pour les élèves choisissant de fonctionner essentiellement en papier / crayon avec le support du formulaire, réflexion sur la multiplicité des solutions favorisée par le fait que DERIVE donne plusieurs solutions mais ne les donne pas toutes [20] (que DERIVE soit utilisé pour produire les solutions ou à titre de vérification de résultats trouvés autrement), possibilité enfin de tracé graphique de la fonction associée permettant des conjectures sur les solutions de l'équation [21] et aide précieuse pour l'étude ultérieure de la fonction.

L'observation effectuée montrera que les élèves choisissant d'utiliser DERIVE seront plus perturbés qu'aidés par cette utilisation et ce, pour diverses raisons. Tout d'abord, le mode trigonométrique de DERIVE comporte différentes options (choix entre trois types de fonctionnement : automatique, développé, contracté, puis entre trois directions possibles : automatique, vers des sinus, vers des cosinus). Le croisement de ces deux choix donne 9 possibilités pour lesquelles les commandes *Simplifie, Développe, Factorise, Résolution* peuvent agir différemment. Ces différences ne sont pas systématiques, les termes qui caractérisent les options ne permettent pas aisément de faire des prévisions sur les choix les plus astucieux, enfin un nombre non négligeable de choix de commandes et d'options ne conduisent qu'à un changement de l'ordre des termes de l'expression donnée (*cf.* annexe 5). Dans ces conditions, l'élève est emporté dans un monde sans repères qui lui soient accessibles, voué à des phénomènes de "pêche" hasardeux. A ceci s'ajoute le fait qu'il existe une stratégie qui, en papier / crayon, est de loin la plus économique pour la résolution de l'équation et peut de ce fait apparaître ici comme la stratégie "naturelle" [22]. Elle consiste à transformer $\cos x + \cos 5x$ en $2\cos 3x \cos 2x$ ou $\cos 3x + \cos 5x$ en $2\cos x \cos 4x$, ce qui permet de factoriser l'expression initiale et de se ramener à la résolution de deux équations du type : $\cos nx = a$, et est accessible aux élèves à condition qu'ils s'affranchissent de la tendance naturelle à regrouper les deux premiers termes. Or cette factorisation est tout particulièrement difficile à obtenir avec DERIVE (*cf.* annexe 5). Elle le sera d'autant plus pour les élèves qu'ils attendent du logiciel qu'il leur transforme directement l'expression entière sous une forme adéquate.

(20) Il en donne 15 dans les modes permettant la résolution de l'équation globale et 3 pour chacune des 5 équations du type $\cos x = a$ associées à la factorisation maximale en cosinus de l'expression (*cf.* annexe 5)

(21) En effet, cette expression étant égale à $\sin(6x)/2\sin x$, le tracé graphique peut faire apparaître la régularité des solutions et même, par utilisation du curseur, permettre de les déduire à partir des valeurs numériques approchées données par le logiciel

(22) Elle est bien plus économique que les deux stratégies suivantes, elles aussi théoriquement accessibles en terminale C :
– transformer l'expression en polynôme en $\cos x$ (on obtient un polynôme de degré 5) et le factoriser (on peut mettre $\cos x$ en facteur et 1/2 et -1/2 sont des racines "évidentes"),
– passer en complexes, utiliser les formules d'Euler et la somme des termes d'une progression géométrique finie, pour se ramener à la forme quotient donnée plus haut

Ceux qui n'abandonneront pas DERIVE pour un travail en papier / crayon se retrouveront quand même finalement avec des expressions polynomiales de degré 5 en cosx que DERIVE sait factoriser et résoudre. Un problème interviendra alors par rapport à la rédaction finale demandée : comment restituer les étapes cachées du fonctionnement DERIVE pour montrer que l'expression initiale donnée est bien égale au polynôme de degré 5 obtenu ? Les élèves ne sauront pas utiliser astucieusement DERIVE pour piloter les calculs intermédiaires nécessaires et seront obligés en fait de revenir à leur formulaire et au travail intégral en papier / crayon. Beaucoup en fait ne s'y engageront pas où abandonneront en chemin pour rendre finalement une rédaction où expression et factorisation données par DERIVE seront admises.

Les observations faites laissent penser en revanche que, pour les élèves ayant utilisé DERIVE dans la résolution, l'interprétation des solutions fournies par DERIVE était bien susceptible de soulever des questions non triviales et de susciter un réel travail mathématique. Le contenu des fiches rendues à la fin de la séance montre néanmoins que ce travail n'a pas nécessairement abouti dans le sens souhaité. Les élèves se contentent souvent dans la fiche de mentionner deux solutions opposées par sous-équation élémentaire du type $\cos x = a$.

Enfin, en ce qui concerne les aides graphiques, très peu y auront recours pour cette phase de résolution d'équation (et aucun élève n'ira jusqu'à l'étude de la fonction). On constatera, dans ce cas encore une fois, la tendance majoritaire des élèves à abandonner DERIVE pour utiliser leur calculatrice graphique.

Ces deux exemples attirent nous semble-t-il notre vigilance d'enseignant sur deux points au moins :

– Sur les stratégies de calcul formel utilisées par DERIVE, sur les effets possibles de décalages entre ces stratégies et celles qui sont accessibles aux élèves ou que l'enseignement, à un niveau donné, veut mettre en place ainsi que sur l'opacité pour l'élève utilisateur des étapes intermédiaires des calculs. Décalages, opacité ne sont pas en eux-mêmes des éléments à mettre au passif de DERIVE, ce sont même, nous avons essayé de le montrer, des variables sur lesquelles on peut jouer pour susciter questionnement et activité mathématique des élèves. Mais d'une part ce jeu n'est pas toujours possible, l'exemple cité de la trigonométrie nous semble particulièrement percutant, d'autre part les observations montrent qu'il est trop complexe pour pouvoir être improvisé correctement, en temps réel, dans le feu de la gestion d'une situation. Sa prévision doit trouver sa place dans la conception même des situations.

– Sur le fait que nos élèves ne sont pas et ne peuvent pas, dans les conditions d'utilisation actuelles, devenir des spécialistes de DERIVE, même s'ils disposent de façon permanente de DERIVE pendant plusieurs mois comme c'était le cas dans les deux classes que nous avons évoquées dans ce paragraphe. De plus, ils ne disposent pas des références mathématiques qui nous aident à interpréter les productions de DERIVE, à piloter l'aide que nous lui demandons dans la résolution d'un problème donné, à trouver les moyens de faire apparaître des étapes intermédiaires cachées par DERIVE. Ceci apparaît de façon manifeste lors de la séance de trigonométrie, dans le désarroi des élèves face à l'inaction apparente de DERIVE dans la majorité des modes disponibles puis la difficulté rencontrée a exploiter DERIVE de façon pertinente par rapport aux exigences du contrat didactique : rendre, comme dans les conditions du baccalauréat, une résolution qui, même si elle est obtenue grâce à DERIVE, n'en manifeste pas la trace.

Dans la préparation d'une *séance* DERIVE et l'anticipation des comportements possibles des élèves, comme nous avons tendance à voir en l'élève un sujet mathématique, nous avons naturellement tendance à oublier à quel point cette double expertise mathématique et DERIVE sépare notre fonctionnement du sien, au niveau du pilotage de DERIVE, du contrôle et de l'interprétation de ses productions. La convivialité réelle de l'accès à DERIVE tend de plus à nous faire sous-estimer le rôle joué par l'expertise DERIVE dans telle ou telle résolution. Tout ceci contribue sans aucun doute de façon non négligeable à l'optimisme démesuré de la plupart des analyses *a priori* effectuées.

Une situation comme la situation trigonométrique nous en montre les effets possibles. Elle nous montre aussi que, pour favoriser un fonctionnement cohérent et réfléchi de l'élève, il peut s'avérer nécessaire de refermer l'espace de liberté trop grand de DERIVE, faute de voir, à l'inverse de ce que l'on souhaite, DERIVE induire des comportements de recherche où l'élève, face à un monde pour lui incontrôlable, fonctionne simplement au hasard.

III.4. En conclusion

Nous avons, dans cet article, privilégié quelques lignes directrices. Comme nous l'avons écrit plus haut, ce ne sont bien sûr pas les seules possibles, d'autres observateurs de ces mêmes situations, en auraient peut-être privilégié de tout autres. Les choix que nous avons effectués, plus ou moins consciemment, sont sans doute liés au rapport que nous entretenons nous même avec les logiciels de calcul formel et plus spécialement avec DERIVE. Notre rapport n'est pas celui d'une spécialiste du calcul formel, d'une spécialiste de ce type de logiciel mais un rapport de didacticienne. En ce sens, notre attention, dans l'observation d'une séance d'enseignement avec DERIVE est pilotée par les catégories d'analyse qui sont celles de la didactique, non celles du spécialiste de calcul formel. DERIVE devenant un élément essentiel de l'environnement d'enseignement et d'apprentissage, un élément du "milieu didactique", nous cherchons à comprendre comment cet élément du milieu affecte les savoirs mathématiques en jeu dans la situation d'enseignement, les rapports de l'élève à ces savoirs, les processus de gestion de l'enseignement. Nous essayons de déterminer si les attentes formulées à son propos s'actualisent réellement, dans quelle mesure et d'identifier les caractéristiques du fonctionnement sous DERIVE ou des problèmes posés qui favorisent ou au contraire font obstacle à cette actualisation. Nous essayons de mettre en évidence à ce niveau des régularités susceptibles de transcender une situation particulière et d'être formulées de façon plus globale, puis de tester leur pertinence sur l'ensemble des observations réalisées qui le permettent. Voyant dans l'apprentissage de l'élève un processus d'adaptation à des situations "problématiques" pour lui, nous cherchons à déterminer dans les situations observées ce qui peut être problématique pour l'élève et les moyens d'adaptation dont il dispose, qu'il s'agisse de moyens "mathématiques" ou de moyens "didactiques" (c'est à dire utilisant sa connaissance du système didactique), sans faire l'hypothèse que les premiers auront nécessairement priorité sur les seconds. Cette analyse nous permet de faire des hypothèses sur ce que l'on peut attendre de telle ou telle situation, ou d'envisager des modifications susceptibles d'accroître la rentabilité d'une situation donnée. Il s'agit sans aucun doute d'un regard très partiel sur l'utilisation de DERIVE dans l'enseignement qu'il importe de conjuguer avec d'autres, comme cela a été le cas à l'université d'été de Caen.

J'aimerais que l'on retienne de ce qui précède ce que cette contribution peut modestement apporter : d'abord renforcer la conviction que DERIVE peut constituer une aide efficace pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, que ses capacités mathématiques numériques, algébriques et graphiques, alliées à sa simplicité d'accès constituent un atout essentiel au niveau de l'enseignement secondaire ; mais aussi que ces capacités, à elles seules, n'ont pas le pouvoir d'en faire un outil performant d'enseignement à ce niveau ; qu'en temps qu'enseignants, il nous reste un travail de conception et d'analyse de situations d'enseignement essentiel à faire. L'utilisation de DERIVE, convenablement pensée, peut, sans aucun doute, soutenir les apprentissages mathématiques, aider des mathématiques riches et interessantes à vivre dans l'institution scolaire. Mais l'utilisation de DERIVE peut tout aussi bien conduire à une baisse du niveau d'activité mathématique des élèves (en prenant en charge ce qui est d'ordinaire le travail mathématique technique de l'élève sans parvenir à assurer la dévolution d'autres niveaux d'activité) ou renforcer une vision des mathématiques comme jeu formel, jeu de règles sans significations. Seule une conception soigneuse des situations d'utilisation de DERIVE peut faire pencher la balance dans le sens souhaité. Nous espérons, par notre recherche, contribuer à fournir quelques pistes d'analyse pour la guider.

Il est essentiel, si l'on veut réellement aider une intégration efficace de l'outil informatique dans l'enseignement, d'être convaincu des bénéfices potentiels de cette intégration, mais une conviction sans lucidité n'aidera pas à surmonter les obstacles.

Remerciements

Je voudrais remercier ici les membres du groupe Calcul Formel de la DITEN : pour tout ce qu'ils m'ont appris sur DERIVE et les logiciels de calcul formel, pour l'aide précieuse qu'ils apportent à cette recherche, et tout particulièrement pour la gentillesse avec laquelle ils ont accueilli mon intrusion didactique et les déstabilisations qu'elle ne pouvait manquer d'entrainer, sans la moindre certitude qu'elle pourrait un jour leur apporter quelque chose d'utile.

RÉFÉRENCES

ARTIGUE M., DROUHARD J.-P., LAGRANGE J.-B. (1993) : *Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, IREM, Université Paris 7.

CANET J.-F. (1994) : *Exemple d'utilisation d'un système de mathématique symbolique*, DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université de Montpellier 2.

DAGHER A. (1993) : *Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions*, Doctorat, Université Paris 7.

DUBINSKY Ed. (1991) : "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", *in Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers, 95-123.

DUBINSKY Ed, TALL D. (1991) : "Advanced mathematical thinking and the Computer", *in Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers, 231-250.

DUVAL R. (1993) : "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Sciences Cognitives et Didactique*, vol. 5, IREM de Strasbourg.

GRAY E., TALL D.O. (1993) : "Success and Failure in Mathematics : the flexible meaning of symbols as process and concept", *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.

HIRLIMANN A. (ed.) (1994) : *Enseignement des mathématiques et logiciels de calcul formel*, Ministère de l'Education Nationale, DITEN B2.

KUTZLER B. (1994) : "DERIVE, the Future of Teaching Mathematics", *The International DERIVE Journal*, Vol. 1, N°1.

MONAGHAN J. (1994) : "On the successful use of DERIVE", *The International DERIVE Journal*, Vol. 1, N°1, 49-56.

SFARD A. (1991) : "On the dual nature of mathematical conceptions : reflexionon processes and objects as different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics*, N°22, 1-36.

ANNEXE 1
Protocole d'analyse *a priori* des observations

QUESTIONNAIRE PREPARATOIRE A UNE OBSERVATION DE TYPE T.P.

1. Combien de fois avez-vous utilisé DERIVE dans votre enseignement cette année avant cette séance ?

2. A quand remonte la dernière utilisation :
   - a) collective en classe ?
   - b) en TP ?

3. Quels sont les objectifs de cette séance et comment s'insère-t-elle, le cas échéant, dans la progression de l'enseignement ?

4. En quoi l'utilisation de DERIVE vous semble-t-elle intéressante ici ?

5. Est-elle à votre avis nécessaire au bon fonctionnement de la situation et si oui pourquoi ?

6. Les élèves sont-ils libres d'utiliser ou non DERIVE pendant la séance ?

7. Peuvent-ils utiliser aussi leur calculatrice ?

8. Connaissances informatiques et connaissances sur DERIVE nécessaires. Parmi ces connaissances, lesquelles :
   - a) supposez-vous bien connues,
   - b) pensez-vous avoir besoin de rappeler (pour chacune précisez sous quelle forme vous prévoyez de le faire : rappel écrit, rappel collectif oral, rappel individuel ou par groupes en cas de besoin),
   - c) allez-vous devoir introduire et comment prévoyez-vous de le faire.

9. Pouvez-vous décrire brièvement les principales phases de la séance et le déroulement temporel prévu ?

10. Pour chacune des phases de travail individuel ou en petits groupes des élèves, pouvez-vous préciser :
    - a) quel est le travail mathématique que doivent réaliser les élèves,
    - b) quel(s) rôle(s) va jouer DERIVE (contrôle de résultats, aide à l'exploration, à l'élaboration de conjectures, outil de calcul numérique ou algébrique, outil de représentation graphique...),
    - c) à quels comportements vous vous attendez de la part des élèves,
    - d) quelles interventions éventuelles vous prévoyez de faire.

11. Pensez-vous faire un ou plusieurs bilans collectifs pendant la séance ? Si oui, à quel(s) moment(s), sous quelle forme et avec quel(s) objectif(s) ?

12. Prévoyez-vous une institutionnalisation pendant la séance ou après ? Sur quels contenus ?

13. Pensez-vous rencontrer des difficultés mathématiques ou informatiques ? Si oui lesquelles et comment envisagez-vous d'y faire face ?

14. Autres points que vous souhaitez mentionner.

ANNEXE 2
Observation d'un groupe d'élèves dans la séance de résolution des systèmes

Ce groupe, constitué de deux filles (N. et V.), est un groupe pour lequel la résolution numérique pose encore problème.

16h15

N. et V. essaient de se souvenir de la façon dont on résolvait les systèmes en 3[e]. N. se rappelle qu'on faisait la différence des deux équations, que ça donnait x ou y et qu'ensuite on remplaçait par la valeur trouvée dans une des équations.

Elles se lancent directement dans le cas général en P/C. N. écrit :

$$x(a - e) + y(b - f) = c - g$$

puis s'interroge sur ce que sont les coefficients du système, ce qu'il faut faire, essayant de se rappeler ce que E (l'enseignant) a dit en introduisant l'activité. V. lui montre les expressions entre parenthèses, suggérant que ce sont peut-être les coefficients.

Mais l'une et l'autre ne savent que faire de cette expression.

V. va suggérer de remplacer les lettres par des chiffres. N. reprend la balle au bond, y voyant une occasion de distinguer différents cas : a entier positif, a entier négatif (à quoi répond ce besoin de distinguer différents cas : étude de signes d'expressions algébriques, réminiscences de la séparation a nul, a non nul dans la résolution de l'équation ax = b ?). Cette idée séduit V. qui suggère aussi les cas : b positif et b négatif.

Elles décident alors de passer à DERIVE et le font sur un exemple numérique avec a positif :

$$2x + 5y = 10$$

Elles activent ensuite la commande *Substitue* et substituent 4 et 3 à x et y. Elles arrivent ainsi à :

$$2\ 4 + 5\ 3 = 10$$

puis, par simplification, à :

$$23 = 10$$

16h20

E. passe et leur demande où elles en sont. Elles expliquent qu'elles ont obtenu 23 = 10. E. leur fait préciser comment elles en sont arrivées là. V. répond que c'est en prenant des valeurs au hasard. E. commente que le hasard n'est peut-être pas la meilleure méthode et leur rappelle la consigne.

N. dit qu'il n'y a pas besoin d'ordinateur et repasse en P/C pour se donner un système numérique :

$$2x + 3y = 10$$
$$6x + 4y = 13$$
$$x(2 - 6) + y(3 - 4) = 10 - 13$$

V. entre cette dernière ligne sous DERIVE et active la commande *Resol*. Mais, quand x s'affiche, elle tape des valeurs numériques qui ne sont pas acceptées par DERIVE. N. et V. sont bloquées. L'observateur leur conseille d'appeler E., ce qu'elles font.

16h25

E. leur explique la syntaxe de l'instruction *Resol* puis s'en va.

Elles résolvent alors en x et obtiennent :

$$x = \frac{3 - y}{4}$$

N. vérifie en refaisant le calcul en P/C que le résultat fourni par DERIVE est correct. V. vérifie de son côté avec DERIVE en tapant : 4x y = 3 et en réactivant *Resol*.

Elles sont satisfaites et N. dit qu'il suffit alors de remplacer les valeurs numériques par les coefficients généraux pour obtenir les formules. Elles réflechissent aux correspondances possibles et cela ne leur paraît pas évident.

16h30

N. propose d'essayer autre chose, de faire résoudre en y par la machine. Elles passent en DERIVE et le font, d'où l'expression :

$$y = 3 - 4x$$

Elles repassent en P/C pour essayer d'exploiter cette nouvelle expression. V. écrit :

$$x = \frac{-(c-g) - (b-f)}{a-e}$$
$$y = (c-g) - (a-e)x$$

mais ceci les laisse insatisfaites.

Après réflexion, N. dit qu'il manque sûrement un y dans l'expression de x. V. corrige :

$$x = \frac{-(c-g) - (b-f)y}{a-e}$$

puis dit qu'il manque sans doute aussi quelque chose dans l'expression de y. N. pense que c'est b – f et qu'on ne le voit pas car b – f vaut : – 1.

V. propose de changer les coefficients pour éviter ce problème. Elles changent le coefficient 4 en 5, résolvent de nouveau avec DERIVE et obtiennent :

$$x = \frac{3 - 2y}{4}$$
$$y = \frac{3 - 4x}{2}$$

16h35

E. passe, se fait expliquer ce qui a été fait puis leur rappelle que l'objectif n'est pas d'obtenir x en fonction de y et y en fonction de x. Il leur suggère de faire leurs manipulations avec les deux équations de départ et non une seule.

N. et V. entrent alors sous DERIVE la première équation : $2x + 3y = 10$, puis la résolvent successivement en x et en y. Elles obtiennent ainsi :

$$x = \frac{10 - 3y}{2}$$
$$y = \frac{2(5 - x)}{3}$$

Le facteur 2 les étonne et elles se mettent à vérifier. N. le fait en P/C. V. tape : 10 – 2x, active la commande *Simplifie* et réobtient : 10 – 2x ; elle essaie ensuite la commande *Factorise* et obtient bien cette fois-ci : 2(5 – x).
Les deux sont rassurées mais pas plus avancées car, encore une fois, elles ont x en fonction de y et y en fonction de x. Elles écrivent les formules, les rayent et ne savent trop quoi faire.

16h45

E. passe et leur demande ou elles en sont. V. lui répond qu'elles n'ont pas vraiment avancé. E. dit alors :

> *Vous avez trouvé* $y = \frac{10-2x}{3}$ *avec cette première équation mais ensuite vous tournez un petit peu en rond. Vous avez deux équations.*

La suggestion semble immédiatement comprise par N. qui dit qu'elle a compris. E. lui demande d'expliquer et c'est V. qui répond pour dire qu'on peut prendre x dans une équation et remplacer ensuite dans l'autre. E. donne son feu vert à cette manipulation.

V. prend alors l'initiative. passant en DERIVE, elle rentre l'équation : $6x + 4y = 13$ et la résout en y, d'où :

$$y = \frac{13-6x}{4}$$

N. lui demande d'expliquer ce qu'elle fait.

V. repasse en P/C, écrit les deux équations, la valeur de x tirée de la première et la valeur de y tirée de la seconde, puis elle substitue la valeur de x à x mais dans la première équation, écrivant :

$$2\left(\frac{10-3y}{2}\right) + 3y = 10$$

Elle donne l'expression à calculer à DERIVE mais oublie de taper la barre de fraction. DERIVE lui renvoie donc la réponse : $4(10-3y)$ après simplification de $2((10-3y)2)$.

V. repasse en P/C et écrit alors :

$$4(10-3y) + 3y = 10$$

puis rentre cette expression en machine et résout pour obtenir :

$$y = \frac{10}{3}$$

Ensuite, elle fait la même chose pour x avec la seconde équation, travaillant là encore à la fois en P/C et avec DERIVE. Cette fois-ci, il n'y a pas d'erreur de calcul, d'où l'équation :

$$6x + 4\left(\frac{13-6x}{4}\right) = 13$$

qui devient :

$$6x + 13 - 6x = 13$$

qui, donnée à résoudre à DERIVE, renvoie la réponse : x = §1

16h50

E. passe à ce moment là. O. (observateur) lui dit rapidement ce qui se passe. E. demande à N. et V. d'expliquer comment elles ont fait, puis leur explique qu'elles tournent en rond, qu'elles doivent remplacer dans l'autre équation, pas dans la même. V. se fait répéter l'information puis elles se remettent au travail.

V. écrit au brouillon :

$$x = \frac{10-3y}{2}$$
$$6\left(\frac{10-3y}{2}\right) + 4y = 13$$

rentre l'expression sous DERIVE et fait résoudre pour obtenir : $y = \frac{17}{5}$

Ensuite elle recommence avec l'autre inconnue :

$$y = \frac{13-6x}{4}$$
$$2x + 3\left(\frac{13-6x}{4}\right) = 10$$

N. alors lui propose de remplacer plutôt y par sa valeur numérique. Elle tape :

$$6x + 4\ \frac{17}{5} = 10$$

et fait résoudre pour obtenir :

$$x = -\frac{1}{10}.$$

Mais N. veut alors vérifier en reprenant la première méthode. Faisant une erreur de frappe, elle entre l'équation :

$$2x + 3\left(\frac{13+6x}{4}\right) = 10$$

et, en résolvant, obtient :

$$x = \frac{1}{26}.$$

16h55

Devant ces deux résultats différents, N. et V; décident d'appeler E. qui arrive aussitôt, confirme que les deux méthodes sont correctes mais ne voit pas immédiatement où se situe l'erreur de calcul. L'observateur explique l'erreur. E. rappelle ensuite l'objectif du TD qui est d'obtenir des formules générales.

V. et N. repassent en P/C intégral, écrivent le système :

$$ax + by = c$$
$$ex + fy = g$$

résolvent la première équation en x :

$$x = \frac{c-by}{a}$$

puis substituent dans la seconde :

$$e\,\frac{c-by}{a} + fy = g$$

Elles regardent, plus haut sur leur brouillon, l'exemple numérique pour dire qu'elles vont maintenant trouver la valeur de y mais veulent simplifier l'expression avant de l'entrer dans la machine. Elles écrivent alors :

$$\frac{ec-eby}{ea} = \frac{c-e(by)}{a}$$

puis :

$$\frac{c-eby}{a} + fy = g$$

ce qui ne les satisfait pas.

La séance est alors pratiquement finie. L'observateur demande à N. et V. pourquoi elles ne rentrent pas l'expression telle que en machine. V. répond que c'est trop compliqué et que la machine ne donnerait pas la solution. L'observateur suggère d'essayer. V. tape la première expression (correcte) et obtient enfin la valeur de y.

E. qui passe confirme que c'est bon et leur demande ce qu'elles feraient pour trouver la valeur de x. V. répond qu'elles remplaceraient la valeur de y dans une équation. E. demande : "N'importe laquelle ?" V. répond : "La deuxième."

ANNEXE 3
Fiche élève pour la situation Carrés de sommes

Classe de troisième **Travaux pratiques avec DERIVE** : Carrés de sommes

Commandes à utiliser :

Auteur	pour entrer une expression
devEloppe	pour développer
Factor	pour factoriser
suppRime	pour supprimer l'expression sélectionnée

Touche de fonction à utiliser :

F3	pour recopier l'expression sélectionnée sur la ligne de commande

1. DEVELOPPEMENTS

Chacune des quatre expressions qui suivent est le carré d'une somme.

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})^2$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e})^2$

Entre et développe chacune de ces expressions. Note tes résultats dans le tableau 1

2. DEVINETTES

Voici trois nouvelles expressions :

$(\mathbf{a}+\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{k})^2$, $(2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$, $(\mathbf{x}+2\mathbf{y}+3\mathbf{z})^2$

Essaye de deviner le développement de chaque expression SANS DERIVE. Note ces développements sur ton compte-rendu.
Entre les développements puis factorise-les AVEC DERIVE cette fois.
Note les factorisations sur ton compte-rendu.

3. ET AVEC DES SIGNES – ?

Voici encore quatre expressions:

$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$, $(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$, $(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$

Entre et développe ces expressions avec DERIVE. Recopie les développements dans ton compte-rendu.
Compare les développements obtenus avec ceux du paragraphe 1. Que peux-tu observer ?

4. UNE AUTRE DEVINETTE

Essaye de deviner SANS DERIVE le développement de $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$
Contrôle avec DERIVE.

5. POUR ALLER PLUS LOIN

Complète les expressions suivantes :

$$(x + y + \ldots)^2 = 2xy + 2xz + 2yz + z^2 + \ldots + \ldots$$
$$(\ldots x + y + 1)^2 = \ldots + 4xy + 4x + y^2 + 2y + 1$$
$$(x + \ldots + \ldots)^2 = x^2 + 2ax + 2x + a^2 + 2a + 1$$
$$(u + v + \ldots)^2 = 2uv + 2uw + 2vw + \ldots + \ldots + \ldots$$

ANNEXE 4

Factorisations rationnelles de x^n-1 pour n inférieur à 20 et exemple de dérivation élémentaire d'une factorisation donnée

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$x^9-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$

$x^{10}-1=(x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{12}-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$x^{13}-1=(x-1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{14}-1=(x-1)(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{15}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

$x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$x^{17}-1=(x-1)(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{18}-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6-x^3+1)(x^6+x^3+1)$

$x^{19}-1=(x-1)(x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^{20}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

Exemple de dérivation : $x^{18}-1$

$x^{18}-1=(x^6-1)(x^{12}+x^6+1)$ par changement de variable $x \to x^6$ dans la factorisation de x^3-1 (processus "multiple")

$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$ par processus "identité remarquable"

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ par processus de factorisation standard

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ par changement de variable $x \to -x$ dans la factorisation standard de x^3-1

$x^{12}+x^6+1=(x^6-x^3+1)(x^6+x^3+1)$ par utilisation de la factorisation :
$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ avec changement de variable $x \to x^3$.

ANNEXE 5

DERIVE et le traitement de l'expression cosx+cos3x+cos5x

1. En mode automatique ou contracté, quelle que soit la direction choisie, les commandes : *Simplifie, Développe, Factorise,* n'ont aucun effet sur l'expression qui est simplement réordonnée en : $\cos 5x + \cos 3x + \cos x$.

2. En mode *Développe* et direction *Auto*, on obtient par :

   - *Simplifie* : $16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$
   - *Développe* : *idem.*
   - *Factorise Rationnel* : $\cos x(1 - 4\sin^2 x)(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)$
   - *Factorise Radical* : $\cos x(\cos x - 1/2)(\cos x + 1/2)(\cos x - \sqrt{3}/2)(\cos x + \sqrt{3}/2)$

3. En mode *Développe* et direction *Vers Cosinus*, on obtient les mêmes réponses

4. En mode *Développe* et direction *Vers Sinus*, on obtient par :

   - *Simplifie* : $\cos x(16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3)$
   - *Développe* : $16\sin^4 x\cos x - 16\sin^2 x\cos x + 3\cos x$
   - *Factorise Rationnel* : $\cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)(4\sin^2 x - 3)$
   - *Factorise Radical* : $16\cos x(\sin x - 1/2)(\sin x + 1/2)(\sin x - \sqrt{3}/2)(\sin x + \sqrt{3}/2)$

5. A partir de $\cos x(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3)$, en mode *Contracté*, direction *Auto*, la commande *Simplifie*, après sélection du second facteur donne $\cos x(1 + 2\cos 4x)$!

6. En mode *Développe*, la commande *Resol* appliquée à l'expression initiale permet d'obtenir directement 15 solutions :

   - en direction *Auto* et *Vers Cosinus*, ce sont les solutions comprises entre - 5 /6 et 11 /6,
   - en direction *Vers Sinus*, ce sont les solutions comprises entre - 4/3 et 3/2.