CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES : LA CONQUÊTE DE L'INUTILE ?...

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

Conte hyperbolique dédié à Rudolf B.

Ce texte est celui d'un exposé présenté en juin 1994 au colloque Inter-Irem de Géométrie de Lille-Le Quesnois consacré aux constructions géométriques.

A une époque pas si lointaine, dans un pays qui ressemblait au nôtre, vivait un enfant qui n'était sans doute pas très différent de nous car il avait une passion que nous partageons tous un peu... Son identité exacte n'a pas vraiment d'importance puisque nous sommes dans un conte et que les héros des contes valent moins par leur personnalité que par les aventures extraordinaires marquant leur destinée. Il nous faut cependant lui donner un nom. J'avais pensé un moment le baptiser *Guido-Ubaldo*, ou bien *Nikolai-Ivanovitch*, ou encore *Janos* ou *David*... Mais ce sont là des prénoms trop célèbres, derrière lesquels il aurait été bien tentant de retrouver des mathématiciens connus et donc de particulariser excessivement cette fable ! Pour éviter cet inconvénient, si vous le voulez bien, nous appellerons tout simplement notre héros : Rudolf...

Il était donc une fois, dans un pays pas si lointain, un enfant nommé Rudolf dont je voudrais vous raconter l'histoire...

Dès son plus jeune âge le petit Rudolf s'était trouvé dévoré par la passion des mathématiques : des mathématiques en général (des nombres et des formes) et de la géométrie en particulier (notamment des constructions géométriques). Nul ne sait très bien d'où cela lui était venu, mais ses premiers maîtres avaient bien dû le constater tant il était fasciné par ses instruments de dessin : il mesurait, traçait, calculait avec un soin et une minutie peu ordinaires et ne quittait jamais son double-décimètre, sa règle, son compas ou son équerre...

Vous savez comme moi que c'est un rare plaisir pour un professeur de rencontrer des élèves assez exceptionnels pour lui donner l'impression qu'ils comprennent. Ceux du petit Rudolf étaient si ravis de le voir faire pour construire les figures les plus compliquées qu'ils répétaient sans cesse que « celui-là ferait de très brillantes études ! ». Ils le voyaient déjà au lycée, puis à l'université, réussir tout ce qu'il entreprendrait. Ils le voyaient déjà mathématicien, et tous étaient même persuadés qu'il « finirait un jour dans la *noosphère* ! ». De son côté, le petit Rudolf progressait si rapidement que, bien avant d'avoir quitté l'école primaire, il avait percé le secret de la plupart des constructions géométriques : il savait tracer des triangles, des rectangles, des losanges ou des carrés. Il ne pouvait d'ailleurs pas dessiner un triangle sans s'amuser aussitôt à construire, avec sa règle et son compas – ou avec son équerre et son double-décimètre – les bissectrices, les hauteurs, les médiatrices, les médianes et même les bissectrices extérieures !

Sa construction préférée était celle de l'*hexagone régulier*, celui qui est inscrit dans un cercle (fig. 1) et que l'on obtient en reportant soigneusement le rayon, jusqu'à obtenir une belle rosace à six branches. Il y prenait un soin très particulier car il avait remarqué que les plus petites erreurs successives que l'on fait chaque fois que l'on déplace la pointe du compas s'additionnent inexorablement et que, souvent, la figure ne se referme pas exactement...

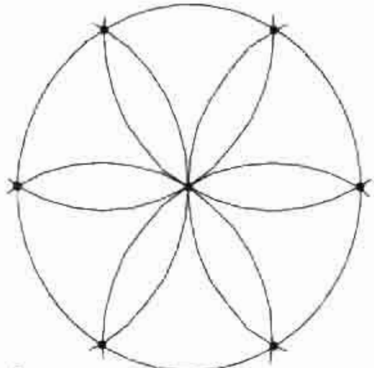


Fig. 1

Mais peut-être ne savez-vous pas ce qu'était précisément la *noosphère* ? C'est à vrai dire assez difficile à expliquer, surtout dans la mesure où nous sommes dans un conte ! Disons que c'était une vaste contrée adossée à la montagne des mathématiciens et qui, de là, s'étalait très loin vers la plaine où s'étend l'ensemble du système scolaire : une sorte de « piémont » où chevauchaient sans cesse des hommes et des femmes élégants et graves qui se passionnaient pour une lourde mission : la *transposition didactique*... C'est-à-dire qu'ils s'intéressaient à tout ce qui était savant (et particulièrement aux mathématiques), interrogeant en permanence les géomètres ou les algébristes professionnels sur leurs pratiques, et ceci afin d'en dégager ce qu'il convenait d'en transmettre aux futures générations. Bref, ils discutaient et tranchaient de tout ce qui touchait aux contenus de l'école et de l'apprentissage : ils rédigeaient les programmes, publiaient les instructions, formaient les maîtres et les professeurs, décidaient d'autoriser ou non les calculatrices, mettaient au point les formulaires pour distribuer aux examens... Prenez par exemple la question qui les avaient sans conteste le plus agités ces dernières années et qui concernait la construction des parallèles ou, si vous préférez, le problème des parallèles menées par un point M extérieur à une droite donnée D :

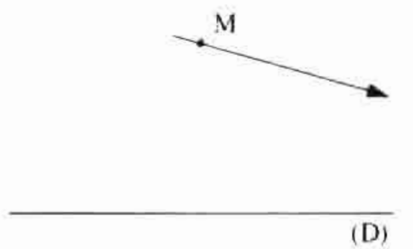


Fig. 2a

Renseignements pris, les mathématiciens ne s'intéressaient plus au problème depuis belle lurette et tous pensaient que la réponse à la question n'avait en fait aucune espèce d'importance ; il était cependant primordial, pour la *noosphère*, de savoir dans quelles conditions il convenait de faire étudier aux enfants la théorie des parallèles ! De réunions en débats et de commissions en colloques les discussions avaient été âpres. Certains soutenaient que le plus simple était encore de considérer que *toute* droite passant par M coupait obligatoirement D : on leur fit remarquer que si on traçait alors la perpendiculaire MH à D puis la perpendiculaire en M à MH il devenait bien difficile de faire admettre à des enfants que cette droite coupait D en un seul point puisque, par symétrie, celui-ci devrait se situer aussi bien d'un côté que de l'autre de MH...

On en vint ainsi à préconiser que cette perpendiculaire à MH *ne couperait pas* la droite D. Mais le problème n'en était pas résolu pour autant : qu'en serait-il en effet des autres droites passant par M ? Tous étaient d'accord pour dire que certaines droites passant par M coupaient forcément D... mais était-ce vraiment le cas de toutes celles que l'on pouvait tracer ? La *noosphère* se divisa vite en deux camps : les uns voulaient que la perpendiculaire à MH soit la seule à ne pas couper D ; toutes les autres droites couperaient D d'un côté ou de l'autre selon qu'elles faisaient un angle aigu d'un côté ou de l'autre de MH.

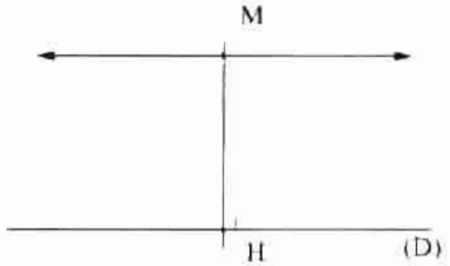


Fig. 2b

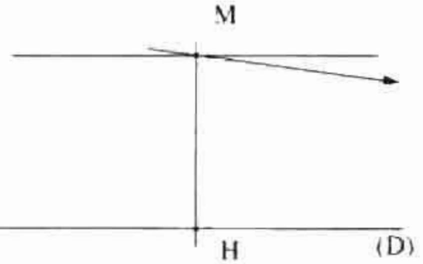


Fig. 2c

On leur répliqua que les enfants n'auraient alors aucune difficulté pour mettre le maître dans l'embarras en traçant une droite très proche de la perpendiculaire à MH et en lui demandant de leur montrer où elle coupait concrètement la droite D !

On décida d'être prudent et de considérer que, *jusqu'à une certaine limite, les* *droites passant par* M *couperaient* D *et qu'à partir d'un certain angle les droites passant par* M *ne couperaient pas la droite* D. Quelques malins tentèrent bien de faire valoir que les droites pour lesquelles il était "humainement possible" de vérifier si elles étaient sécantes avec D ne formaient pas une véritable partie au sens ensembliste de ce mot... on ne les écouta guère que d'une oreille et on décida que par un point tel que M passeraient donc deux droites particulières ne coupant pas D : on les appellerait les *parallèles* à D passant par M. Celles-ci délimiteraient deux zones distinctes : une droite issue de M couperait ou ne couperait pas D selon qu'elle ferait avec MH un angle plus petit ou plus grand que celui déterminé par les deux *parallèles*...

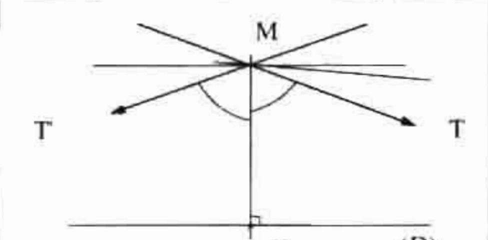


Fig. 2d

Une fois la décision prise, on régla le problème des instruments de construction : les élèves n'auraient droit qu'à la règle, au compas, au tire-ligne et au crayon de papier... à l'exclusion de toutes sortes de stylos à billes, du double-décimètre, de l'équerre, du compas rectiligne et de la règle courbe, ainsi que de tout instrument prétendument moderne qui ne faisait qu'embrouiller l'esprit des enfants ! Et c'est ainsi que les programmes du collège avaient été mis en place au sein de la *noosphère* au moment où le petit Rudolf entra en classe de sixième...

*
* *

Bien entendu, notre héros n'eut pas vraiment de difficultés pendant sa sixième... Il retrouvait la plupart des choses qu'il connaissait déjà et révisait simplement les propriétés des perpendiculaires et des symétries. L'interdiction du double-décimètre ne le gênait guère, puisqu'il savait pratiquement tout construire avec son compas et sa règle... et, à vrai dire, il s'était même fabriqué une sorte de règle graduée qui pourrait toujours lui servir en cas de besoin... Il ne lui vint une inquiétude que le jour, en fin d'année, où un élève de la classe supérieure lui laissa entendre que son hexagone régulier (celui qu'il réalisait si bien à partir de la rosace à six branches) était faux... Le petit Rudolf essaya bien de savoir pourquoi, mais l'élève ne sut lui expliquer et il dut attendre la cinquième pour avoir la clef de l'énigme. Cette année-là, il tomba en effet sur un professeur féru de démonstrations et même, comme il arrive souvent aux professeurs de cinquième, passionné de démonstrations sur les quadrilatères ! Il décida de leur apprendre les finesses du quadrilatère à trois angles droits...
Traçons (avait dit le maître) une figure formée de trois angles droits A, B, C :

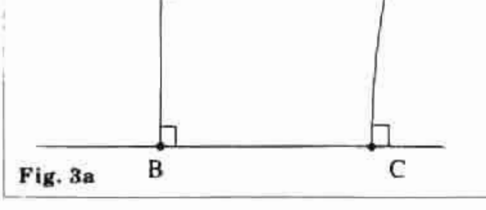


Fig. 3a

et *supposons* que les côtés issus de A et C se coupent en un quatrième point D ; nous allons voir que l'angle en D est nécessairement un angle *aigu* [1]. Considérons en effet les deux *parallèles* DT et DT' que nous pouvons mener par D à la droite BC, puis complétons la figure en construisant le maintenant la droite DT" symétrique de DT' par rapport à la droite AD, nous obtiendrons une nouvelle droite dont nous pouvons remarquer une propriété essentielle : sa symétrique par rapport au point A n'est autre que la droite D'S symétrique de DT' par rapport à la droite AB...

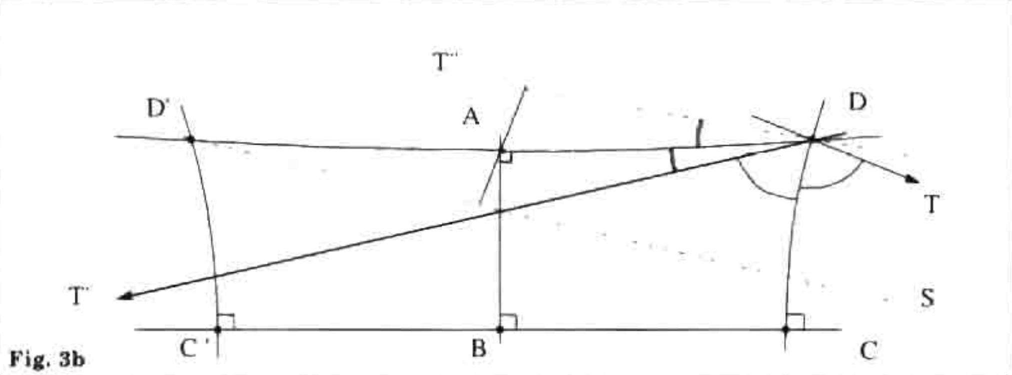


Fig. 3b

symétrique ABC'D' du quadrilatère ABCD par rapport à la droite AB. Si nous traçons

Or la droite D'S est donc une des deux *parallèles* à la droite BC issues de D'. Mais la droite DT" et la droite D'S étant symétriques par rapport au point A, elles *ne sont pas parallèles* puisqu'elles possèdent une perpendiculaire commune passant par A... Dès lors DT" n'est pas non plus *parallèle* à la droite BC. Il s'ensuit que, à partir du point D, elle est strictement contenue dans l'angle déterminé par les deux *parallèles* DT et DT' et délimitant les droites *non parallèles* à BC ! Mais si l'angle ADC était un angle droit, DT" ne serait autre que DT... donc *notre* raisonnement prouve que l'angle en D est bien un angle aigu !

C'en était fini des rectangles ou des carrés que se construisait le petit Rudolf ! Ce serait beaucoup dire que les élèves avaient compris la démonstration ; ou qu'elle ait signifié grand chose pour notre héros... Il n'empêche qu'il savait se la

(1) Evidemment, la démonstration qui va suivre est loin d'être simple Mais ne serait-ce pas parfois le cas de certaines démonstrations présentées aux élèves de cinquième ? Rien d'étonnant, donc, à ce que le maître du petit Rudolf cède de temps en temps à ce travers.

Pour suivre le raisonnement (ce qui n'est pas indispensable pour la suite de cette histoire) il convient de tenir compte de deux phénomènes :

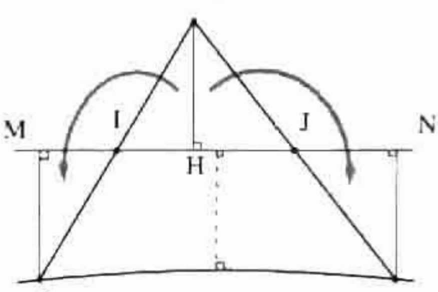
– le premier touche à la possibilité de composer deux symétries par rapport à des droites : lorsque celles-ci sont perpendiculaires à une même troisième, on obtient un déplacement analogue à une translation. Ces translations ne se composent pas entre elles lorsqu'elles ont des directions différentes, mais cette propriété n'est pas utilisée ici.

– le second peut se résumer en disant que le parallélisme est une relation transitive : ce n'est pas immédiat mais cela sert ici de façon essentielle...

répéter et que, même si la différence entre l'angle D et un angle droit était nécessairement si infime que personne n'aurait su la mesurer, il dut bien se convaincre que la vérité était là : le quatrième angle n'était pas un angle droit ! Le maître ne se priva d'ailleurs pas de leur en montrer les conséquences !... Et c'en fut fini aussi pour le petit Rudolf des beaux hexagones réguliers qu'il avait pris tant de soin à peaufiner...

Considérons (avait dit de nouveau le maître) un triangle quelconque ABC et traçons la droite passant par les milieux I et J des côtés AB et AC, puis projetons orthogonalement en H le sommet A sur cette droite IJ. Si nous faisons tourner les deux triangles AIH et AJH autour des points I et J, nous obtenons deux triangles BIM et CJN qui déterminent avec le reste du triangle ABC un quadrilatère MNCB qui ressemble au quadrilatère CC'D'D de la figure précédente : il possède deux angles droits en M et N et ses côtés MB et NC sont égaux... Par conséquent, ce quadrilatère est symétrique par rapport à la médiatrice du côté BC et ses deux angles en B et C sont *aigus* : mais ces angles ont évidemment la même somme que les trois angles du triangle ABC ! Nous pouvons donc en déduire que la somme des angles d'un triangle est toujours strictement inférieure à deux droits ! (fig. 4)

Fig. 4



Reprenons alors la construction de la "rosace à six branches" : nous voyons que le premier triangle obtenu possède trois côtés égaux et donc, par symétrie, trois angles égaux Ceux-ci sont donc *strictement plus petits* que 60°... de ce fait, la rosace ne se refermera jamais exactement !

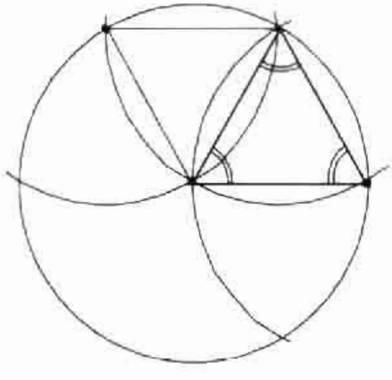


Fig. 5a

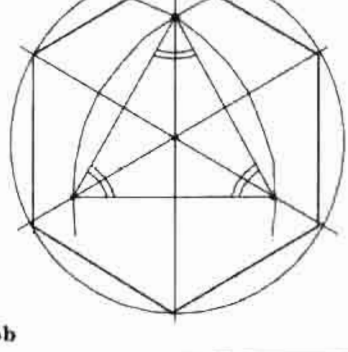


Fig. 5b

Le seul moyen qui permette d'obtenir un hexagone vraiment régulier consiste à construire préalablement un triangle équilatéral, puis à tracer les médiatrices des côtés : par symétrie, les trois droites ainsi obtenues font alors entre elles des angles de 60°. Il ne reste plus qu'à déterminer l'hexagone en prenant un cercle à partir du centre du triangle : la figure obtenue aura cette fois des côtés égaux et des angles aux centres égaux... Le petit Rudolf se mit à tracer autant de vrais hexagones qu'il en avait construit de faux auparavant et se consola en se persuadant que la démonstration expliquait les difficultés qu'il avait eues pour fermer exactement ses rosaces ! La classe de quatrième était ensuite essentiellement consacrée à la géométrie du triangle. Il y retrouva les médiatrices, les bissectrices, les médianes et les hauteurs... Il n'avait certes pas besoin d'être convaincu des propriétés de toutes ces droites qu'il avait pris plaisir à tracer dès l'école primaire et il serait excessif de dire que les démonstrations lui apportèrent des légitimations très profondes de tous ces phénomènes, il avait cependant pris goût aux raisonnements abstraits.

Ainsi la démonstration de la concourance des bissectrices ou des médiatrices lui semblait particulièrement simple : il suffisait de considérer (quand il existait...) le point d'intersection de deux d'entre elles, et de vérifier que ce point appartenait bien à la troisième, dans la mesure où il était obligatoirement équidistant de tous les côtés ou de tous les sommets (fig. 6).

La démonstration de la concourance des hauteurs plaisait beaucoup plus au petit Rudolf tant elle lui semblait relever d'une démarche originale. Elle consistait (comme vous le savez) à utiliser à l'envers les propriétés du triangle des milieux, et tout particulièrement la propriété qu'il avait rencontrée en cinquième, lorsque le maître avait montré (sur la figure 4) que la médiatrice d'un côté était aussi perpendiculaire à la droite joignant les milieux des deux autres côtés...

Il suffisait alors de raisonner indirectement : considérons (avait dit le maître) un triangle quelconque (ou presque...) IJK et montrons que ses hauteurs sont concourantes. Traçons deux des hauteurs : IM et JN, puis menons par I et J les perpendiculaires à IM et JN ; elles se couperont en un point A, et nous reporterons sur ces droites les points B et C tels que IB = AI et JC = AJ...

Fig. 6

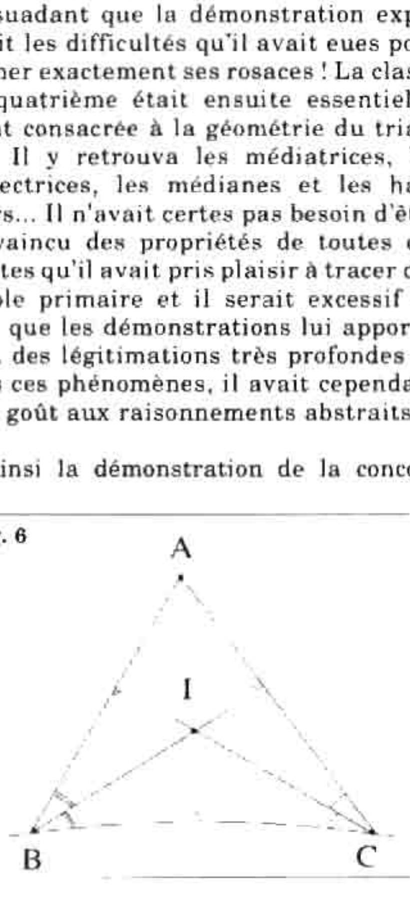


Fig. 7a

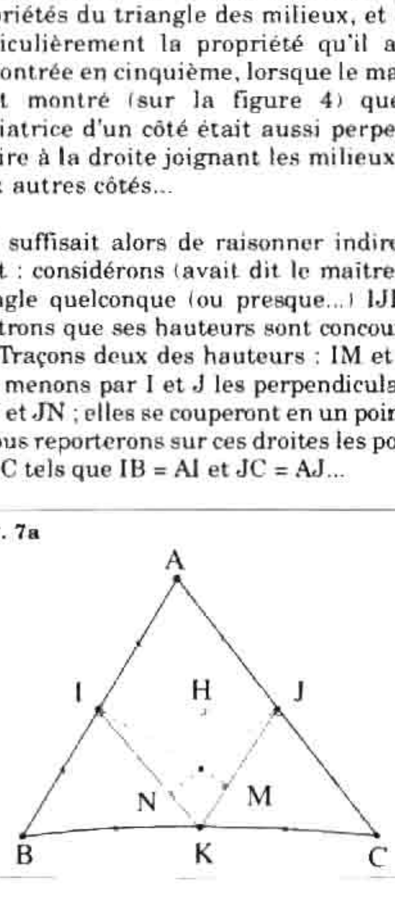
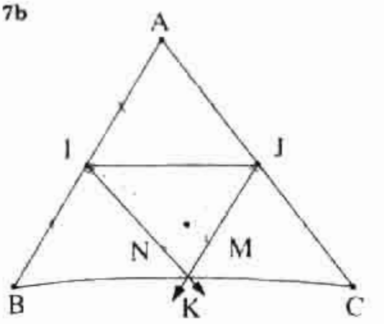


Fig. 7b



Traçons alors la droite BC. Si nous prouvons que K est bien le milieu de BC, nous pourrons dire que les hauteurs de IJK sont concourantes car ces droites ne seront autres que les médiatrices du triangle ABC. Mais dans le triangle ABC la droite IK, issue du milieu I de AB et perpendiculaire à la médiatrice JN de AC, est précisément la droite des milieux relative aux côtés AB et BC ; IK passe donc par le milieu de BC. Et pour des raisons analogues, JK coupe aussi BC en son milieu... si bien que le point K est confondu avec le milieu de BC : c'est ce qu'il fallait démontrer...

Inutile de vous dire le plaisir que pouvait prendre le petit Rudolf à cette géométrie qui consistait à prouver toutes les propriétés qu'il connaissait ou pressentait depuis si longtemps ! Il fut un peu déçu que la propriété des médianes ne soit plus depuis longtemps aux programmes des collèges ou des lycées : toutes ses constructions l'avaient persuadé que les trois médianes d'un triangle, elles aussi, se coupaient bel et bien en un même point... mais nul ne pouvait lui en donner une démonstration, ni même simplement lui dire si cette propriété était vraiment exacte ! (fig. 8)

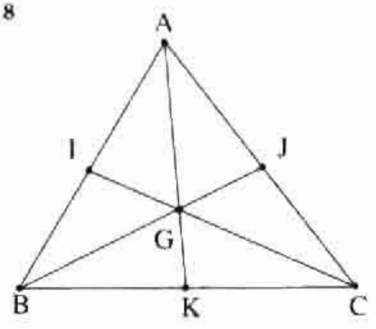
Il l'avait cependant admise. Et comme il avait observé (ou entendu dire...) que non seulement les médianes se coupaient, mais qu'elles se coupaient en un point G situé exactement au tiers de leur longueur, il s'était en fait servi de cette remarque pour perfectionner le double-décimètre confectionné en sixième et dont je vous ai déjà parlé...

Car il ne savait jusque là que reporter des segments égaux et construire des milieux : cela lui donnait bien une règle graduée, mais une règle graduée en demi-centimètres, voire en quarts, en huitièmes, en seizièmes de centimètres...(fig 9) mais évidemment pas en dixièmes, comme il convenait à un double-décimètre digne de ce nom !

Faute de mieux, c'est-à-dire faute de savoir diviser un segment en cinq parties égales, il avait pensé améliorer sa graduation en utilisant les tiers, les sixièmes, etc., à l'aide de la propriété des médianes... Qu'il était bien en peine de démontrer !

Mais le temps passait et le jeune Rudolf arriva au seuil des études supérieures et spéciales qui allaient le conduire à son rêve : accéder enfin à la *noosphère*. Il aurait même la possibilité de rencontrer trois des plus grands maîtres et de leur

Fig. 8



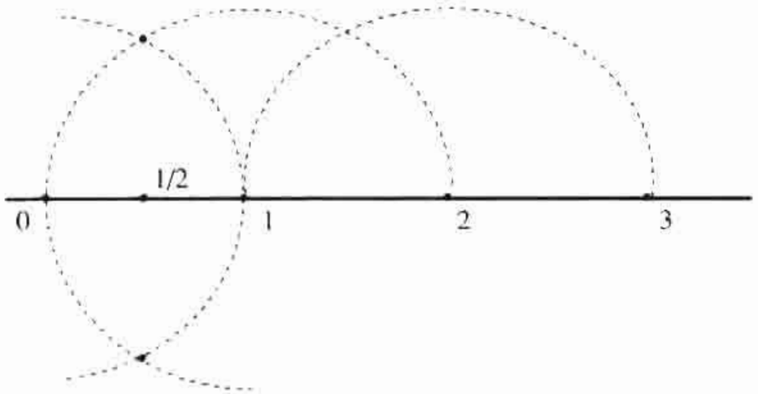


Fig. 9

poser les questions qui lui tenaient à cœur, il se promit de tirer au clair le mystère des médianes et celui du double-décimètre...

*
* *

En fait on n'avait pas toujours parlé de *noosphère*... : l'habitude, pour désigner le lieu où se définissaient les grandes orientations et où se prenaient les décisions relatives au système scolaire, était plutôt de dire simplement "le système", ou encore "l'institution"...

Ainsi, dans l'Institut de Recherche sur ces questions que j'ai longtemps fréquenté, les premiers directeurs disaient-ils souvent : « Quelle bande de guignols d'avoir pondu un programme aussi débile ! Le *système* est vraiment tombé sur la tête ! ». Et même plus tard, lorsque ces directeurs étaient devenus Directeurs des Lycées et Collèges, ou Inspecteurs Généraux, leurs successeurs s'exclamaient plus souvent qu'à leur tour, avant de s'investir à corps perdu dans la formation des maîtres : « Ah ! si je tenais Untel ou Untel qui s'est fait récupérer par l'*Institution*, je lui dirais ma façon de penser sur ses instructions ! » Puis un jour, quelqu'un proposa de ne plus dire « le système » mais « la *noosphère* »...

Au début on crut à une galéjade. Surtout qu'en fait il s'agissait de désigner ainsi, d'un seul coup, tous ceux qui, de près ou de loin, s'intéressaient aux questions des contenus scolaires et influaient de ce fait sur la destinée de l'apprentissage. Mais bien entendu certains prirent l'habitude de dire : « les programmes témoignent de l'incapacité de la *noosphère*... », ou bien : « de telles instructions montrent la faculté de récupération sans pareille de la *noosphère*... », etc., etc.

Avec du recul et en y réfléchissant, on s'aperçut qu'en vérité c'était vraiment une galéjade ! En effet, tous ceux qui disaient le plus souvent du mal de la *noosphère*, faisaient en réalité partie, eux aussi, de cette *noosphère*... puisque le concept englobait toute personne agissant dans le but d'orienter la marche de l'école ! Il devenait donc presque impossible – à moins de se critiquer soi-même – de fustiger globalement les agissements d'une bien théorique *noosphère*. Le problème n'était pas mince en effet : comment parler de cette vaste contrée, de cette sorte de « piémont » où chevauchent tant de personnes élégantes et graves qui sont chargées de la transposition didactique, alors que ce que l'on en dit doit nécessairement être pris en compte dans le contenu même du discours que l'on est en train de tenir ? Beaucoup renoncèrent à parler de *noosphère*..., quelques-uns tentèrent des manœuvres de contournement : certains n'en parlaient plus que sous forme apparemment fictive (en écrivant des contes, en quelque sorte), d'autres cherchèrent à s'élever du débat en jouant les "anthropologues" de manière à donner l'impression qu'ils ne se trouvaient pas directement concernés par le problème de l'apprentissage, mais qu'ils observaient simplement en ethnologues des phénomènes qui ne les impliquaient pas vraiment ! Bien évidemment de tels faux semblants n'étaient d'aucun recours : s'intéresser à la *noosphère* c'était s'intéresser à la transposition didactique et s'intéresser à la transposition didactique revenait à s'intéresser au système scolaire et donc à faire partie *de facto* de la *noosphère* ! Le seul résultat tangible fut que dès que l'on disait à tel ou tel qu'il faisait partie de la *noosphère*... il se mettait immédiatement en colère !

Mais revenons au jeune Rudolf qui rencontra bientôt son premier Maître... : c'était le maître de la *géométrie dans l'espace*. L'impatience de notre héros était telle qu'il posa d'un seul trait toutes les questions qui le préoccupaient : les secrets des constructions, le mystère de la mesure des grandeurs et du double-décimètre, le problème des médianes et du tiers d'un segment, etc., etc. Bref : il posa la question du sens...

– Ah oui ! le sens... grommela le Maître de la *géométrie dans l'espace*. Puis il réfléchit longuement et décida de lui expliquer la géométrie dans l'espace et la concourance des médianes... Il commença par lui apprendre les propriétés des plans, des droites et des points de l'espace. Je ne

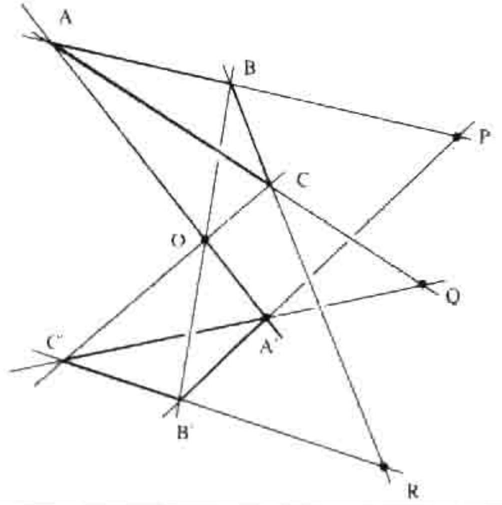


Fig. 10

m'y attarderai pas car je pense que vous en connaissez déjà l'essentiel. Le Maître s'attacha en revanche à une figure intéressante dans laquelle il fit considérer au jeune Rudolf une sorte de trépied formé de deux triangles ABC et A'B'C' qui *n'étaient pas situés* dans un même plan et dont les sommets correspondants étaient tels que les droites AA', BB' et CC' se coupent en un même point O de l'espace... (fig. 10).

Il lui fit remarquer que les côtés AB et A'B' étaient dans un même plan déterminé par les droites AA' et BB' : s'ils se coupaient en un point P, alors ce point devait appartenir aussi bien au plan du triangle ABC qu'au plan du triangle A'B'C'... Et il en allait de même du point d'intersection Q du couple de côtés AC et A'C', ainsi que du point d'intersection R du couple de côtés BC et B'C'... Si bien que ces trois points déterminaient la droite commune aux deux plans de ABC et de A'B'C' et qu'ils étaient, de ce fait, alignés !

Mais c'est alors qu'il fit noter au jeune Rudolf que la figure qu'il venait de tracer et d'analyser n'était en réalité rien d'autre qu'une *figure plane*... En passant par l'espace, il venait de lui montrer un résultat important de *géométrie plane* : les deux triangles ABC et A'B'C' étant donnés, la concourance des droites AA', BB' et CC' entraînait l'alignement des points P, Q, R à partir du moment où il suffisait, avec un peu d'imagination, de considérer la figure comme la représentation d'une configuration spatiale bien choisie ! C'était, lui dit-il le *Théorème de Desargues*. Le Maître chargea d'ailleurs le jeune Rudolf de prouver, à titre d'exercice, la réciproque du théorème : il vit que l'alignement des points P, Q, R entraînait à son tour la concourance des droites AA', BB' et CC'...

Il s'en tira même si brillamment que le Maître décida d'utiliser cette propriété pour lui expliquer la propriété des médianes d'un triangle qui lui tenait tant à cœur. Il commença par lui montrer comment le plan pouvait tenir tout entier *dans l'intérieur d'un cercle...* : considérant le plan P de la géométrie, il y choisit un point H quelconque et dessina un point M de l'espace qui se projetait en H sur P. Il traça ensuite les droites de P passant par H et, dans chacun des plans verticaux contenant l'une de ces droites, il fit apparaître les deux *parallèles* issues du point M (fig. 11a).

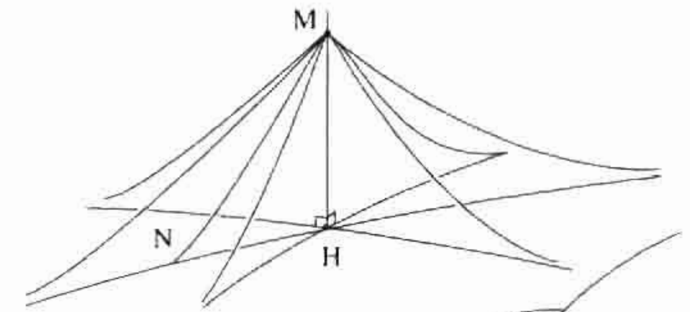


Fig. 11a

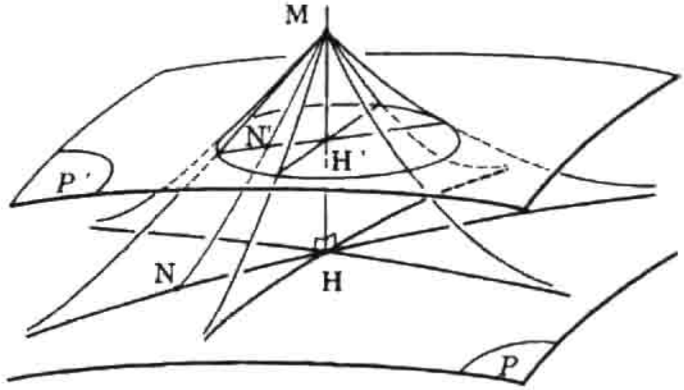


Fig. 11b

Il obtint ainsi une sorte de cône de sommet M dont les génératrices étaient toutes des demi-droites parallèles au plan P, qui délimitaient dans l'espace la zone où se trouvaient les demi-droites joignant M aux points N de P. Puis il montra au jeune Rudolf comment il suffisait d'introduire un nouveau plan P' perpendiculaire à MH pour que toute demi-droite joignant M à un point de P traverse celui-ci en un point N' bien déterminé. Le plan P se ramenait ainsi au domaine de P' dont la frontière n'était autre que le cercle découpé par le cône des parallèles (fig. 11b)...

Une fois en possession de cette représen-

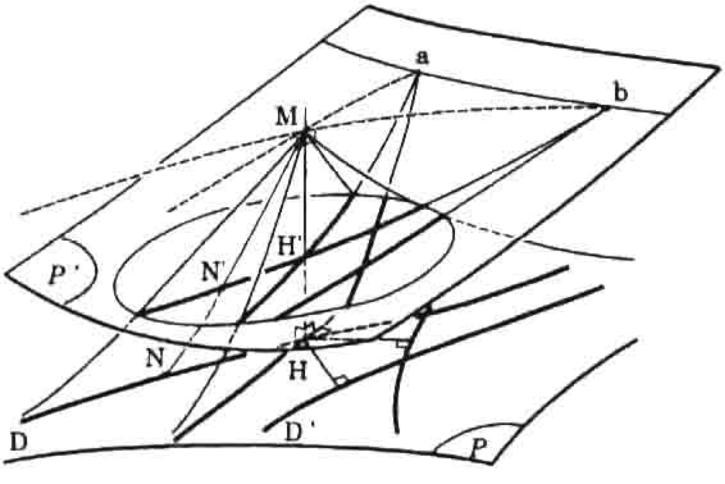


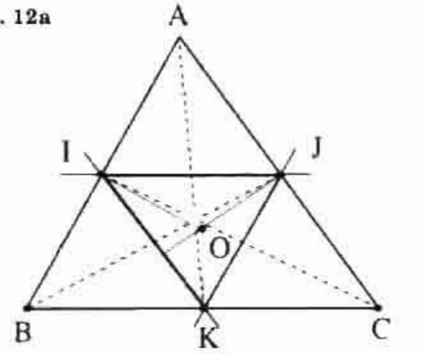
Fig. 11c

tation nouvelle, notre héros s'amusa beaucoup à faire des figures schématisées à l'intérieur du disque, tout en les interprétant comme des situations situées dans un vrai plan sans limites...

Il comprit mieux de cette façon le sens de la notion de parallélisme en voyant comment deux droites parallèles de P avaient l'air de se rencontrer sur la frontière du disque tracé dans P'. Le Maître ne s'en tint évidemment pas là : il l'amena peu à peu à se servir d'un plan P' qui n'était plus exactement perpendiculaire à la droite MH, de telle sorte que si celui-ci coupait les droites menées, à partir de M, perpendiculairement à MH, on voyait se former dans P' une sorte de « ligne d'horizon » où convergeaient les images de chacune des familles de droites de P qui possédaient une perpendiculaire commune passant par H (fig 11c).

C'est dans cette nouvelle représentation qu'il convenait de se placer pour résoudre aisément le problème des médianes. Une fois la situation analysée dans le plan P (figure 12a) il suffisait de la regarder dans

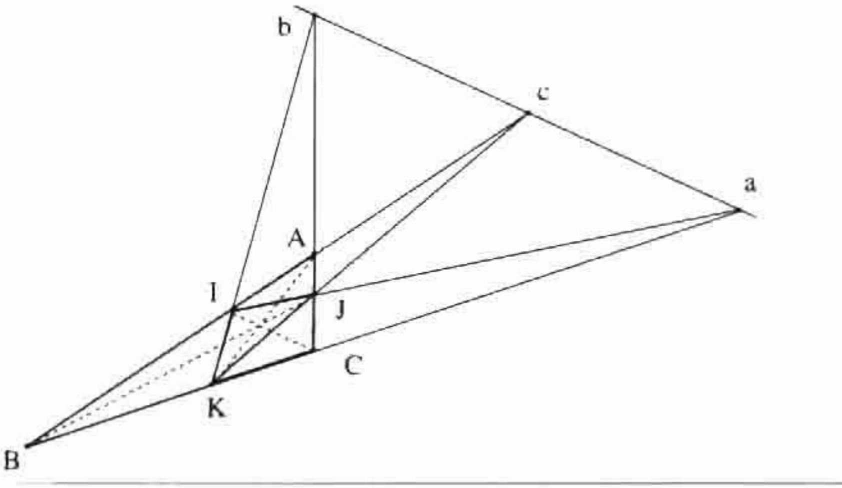
Fig. 12a



un plan P' placé de manière à ce que le point H coïncide avec le point de concours O des médiatrices du triangle ABC : comme ces médiatrices étaient des perpendiculaires communes aux côtés et aux droites des milieux, le jeune Rudolf vit apparaitre dans P' une curieuse figure (figure 12b) dans laquelle chacune des droites des milieux coupait le côté opposé en un point situé sur la « ligne d'horizon »...

Il n'eut alors aucun mal à comprendre pourquoi les médianes étaient concouran-

Fig. 12b



tes, puisque la configuration face à laquelle il se trouvait n'était pas différente de celle que le Maître lui avait fait étudier dans la réciproque du théorème de Desargues ! Rassuré sur les médianes, il apprit encore beaucoup d'autres choses passionnantes auprès du Maître de la géométrie dans l'espace... Il se tourna ensuite vers le second Maître... : c'était le maître des *constructions géométriques*.

Il lui posa les questions qui le préoccupaient encore : les secrets des constructions, le mystère de la mesure des grandeurs et du double-décimètre, le problème des médianes et du tiers d'un segment, etc., etc. Bref : il posa la question du sens... Ah oui ! le sens... grommela le Maître des *constructions géométriques*. Puis il réfléchit longuement et décida de lui expliquer les constructions de la géométrie supérieure... Il commença par lui dévoiler les secrets du *compas rectiligne* et de la *règle courbe*.

L'utilisation du *compas rectiligne* était particulièrement simple : c'était une sorte de glissière servant à tracer les points situés à une distance constante d'une droite fixée (fig 13). On obtenait de cette façon de jolies courbes qui *n'étaient pas des droites*, puisque les vrais rectangles n'existaient pas. Seule la géométrie supérieure savait les distinguer ! Le jeune Rudolf se rappela alors avec tendresse ses premiers maîtres qui l'obligeaient à tracer soigneusement ses droites en appliquant bien scrupuleusement la mine du crayon le long du bord de la règle, car il comprit à ce moment-là que le moindre écart ne lui faisait pas tracer autre chose que les courbes du *compas rectiligne* !

Il eut plus de mal à comprendre l'usage de la *règle courbe* car son principe reposait sur la considération de toute une famille de droites *parallèles entre elles*. Le Maître commença par lui en faire tracer quelques-unes, puis il lui fit dessiner tous les symétriques d'un point A par rapport à ces droites ; les images étaient situées sur une sorte de cercle de rayon infiniment grand et que l'on aurait pu tout aussi bien prendre pour une droite, tant la courbure en était faible (fig 14)...

Le jeune Rudolf apprit ainsi à reconnaitre un *horocycle*, ligne très particulière dont le Maître lui détailla les propriétés... Il lui offrit par la même occasion l'une de ses nombreuses règles courbes et lui permit de tracer à sa

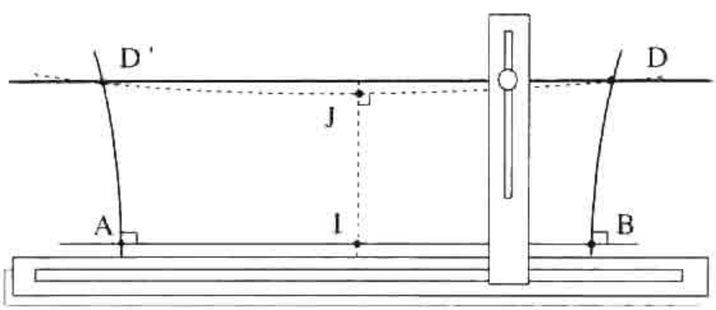


Fig. 13

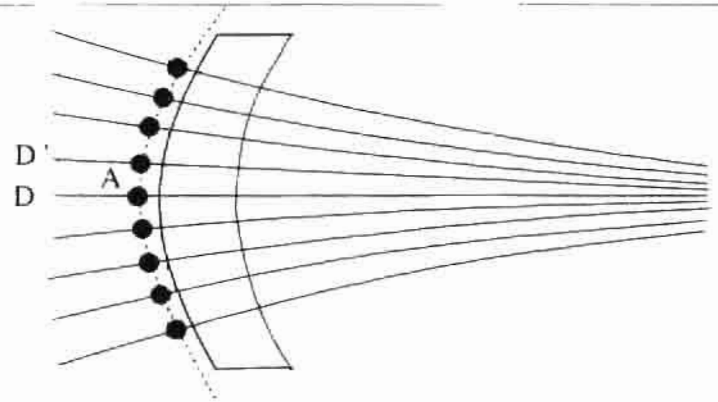
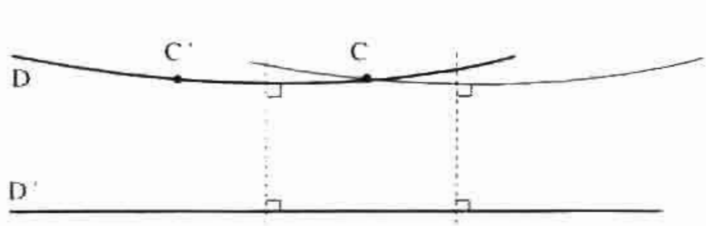


Fig. 14

guise les *horocycles* dont il pouvait avoir besoin. Le jeune Rudolf se remit ainsi à la construction de son double-décimètre et au partage d'un segment en trois ou cinq parties égales...

Ses espoirs furent d'ailleurs vite déçus : le Maître lui confia que ces nouveaux instruments n'étaient en réalité pas plus efficaces que la simple règle et le compas ! Pour le consoler, il entreprit de lui livrer des méthodes de construction réservées habituellement aux éléments les plus brillants de la montagne des mathématiciens. Il commença par lui expliquer une méthode permettant de tracer la perpendiculaire commune à deux droites données qui n'étaient ni sécantes ni parallèles (fig 15a).

Après analyse de la figure formée par les deux droites D et D' dont on cherchait à construire la perpendiculaire commune, on pouvait remarquer qu'en traçant l'image de l'une d'elles (par exemple D) dans la transformation obtenue en composant deux symétries quelconques par rapport à des droites perpendiculaires à D', la nouvelle droite dessinée coupait D en un point C... Il suffisait donc de chercher le point C' de D dont l'image était C, pour disposer (sur cette droite D) de deux points C et C' situés à une même distance de D' : la perpendiculaire cherchée



ne pouvait être que la médiatrice du segment CC'...

Dans le même temps, le Maître révéla au jeune Rudolf un moyen inattendu pour construire les parallèles à une droite issues d'un point B. Cette construction (que notre héros avait longtemps et vainement cherchée) était très simple, bien que difficile à démontrer. Elle consistait à utiliser un quadrilatère ABCD possédant trois angles droits : on obtenait une parallèle au côté AD en reportant tout simplement au compas la longueur AD à partir du point B, de façon à couper CD en un point M ! La droite BM était alors une des deux parallèles recherchées...

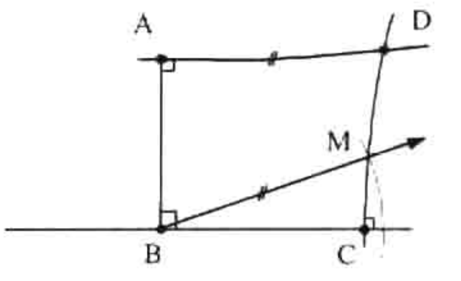


Fig. 15b

Le jeune Rudolf apprit ensuite des tracés auxquels il n'aurait même pas songé, comme par exemple celui de la droite TS qui était *simultanément parallèle à deux droites* D et D' données. Il lui suffisait de remarquer que la bissectrice de l'angle formé par D et D' était (par symétrie) perpendiculaire à la droite cherchée TS (fig.15c).

Dès lors, en traçant une *autre parallèle* à D à partir d'un point N quelconque de D', il retrouvait une configuration où TS était simultanément parallèle aux deux côtés d'un angle de sommet N, et donc où TS était perpendiculaire à la bissectrice de cet angle... Une fois ces deux bissectrices tracées la droite cherchée TS n'était plus que la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Bien que de telles constructions soient plus théoriques que pratiques (car elles mettaient en fait en jeu des éléments d'une longueur inaccessible...) elles fascinaient le jeune Rudolf. Il se mit à rêver aux polygones réguliers les plus étranges. Il s'inventa des triangles équilatéraux et des hexagones réguliers dont les sommets étaient « à l'infini », c'est-à-dire des polygones dont les sommets n'existaient plus et dont les côtés adjacents étaient en fait deux à deux parallèles ! (fig. 16a et 16b).

Fig. 15c

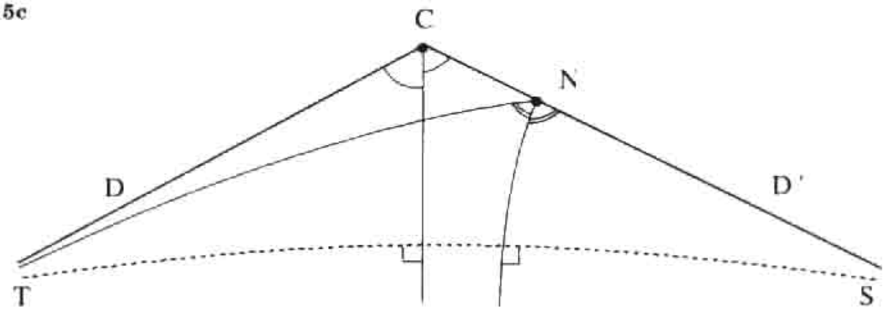


Fig. 16a

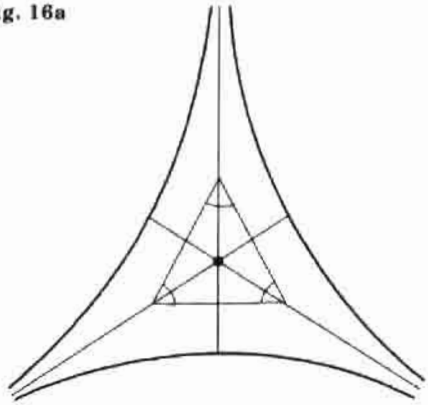
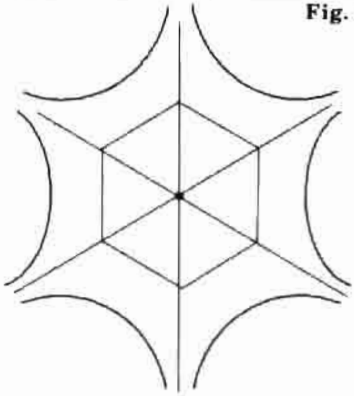


Fig. 16b



C'est alors qu'il comprit que de telles figures ruinaient les espoirs qu'il avait placés dans les propriétés des médianes ! L'exemple limite du triangle équilatéral - infini - suffisait en effet à le convaincre que, bien que les médianes soient effectivement toujours concourantes, elles n'avaient plus aucune chance de se couper au tiers de leur longueur ! Il se tourna vers le troisième Maître... : c'était le maître de l'*algèbre et des nombres*. Il lui posa les questions qui le préoccupaient toujours : les secrets des constructions, le mystère de la mesure des grandeurs et du double-décimètre, le problème du tiers d'un segment, etc., etc. Bref : il posa la question du sens...

– Ah oui ! le sens... grommela le Maître de l'*algèbre et des nombres*. Puis il réfléchit longuement et décida de lui expliquer les secrets de l'algèbre et des nombres... Il commença par lui dire qu'à son avis seuls les nombres existaient vraiment et que la géométrie n'en était qu'une manifestation secondaire et parfaitement anecdotique... Que l'important était avant tout de construire des ensembles d'objets abstraits : on se fixait uniquement pour règle de savoir les ajouter ou les multiplier entre eux et, une fois ce point admis, on pouvait toujours envisager de placer de tels nombres sur une ligne :

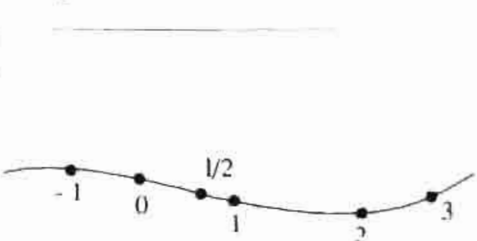
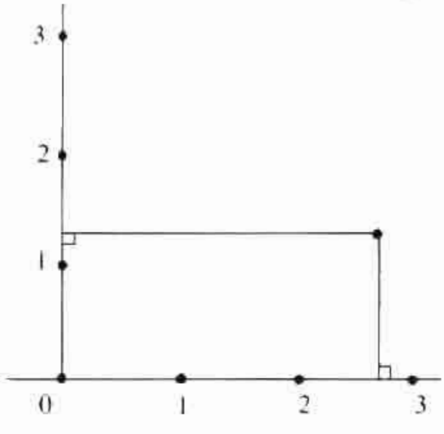


Fig. 17

Il suffisait pour cela de supposer que l'on s'était donné en outre une loi permettant de les ranger les uns derrière les autres de façon à ce que leur ensemble ne laisse subsister aucune lacune entre eux... C'était là, à peu de choses près, l'*ensemble des nombres réels* ; ces nombres qui s'inscrivaient sur le double-décimètre et dont on pouvait, à l'occasion, se servir pour repérer des longueurs...

Cela étant, l'important était *l'algèbre*, et tout particulièrement les espaces de polynômes ou de fractions rationnelles dans lesquels nombres et lettres se combinent pour donner naissance à des équations ! La géométrie n'apparaissait plus que comme l'une des multiples possibilités d'*interpréter* de tels objets ou relations, afin d'en figurer bien imparfaitement certaines propriétés... On avait d'ailleurs trouvé de nombreuses manières de « géométriser » ainsi les données algébriques ! Notamment une façon très simple – dite « non-lobatchevskienne » car elle n'obéissait plus à la propriété classique des parallèles – dans laquelle le plan pouvait s'obtenir comme simple produit de deux ensembles identiques à l'ensemble des nombres réels. Dans une telle « géométrie » un point n'était rien d'autre qu'un couple de nombres, et les figures élémentaires permettaient aisément d'illustrer les propriétés premières d'équations comme celles du premier ou du second degré.

Fig. 18a



On ne l'enseignait guère au niveau scolaire car elle était, au fond, un peu trop simple Les élèves auraient eu toute possibilité de tricher avec les règles abstraites sur les nombres : en effet, les opérations comme la multiplication se rapportaient aux aires de figures rectangulaires, et on pouvait même – par abus de langage, évidemment ! – assimiler les quotients à certains phénomènes de conservation des rapports concernant les droites parallèles !

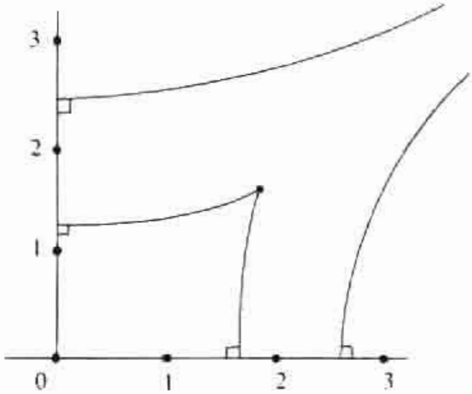
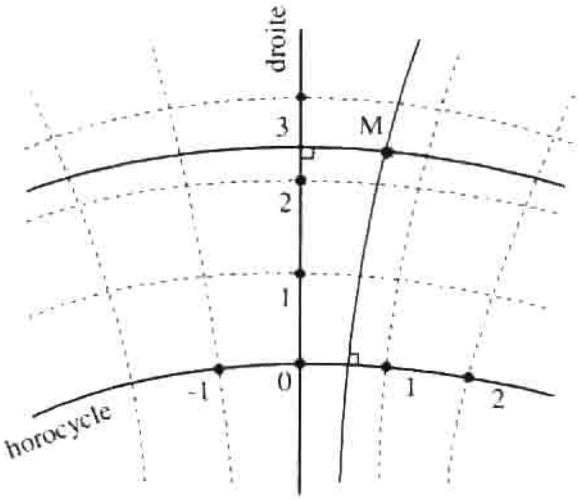


Fig. 18b

Heureusement, il n'en allait pas de même en géométrie naturelle puisque le plan ne pouvait plus apparaître comme le produit de deux droites. On pouvait effectivement associer à chaque point du plan un couple de nombres en utilisant convenablement ses projections sur deux droites mais, à l'inverse, cette application ne pouvait être capable d'atteindre tous les couples possibles de points car certaines des perpendiculaires dressées à partir des deux droites ne se coupaient jamais Il fallait procéder différemment. On pouvait par exemple utiliser les *horocycles* en remarquant que la donnée d'une de ces courbes étranges et d'une droite perpendiculaires à celle-ci constituait une sorte de repère dans lequel chaque point pouvait être rapporté à un couple de nombre. On obtenait en effet un «quadrillage» du plan en considérant la famille des droites perpendiculaires à l'horocycle de base ainsi que la famille des horocycles directement perpendiculaires à la droite initiale. Cela permettait bien d'utiliser la géométrie pour représenter les phénomènes algébriques ou numériques, mais le double-décimètre était tout aussi légitimement porté par *une droite* que par *un horocycle* ! Le jeune Rudolf ne comprenait plus grand chose à la mesure des longueurs et faillit bien renoncer à toutes ses réflexions sur la possibilité de partager un segment en parties égales (fig 19)...

S'amusant de son désarroi le Maître finit par lui expliquer en quoi son rêve d'enfant était vain... Il aurait effectivement pu construire un double-décimètre avec sa règle et son compas s'il avait travaillé sur une courbe *de type horocycle*, mais en se fixant le découpage d'un segment sur une droite il était tombé en fait sur un problème impossible ! On savait depuis longtemps que les points « constructibles » à l'aide de la règle et du compas étaient ceux qui s'obtiennent à l'aide de relations du second degré lorsque l'on réussit à choisir une représentation convenable... Malheureusement pour lui la représentation précédente n'était utilisable qu'à condition de *ne pas prendre* directement les longueurs sur la droite de base : il fallait relier les « translations » (obtenues en composant deux symétries perpendiculaires à la droite) à la *multiplication* des longueurs ! C'est



seulement à cette condition que l'on pouvait caractériser les nombres constructibles, si bien que le *tiers* ou le *cinquième* d'un segment apparaissaient comme des extractions de racines cubiques ou cinquièmes... et ne faisaient plus partie des éléments accessibles à la règle et au compas.

*
* *

Après tout cela notre héros acheva les études qui lui permirent de faire enfin partie de la *noosphère*. Avait-il les réponses complètes à toutes ses questions ? Avait-il le secret de la mesure des grandeurs et du double-décimètre ? Avait-il le secret de toutes les constructions géométriques ? Avait-il le secret du sens ? Sans doute pas. Et, à mon avis, il cherche toujours et cherchera longtemps encore les solutions à de pareils problèmes...

Mais vous le rencontrerez peut-être un jour, chevauchant parmi des hommes et des femmes élégants et graves, à l'occasion de l'un des colloques ou débats qui agitent la *noosphère*. Vous pourrez sans doute, à votre tour, l'interroger sur les mystères de la mesure des longueurs et du double-décimètre, sur les constructions à la règle et au compas,... et vous pourrez même lui demander les secrets du sens !... Mais un conseil : ne lui dites surtout pas qu'il fait partie de la *noosphère... vous risqueriez fort de le mettre en colère !*