REPERES - IREM . N° 18 - janvier 1995

GÉOMÉTRIE EN MOUVEMENT

Jean-Claude DANIEL
Irem de Reims

Représentation, démonstration

Malgré l'importance de l'image dans l'activité géométrique, le dessin, représentation visuelle de concepts ou modèles, reste parfois considéré comme élément de " second ordre " par des mathématiciens, tant en théorie qu'en pratique.

L'attitude courante consiste à considérer l'imagerie (figures, dessins, graphiques, schémas, écrans...), au mieux comme aide heuristique dans la recherche d'une preuve formelle, en particulier en géométrie, mais au pire comme la source de chaînes d'inférences erronées.

C'est ainsi que N. Tennant, logicien, écrit : " La figure est seulement objet de découverte de certains enchaînements d'inférences. Elle n'a aucune place dans la preuve en tant que telle. La preuve est un tableau fini de déclarations établies selon les règles syntaxiques reconnues, conduisant à l'assertion visée. "

Cette position dogmatique ne se retrouve-t-elle pas partiellement dans l'enseignement traditionnel où la forme scolaire de la démonstration estompe souvent la richesse et la variété des processus de pensée que les élèves ou étudiants sont en mesure d'exercer ?

Il est certes légitime de s'interroger sur la validité de preuves utilisant de manière cruciale diagrammes, graphes, dessins... Il est aussi indispensable de se convaincre que les différentes formes de représentation visuelles sont fondamentales, non seulement comme outils heuristiques ou pédagogiques, mais comme éléments constitutifs du sens même de l'objet de connaissance ainsi représenté.

Comment réduire la Géométrie et son enseignement à des chaînes d'inférences formelles, quand chacun sait que le dessin est l'outil naturel qui favorise l'envie de chercher, d'essayer, de conjecturer, de découvrir et *donc* de prouver ?

Géométrie et mouvement

L'idée du mouvement en géométrie n'est pas nouvelle, puisque les machines à tracer, des grecs jusqu'à aujourd'hui ont été nombreuses, certaines réservées à un seul type de tracé (dont la règle ou le compas !), d'autres plus générales, plus ou moins souples d'emploi. L'outil informatique, ordinateur et logiciels de Géométrie, s'inscrit dans cette filiation.

Le mouvement comme élément de preuve dans l'établissement d'une propriété géométrique apparaît au XVII^{e} siècle (Bkouche 1991). En 1741, Clairaut dans ses *Eléments de géométrie* donnera à voir comment on est parvenu par le mouvement à découvrir certaines propriétés, n'hésitant pas à " tirer " sur certains points ou certaines lignes, et à " déformer " certaines figures, vocabulaire sensible pour tout utilisateur actuel de *Cabri* et autre *Wingéom*.

Plus près de nous, Emile Borel en 1905, parmi d'autres mathématiciens, propose d'enseigner la géométrie élémentaire à partir du mouvement comme en témoigne cet extrait de préface d'un ouvrage de géométrie à l'usage des Ecoles Normales primaires, des Ecoles Primaires supérieures, ...et des Lycées et Collèges de jeunes filles.

> " *L'idée que l'enseignement de la géométrie élémentaire doit être renouvelé gagne chaque jour du terrain. Elle se heurte cependant encore à de sérieuses résistances, de la part d'excellents esprits qui redoutent la disparition de l'édifice logique bâti sur les* Eléments d'Euclide. *Ne vaut-il pas mieux, disent-ils, continuer à faire à cet édifice des modifications, des réparations, au lieu de le démolir pour reconstruire à nouveau ? Tel n'est pas mon avis, et je suis fermement convaincu que, dans quelques dizaines d'années au plus tard, l'enseignement de la géométrie aura une base plus moderne. Il trouvera cette base dans les travaux des grands géomètres et analystes du XIX^{e} siècle, qui nous ont appris que : La géométrie est l'étude du groupe des mouvements. Substituer de plus en plus l'étude dynamique des phénomènes à leur étude statique, est d'ailleurs une tendance essentielle de l'esprit moderne; c'est l'idée d'évolution qui domine davantage la pensée contemporaine.*
>
> *Je ne prétends pas offrir ici un édifice complet, basé sur ces nouveaux principes ; cette tâche me paraît trop lourde pour un seul homme, et je suis convaincu que c'est seulement après qu'une méthode a subi pendant longtemps l'épreuve de la pratique que l'on peut codifier, pour ainsi dire, le résumé de l'expérience des nombreux maîtres qui l'ont appliquée.*
>
> *C'est par cette voie que la géométrie euclidienne est arrivée peu à peu au degré de perfection logique qui fait aujourd'hui notre admiration et rend certains d'entre nous si sévères pour les tentatives faites pour la remplacer.*
>
> *Je crois qu'il est bon de conserver cet édifice euclidien jusqu'au jour où l'on pourra le remplacer par un édifice aussi parfait, mais s'harmonisant davantage avec la science actuelle et en même temps mieux adaptée aux exigences de la société moderne. Toutefois, s'il me paraît utile de conserver l'édifice euclidien, il me paraît indispensable d'en réserver l'étude aux jeunes gens d'esprit assez mûr et assez familiers avec la Géométrie pour ne pas être rebutés par son aridité. Qu'on mette alors entre leurs mains la Géométrie de M. Hadamard, par exemple ; ils seront à même d'en comprendre et d'en apprécier la beauté. Mais à ceux qui trouveraient un tel ouvrage trop complet ou trop difficile – et ce sera le cas de presque tous les débutants, car ce n'est pas pour eux que M. Hadamard a écrit –, je ne pense pas qu'il faille offrir des*

réductions d'un tel livre ; ces réductions seraient aussi abstraites et par suite d'abord aussi difficiles, tout en ne pouvant conserver la profondeur qui légitime cet emploi de l'abstraction.

C'est pourquoi j'ai cherché à écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacement sont invoquées le plus souvent possible. Les démonstrations qui en résultent sont plus simples et me paraissent plus claires que les démonstrations euclidiennes. J'espère que les maîtres de l'enseignement secondaire et de l'enseignement primaire accueilleront favorablement ma tentative ; attachant un prix particulier aux remarques basées sur l'expérience de ceux qui approchent les élèves, je serai heureux s'ils veulent bien me communiquer leurs réflexions et leurs observations sur ce livre. "

Emile BOREL

Le contenu de l'ouvrage montre que Borel ne se limite pas à l'utilisation du groupe des déplacements, mais utilise plus largement des mouvements avec déformation de figures, dans le plan comme dans l'espace. La translation et la rotation sont définies et utilisées comme mouvements de glissement plan sur plan, l'un fixant le glissement d'une droite sur une droite, tandis que l'autre fixe le glissement d'un cercle sur un cercle (la périodicité dans ce second cas faisant apparaître le temps).

Comment ne pas rapprocher ce point de vue de celui des concepteurs de *Cabri* en 1986 :

" Le projet consiste à développer un système interactif de traitement de figures géométriques, telles que celles rencontrées dans l'enseignement secondaire. Les primitives de dessin de figures géométriques [...] *seront disponibles... Il sera possible de modifier l'ensemble d'une figure en ne changeant que les caractéristiques des éléments de base qui l'ont déterminée.*

Ce logiciel [...] *permettra aux élèves de tracer rapidement des figures... les incitant à multiplier les exemples et à constater les variations (ou la constance)* [...] *lors du changement d'éléments de la figure. "*

Jean-Marie LABORDE

Dessins, états, figures

On confond souvent comme l'exprime Colette Laborde (ICME 92), la figure avec sa trace matérielle sur le papier ou sur tout autre support. On sait bien que le raisonnement porte autant sur celle-ci que sur celle-là.

Quand un problème de géométrie est posé, chaque dessin réalisé, quelqu'en soit le support physique, n'est qu'un état de la figure. Celle-ci est alors l'invariant géométrique dans les changements d'état susceptibles de se produire, au regard de la question mise à l'étude.

Donner du sens à un problème de géométrie, c'est donc à la fois en délimiter le contexte et s'en faire une figuration mentale où la permanence de certaines propriétés s'oppose à la variabilité des dessins.

Par " figure " j'entendrai pour la suite " image mentale " au sens d'Audibert (ICME 92), chaque trace matérielle de cette figure apparaissant comme l'un des états de l'ensemble des états que constituent tous les dessins possibles, répondant aux contraintes énoncées.

Les élèves ont bien l'intuition que ce qui leur est en général demandé, c'est découvrir que les données du texte mettent en œuvre des propriétés communes à tous les dessins réalisables. Ils ont tout à fait conscience que la multiplicité des feuilles sur lesquelles ils travaillent séparément ne les empêchent pas de chercher le même problème à condition d'avoir une culture de représentation commune. Mais comment peuvent-ils s'assurer de l'existence d'invariants géométriques quand les dessins réalisés sont épars ?

L'argumentation, la démonstration, est une réponse possible. Elle intervient pour établir le caractère général de la propriété étudiée. C'est ce caractère unificateur qui doit être perçu par la classe pour que les élèves acceptent de s'y investir. Cependant, nous constatons tous que pour nos élèves, il ne suffit pas qu'une propriété soit démontrée pour devenir mobilisable il faut aussi et surtout que se soit construite une image mentale, représentation figurée de cette propriété, qui vient s'inscrire dans un lexique personnel explicite ou non, au même titre qu'un théorème énoncé et justifié.

Papier et (ou) écran

Donner du sens à la figure, c'est un enjeu fondamental de la géométrie et donc de son enseignement. Mettre le dessin en mouvement pour se figurer les invariances dans les changements d'états, contribue grandement à cette prise de sens. Au travers de logiciels comme *Cabri, Wingéom*... l'écran de l'ordinateur est un lieu privilégié du dessin dynamique, où l'utilisateur peut et doit réaliser le contrôle des déplacements ou déformations.

Cependant l'écran de l'ordinateur ne remplace pas la feuille, le crayon et la main qui dessine. Il apporte une aide complémentaire, rendant possible des investigations qui sans lui seraient coûteuses en temps et parfois en lisibilité. L'implication physique de l'élève par la main autant que par les yeux, participe de sa compréhension de la figure. Il suffit d'ailleurs de regarder se dérouler une activité de recherche pour constater qu'il y a le plus souvent de nombreux passages de l'écran au papier ou inversement. Dans un cas comme dans l'autre, le dessin représente un instantané de la figure ; les changements d'état susceptibles de se produire (mouvements, déformations) doivent d'abord être imaginés par celui qui cherche. L'ordinateur rend le changement immédiat, réversible, et observable ; c'est l'une de ses qualités principales.

Le crayon qui court sur le papier, dessine la ligne en même temps que le point qui la génère se déplace dans le plan de manière continue. Le point joue ici un rôle essentiel. Dans ses tracés de primitives, droites, cercles... l'ordinateur trace pour celui qui regarde, " d'un bloc ". Le point disparaît dans cette circonstance. C'est un changement de point de vue remarquable qui s'il engendre des difficultés (il faudra préciser les points d'intersection, points sur un objet...) s'avère aussi riche d'enseignement.

Un exemple que m'a confié un collègue enseignant dans un collège, illustre bien ce propos. Lors d'une séance d'exercice le professeur se propose de faire utiliser la propriété d'équidistance de la médiatrice de deux points. La propriété quoique démontrée depuis longtemps, et écrite au répertoire des propriétés usuelles, reste difficilement mobilisable pour certains d'élèves. Le professeur décide d'une séance de soutien en salle informatique. Cette séance reste de peu d'effet jusqu'au moment où lassé de tant d'incompréhension il impose à chacun de tracer sous Cabri un segment [AB], sa médiatrice, un point M sur cette médiatrice, les segments [MA] et [MB], fait afficher les distances MA et MB et “ tirer ” sur le point M. Cette vision dynamique de l'équidistance contribue alors à donner du sens à la figure, les plus réticents vérifiant à la main sur le papier qu'on ne les avait pas trahis. L'image mentale de la médiatrice, jusque-là défaillante en sort bien enrichie.

Quelques énoncés illustratifs

La déformation (transformation) des figures dans leurs représentations sur écran ou sur papier, permet au géomètre expert ou débutant de donner du sens à l'objet de son étude dans une relation où le mouvement ou la dynamique revêt une importance particulière. C'est ce point de vue que je souhaite éclairer partiellement au travers de quelques exemples que j'ai classés en quatre rubriques.

Première rubrique

Il s'agit de mettre en évidence par le mouvement, l'existence d'un objet absent physiquement, mais dont la présence potentielle constatée, constitue l'invariant de la figure.

Énoncé n°1

> On considère trois points A, B, C non alignés du plan. M étant un point donné, tracer N, P, Q tels que A, B, C soient milieux respectifs de [MN], [NP], [PQ]. Est-il possible de déplacer le point M pour qu'il soit confondu avec Q ?

Le déplacement rapide sur l'écran du point M, met en évidence par persistance rétinienne, le mouvement de pivot de M et Q autour d'un point fixe, pourtant absent du dessin.

Il suffit alors de marquer le point I, milieu du segment [MQ] pour s'assurer dans le

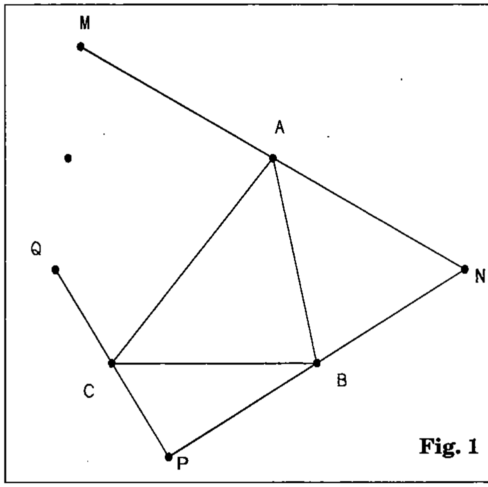


Fig. 1

déplacement de M (changements d'état), que I représente un invariant de figure. Le prouver ne pose alors aucun problème. En traînant sur l'écran M jusqu'en I, on obtient la réponse à la question posée.

La connaissance de la figure se construit. Les compositions de symétries sont en action, sans qu'il soit nécessaire d'y faire explicitement référence.

Il est clair que de nombreux exercices sur papier entrent dans cette catégorie. Il en est ainsi chaque fois qu'il s'agit d'imaginer un alignement ou une cocyclicité par exemple, virtuellement présents (les élèves réalisent en général quelques dessins pour s'assurer de la validité de leur conjecture).

Deuxième rubrique

Le raisonnement prend des aspects multiples. L'une de ses formes, l'examen exhaustif des classes de cas possibles dans une situation géométrique, rendu plus accessible par le mouvement sur l'écran, engendre dans la classe de nouveaux débats de preuve (reconnaissance ou non de l'exhaustivité).

Énoncé n°2

> Deux droites du plan D et D′ se coupent en O. Une distance d étant donnée, quel est l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à D et à D′ est égale à d ?

Cet énoncé a été proposée en classe de première, dans un TP en groupes, accompagné de la suggestion suivante: placez un point M sur l'une des droites, affichez la distance de ce point à l'autre droite ; vous est-il possible de déplacer le point M pour qu'il réponde à la question ?

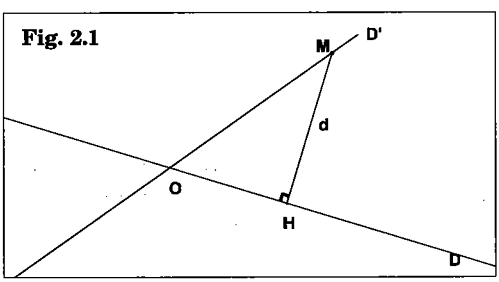


Fig. 2.1

Malgré l'imprécision des mesures affichées par Cabri, tout le monde est vite convaincu de l'éxistence de quatre points I, J, K, L satisfaisant à la condition donnée. Certains groupes imposent leur construction géométrique, et la classe aboutit rapidement au dessin sur écran mais aussi sur papier (fig. 2.2). Le dessin complémentaire du rectangle emboité dans le losange est si tentant que certains le tracent d'emblée. Aucun doute, (IJKL) est un rectangle et (ABCE) un losange ! S'en convaincre nécessitera des échanges d'argumentation entre les différents groupes.

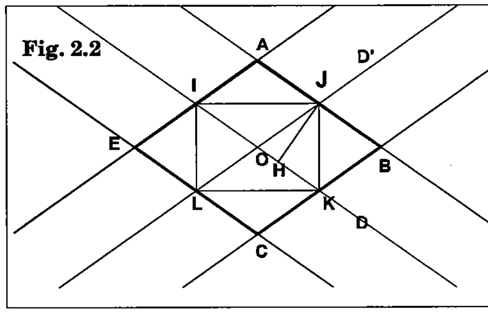


Fig. 2.2

La question de départ (partiellement oubliée), est alors relancée : nous connaissons maintenant quatre points de l'ensemble, mais peut-on en envisager d'autres ? comment s'en assurer ?

L'un des groupes fait la proposition : “ il suffit de faire sur d'autres droites passant par O, le déplacement d'un point comme sur D ou D′ ”. Chacun se saisit de la proposition et l'on se retrouve dans le dispositif suivant :

Dans ce dispositif, il faut “tirer” sur le point M, de O vers l'extérieur pour tenter d'obtenir MH + MH′ = d, M se déplaçant sur D”.

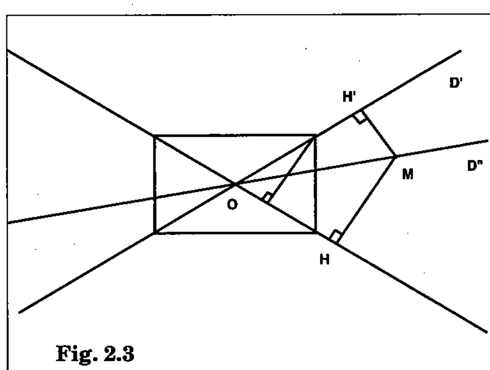


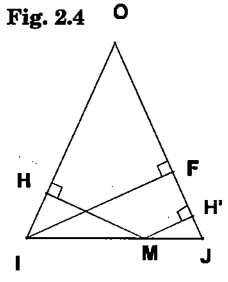
Fig. 2.3

Deux surprises :

– L'une pour le professeur. La classe se forge très vite la conviction que sur chaque droite D" la somme des distances évolue continuement dans le déplacement du point M, qu'il y a deux positions de M favorables symétriques par rapport à O, et que le déplacement par pivot autour de O de la droite utilisée assure l'exhaustivité et permet donc de trouver tous les points possibles, sur une ligne fermée du plan. Des propositions surgissent d'ailleurs spontanément, liées à la conviction que ne pouvant être ni trop loin, ni trop près, les points cherchés "sont sûrement sur un cercle" !

– L'autre pour les élèves. Dans le déplacement de M sur D″, la position favorable semble réalisée quand le point est sur un côté du rectangle dessiné précédemment. La discussion sur ce point sera très animée. Le résultat paraît à certains "trop beau pour être vrai" et d'autre part l'idée du cercle reste si forte qu'il est bien difficile d'y renoncer.

Fig. 2.4



La démonstration du résultat partiel sera établie collectivement en utilisant les supports papier et tableau.
(OIJ) est un triangle isocèle et M un point de [IJ]. L'aire de (OIJ) est égale à $1/2 \times OJ \times IF$, mais aussi à $1/2 \times OJ \times MH + 1/2 \times OJ \times MH'$, ce qui assure $MH + MH' = IF = d$.

La réponse à la question de départ s'impose alors ; l'ensemble des points M est le rectangle (IJKL). La question "est-on sûr d'avoir obtenu l'ensemble des points qui conviennent ?", relancera un bref débat d'exhaustivité :

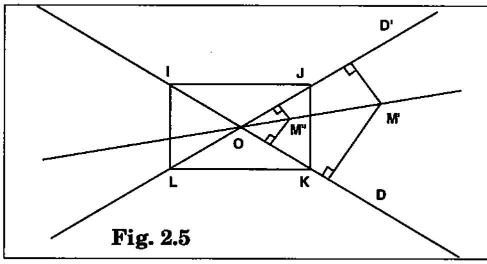
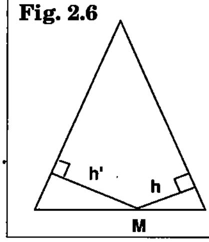


Fig. 2.5

→ Les points du rectangle conviennent, on l'a démontré.
→ Si l'on prend un point à l'intérieur du rectangle, la somme des distances est trop courte et à l'extérieur trop longue, comme il est facile de l'établir.
→ Les seuls points qui conviennent sont donc ceux du rectangle.

Pour beaucoup d'élèves, le dessin dans lequel h + h′ est une constante a pris le statut d'archétype d'une *figure* (configuration ?), image mentale d'une propriété devenue mobilisable.

Fig. 2.6



Les énoncés de ce type sont nombreux (médiatrice, régionnement, distance ou aire minimale ou maximale...), qui conduisent à examiner un nombre fini de "cas de figure" entrainant la conclusion par exhaustivité.

Troisième rubrique

Les constructions répètées sur un même dessin (papier ou écran), permettent de se figurer un objet mis à l'étude. C'est le cas par exemple dans de nombreuses recherches de lieux géométriques. Lorsque le comportement d'un point est piloté par le déplacement d'un autre assujetti à certaines conditions, les logiciels de géométrie permettent la représentation en direct du déplacement du premier quand on modifie la position du second, donnant l'idée complémentaire de leurs vitesses de déplacement respectives.

Dans les deux cas, les changements d'état entrent directement dans la compréhension du problème posé.

Énoncé n°3

> D et D′ sont deux droites du plan, perpendiculaires en O, et d une distance fixée. Deux points M et N sont choisis sur D et D′ tels que MN = d. I est le milieu de [MN]. Quel est l'ensemble des points I quand [MN] varie ?

Ce texte est souvent utilisé, dans une démarche d'analyse et synthèse. Il s'appuie sur la propriété du triangle rectangle (MON) dans lequel IO = 1/2 MN = d/2.

Le lieu de I est le cercle de centre O et de rayon d/2.

L'intéret du problème est bien relancé par une simple "variation". Que se passe-t-il si l'on déforme la figure en inclinant l'une des deux droites sur l'autre ?

Énoncé n°3 bis

> D et D′ sont deux droites du plan, *non perpendiculaires*, sécantes en O, et d une distance fixée. Deux points M et N sont choisis sur D et D′ tels que MN = d. I est le milieu de [MN]. Quel est l'ensemble des points I quand [MN] varie ?

La propriété géométrique évoquée précédemment dans le triangle (MON), n'est plus utilisable celui-ci n'étant plus rectangle en O. Ce second énoncé, proposé à des élèves de terminale, comme à des professeurs stagiaires conduit à un même réflexe : utiliser l'analytique.

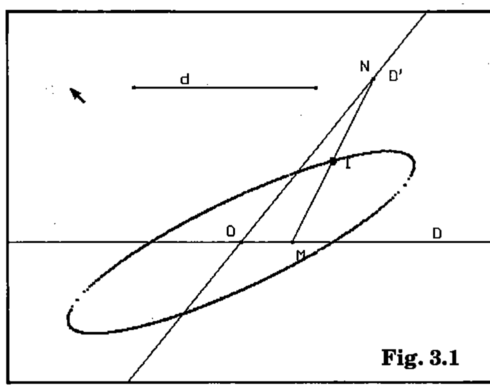


Fig. 3.1

Les élèves de terminale, sans présupposé sur la nature de la courbe lieu de I, inclinent "naturellement" la verticale sur l'horizontale, et choisissent un repère (O, i, j), l'un des axes étant horizontal et l'autre vertical. Ce mauvais choix conduit à bien des difficultés. L'examen sur écran du lieu cherché, emporte la conviction qu'il s'agit d'une ellipse, comme le montre la figure 3.1, et surtout que cette ellipse admet comme axes de symétrie les bissectrices de D et D′. Ces bissectrices définissent un autre repère, plus intéressant.

Dans le repére défini par ces deux bissectrices, les équations de D et D′ sont $y = x\tan(a)$ et $y = -x\tan(a)$. On considère $M(x, x\tan(a))$ et $N(x', -x'\tan(a))$. I est donc défini par

$X = 1/2(x + x')$ et $Y = 1/2(x - x')\tan(a)$.

$MN^2 = (x' - x)^2 + (x + x')^2\tan^2(a) = d^2$,

donne par simple remplacement l'équation cartésienne en X, Y de l'ellipse lieu de I :

$4X^2\tan^2(a) + 4Y^2/\tan^2(a) - d^2 = 0.$

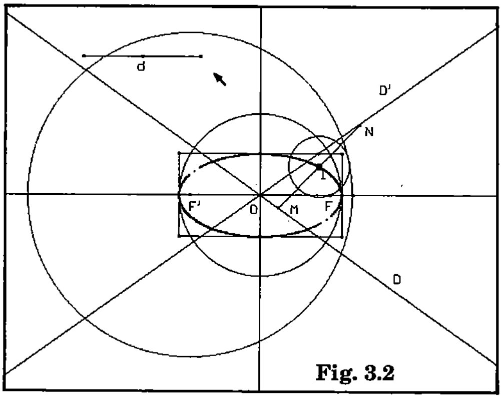


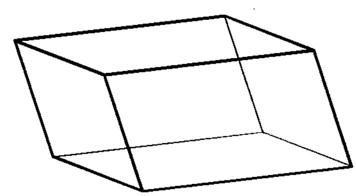
Fig. 3.2

La culture mathématique des professeurs stagiaires est différente, et cela les conduit sans examen complémentaire, sur écran ou sur papier, à l'hypothèse que le lieu de I est une ellipse. Perdre l'orthogonalité des droites D et D′, cela fait référence pour eux, à l'affinité dans le plan, ou à la projection dans l'espace, et par suite le cercle trouvé au début (énoncé 3) devient une ellipse. La nécessité de conserver la distance MN égale à d, engendre un débat, qui déstabilise le point de vue "culturel" précédent. Le choix d'un "bon repère", sachant qu'il s'agit d'une ellipse, ne sera pas plus facile pour les élèves, les positions particulières du point I sur D ou D′ n'étant pas examinées sur papier. Quant à la solution géométrique c'est une autre affaire ! Si le sujet vous intéresse (fig. 3.2)... Cet exemple montre bien qu'une image mentale, même bien installée, peut-être prise en défaut par des automatismes forts.

Quatrième rubrique

Le plan sert de support pour la représentation codifiée de l'espace. Certains "dessins de l'espace" souvent effectués conduisent à des *figures* (configurations) usuelles, dont la connaissance induit aussi des propriétés du dessin effectué, considéré cette fois comme état d'une figure plane. Le théorème de Désargues en est un exemple classique. Pour second exemple, je propose d'utiliser maintenant la modélisation du cube, en s'affranchissant parfois des règles de représentation usuelles. Le support écran n'est ici pas nécessaire, mais les déformations de figures articulées se font de façon plus souple en utilisant l'outil informatique.

Fig. 4



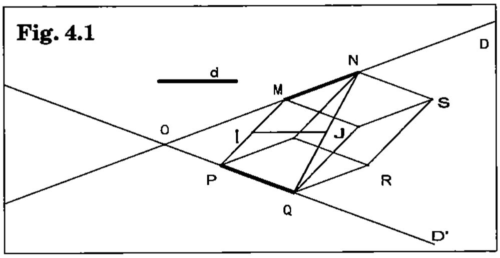
Pour représenter les faces visibles d'un cube, on effectue souvent des tracés comme sur la figure 4. A chaque fois, trois parallèlogrammes associés apparaissent. Trois autres peuvent alors être dessinés (souvent en pointillé), pour représenter les faces cachées. Si deux des trois premiers sont des losanges *du plan*, tous les autres le sont aussi. Cette configuration a des propriétés tout à fait intéressantes en tant que configuration plane.

Énoncé n°4.1

Soient deux droites sécantes D et D′ du plan et d une distance donnée. On considère deux points M et N sur D et deux points P et Q sur D′ tels que MN et PQ soient de même longueur, d. Soient I et J les milieux de [MP] et [NQ]. Qu'observe-t-on pour I et J quand les points M, N, P, Q varient ?

Il s'agit d'un exercice pour lequel de nombreuses solutions sont possibles. En voici une qui utilise la configuration évoquée ci-dessus.

Fig. 4.1



En traçant l'image d'un cube dont deux côtés non consécutifs sont [MN] et [PQ], [IJ] joint le milieu d'une arête au centre du cube, J est donc le milieu du segment qui joint les milieux de [MP] et de l'arête opposée [RS]. Donc IJ = 1/2 × MS = constante, et la droite (IJ) a la direction d'une bissectrice de D et D′ (angles et côtés du losange supérieur fixés.)

Énoncé n°4.2

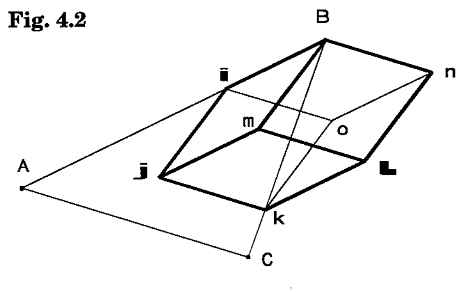
> On considère trois points A, B, C non alignés du plan. Tracer un point I sur [AB] et un point J sur [AC], tels que BI = IJ = JC.

Ce texte, est proposé par G. Polya dans [11], comme modèle de situations à aborder par abandon de contraintes. En voici une autre solution.

La *figure* du cube, dans le cas où l'on représente chaque face par un losange plan, peut encore être d'un réel secours dans cet exercice difficile.

Le problème revient à construire un "cube" dont les directions de deux arêtes (Bi) et (jk) et celle d'une diagonale (BC) sont données, ce qui fixe le tracé à une homothétie près (fig. 4.2). Il restera à trouver celui des "cubes" pour lequel la diagonale est exactement [BC].

Fig. 4.2



Soit donc i sur [AB]. On trace le losange (Bion) tel que (io) soit parallèle à (AC). Quand le cercle de centre o et rayon iB coupe la droite (BC) en k (et un autre point), on termine la construction du cube comme sur la figure 4.2. L'homothétie de centre B qui transforme k en C, permet alors de tracer I et J tels que BI = IJ = JC. L'unicité de forme du "cube" dont trois direction sont fixées, assure l'indépendance du résultat, du point d'intersection k choisi (quand il existe).

Énoncé 4.3

> Soient trois cercles C1, C2, C3 de même rayon r, passant par un même point O, et sécants deux à deux en A, B, C. Montrer que le cercle circonscrit à A, B, C est de même rayon r.

Cet énoncé est proposé par Ross Honsberger dans [6]. Au vingtième siècle,dit-il, on ne peut plus guère espérer découvrir de jolis théorèmes au niveau le plus élémentaire de la géométrie. Cependant R. Johnson semble avoir été le premier à rencontrer le résultat énoncé en 1916.

Plusieurs démonstrations du résultat ont été données. En voici une, utilisant toujours la même configuration.

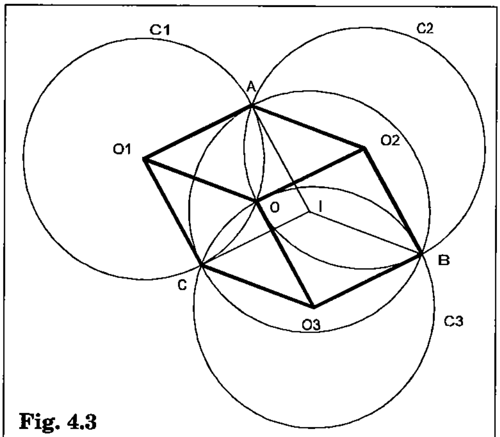


Fig. 4.3

Les longueurs O_1A, O_1C, O_2A, O_2B, O_3B, O_3C, valent toutes r. Les trois losanges dessinés en gras suggèrent la figure du cube. On trace le sommet manquant I, qui est tel que IA = IB = IC = r. I est donc dans le plan, le centre d'un quatrième cercle de même rayon que les précédents, passant par A, B, et C.

Énoncé 4.4

Soit C un cercle de rayon r et M, N, P, Q quatre points distincts de ce cercle. Quatre cercles de rayon r, passant respectivement par M et N, N et P, P et Q, Q et R, se coupent deux à deux en I, J, K, L. Montrer que I, J, K, L sont sur un cercle de même rayon r.

La cocyclicité des points I, J, K, L, dans le cas général de cercles de rayons quelconques, est un résultat connu. Je n'ai pas trouvé trace à ce jour du résultat énoncé ci-dessus.

On trace les rayons O_1M, O_1L, O_1N, O_1I, etc. La configuration "cube-losange" apparaît de nombreuses fois. On trace par exemple A tel que (O_4LAK) soit un losange (donc AK = AL). les vecteurs AK, LO_4, O_1M, NO, O_2P, JO_3 sont égaux. Le quadrilatère ($KAJO_3$) est un parallèlogramme ayant deux côtés consécutifs égaux KA et KO_3. C'est un losange et AK = AJ. On montre de même que AL = AI. A est bien centre d'un cercle de rayon r passant par I, J, K, L.

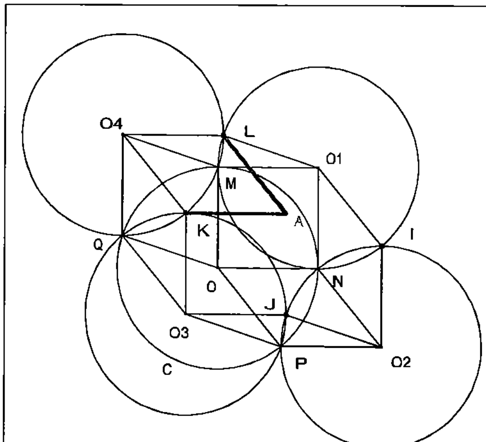


Fig. 4.4

Dans ce dernier exemple, une autre démonstration est possible, utilisant les composées de symétries et le résultat de Johnson. Le tracé du dessin sur écran, n'apporte rien de particulier sinon la possibilité d'essais-erreurs facilement effaçables dans un dessin complexe, et le positionnement des points essentiels par déplacement pour rendre le tout plus lisible.

J'ai tenté ici, par quelques exemples où il est souvent question, de "deux droites et une distance", de montrer que la connaissance des objets de la géométrie élémentaire, est aussi la connaissance de leur figuration. De nombreux dessins sont souvent nécessaires et les passages de l'un à l'autre instaurent une dynamique des changements d'état, constitutive du travail du géomètre, novice ou averti. Si la main reste essentielle, l'ordinateur est une nouvelle "machine à tracer" souple et performante, qui rend cette dynamique particulièrement efficace.

J'emprunterai ma conclusion à G. Chaty dans [4] :

"Lorsqu'on aborde un problème, on doit commencer par l'étudier... en s'aidant de dessins... Mon expérience d'enseignant m'a appris que les étudiants ont rarement ce réflexe... Ils ne sont pas encore assez persuadés que l'activité mathématique appelle ***un déroulement*** *sous les yeux d'images concrètes, créées par le cerveau, la main* [et l'ordinateur !] *suscitant de nouvelles images et de nouvelles idées".*

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUDIBERT Gérard, "Contribution de l'apprentissage de la géométrie à la formation scientifique", *Actes du 7e Congrès International sur l'enseignement des mathématiques,* Québec aout 1992.

[2] BKOUCHE Rudolph, "Variations autour de la réforme de 1902/1905", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 34, 180-213, 1991.

[3] BOREL Emile, *Géométrie à l'usage des Ecoles Normales primaires (programmes de 1905), des Ecoles Primaires supérieures, des aspirants et aspirantes aux Brevets de L'enseignement primaires et des Lycées et Collèges de jeunes filles*, Librairie Armand Colin, Paris 1905.

[4] CHATY Guy, "L'image comme support de recherche en mathématiques", *Quadrature,* n°17, juin 1994.

[5] COXETER H.S.M. et GREITZER S.L., *Redécouvrons la géométrie*, Editions DUNOD, Paris 1971.

[6] HONSBERGER Ross, *Joyaux mathématiques,* vol 1 et 2, Editions CEDIC, Paris 1979.

[7] HONSBERGER Ross, *Mathematical Gems vol III,* Mathematical association of america, USA 1985.

[8] LABORDE Colette, "Enseigner la géométrie : permanences et révolutions", *Actes du 7e Congrès International sur l'enseignement des mathématiques*, Québec août 1992.

[9] LABORDE Jean-Marie, "Projet de géométrie (projet CABRI-GEOMETRE)", dans tirés à part IMAG Grenoble, Avril 1991

[10] LUGON Serge et CHASTELLAIN Michel, *Cabricolage, exploration dans le monde de la géométrie plane*, Editions L.E.P. Loisirs et Pédagogie, Lausanne 1992.

[11] PÓLYA Georges, *La découverte des mathématiques*, Editions DUNOD, Paris 1967.

[12] ZIMMERMANN Walter et CUNNINGHAM Steve, *Visualisation in teaching and learning mathematics*, Mathematical association of america, USA 1990.