
OPÉRONS EN TOISES, PIEDS, POUCES

*Donner du sens aux techniques
d'opérations et de conversion
en exploitant les unités de mesure
de l'Ancien Régime*

Patrice JOHAN
IUFM de Créteil

A l'I.U.F.M. de Créteil, une équipe de Formateurs en Mathématiques mène, sous la direction d'Evelyne Barbin, une recherche sur les possibilités d'apport de l'Epistémologie et de l'Histoire des Mathématiques à la formation des enseignants du premier degré.

Le présent article relate quelques activités menées dans ce cadre avec des étudiants de première et de deuxième année de formation de Professeurs d'Ecole.

La numération décimale, les écritures à virgule, les mécanismes opératoires, les unités de mesure, objectifs fondamentaux des programmes de Mathématiques des classes élémentaires, sont autant de notions dont l'histoire – longue et riche – est trop souvent méconnue. C'est autour de quelques aspects de cette histoire que s'articulent les activités présentées ci-après.

En 1585, l'ouvrage de Simon Stevin, *La Disme*, obtint un formidable succès. On peut dire qu'il y franchissait le dernier pas dans l'écriture des nombres décimaux :

2 (0) 1 (1) 4 (2)

pour ce qui s'écrivait avant lui 2^{14} (chez Viète au XVI^e siècle, par exemple) ou $2 \frac{14}{100}$ (chez Al Kashi au XV^e siècle) et qui aujourd'hui s'écrit 2,14 en France et 2.14 dans les pays anglo-saxons.

Ce succès est évidemment dû à la remarquable adaptation de cette nouvelle écriture aux techniques opératoires alors employées pour les entiers ("La vulgaire manière de compter pour les entiers", comme l'écrit Stevin).

Lorsque le 11 Floréal de l'an III (30 Avril 1795) Pierre Simon de Laplace annonce à

OPERONS EN TOISES,
PIEDS, POUCES

l'École Normale Supérieure le décret de la Convention Nationale instaurant le système métrique, il met en avant les deux inconvénients majeurs des anciennes unités de mesure :

- Leur caractère non universel : "On ne peut pas savoir le nombre prodigieux de mesures en usage, non seulement chez les différents peuples, mais dans la même nation..."
- Leur mauvaise adaptation à la numération décimale : "Leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs..."

Le savant révolutionnaire (futur Marquis d'Empire et futur Académicien de la Restauration !) qualifie le "nouveau système de poids et mesures que les savants ont offert à la Convention Nationale [d'] incomparablement plus simple que l'ancien [et qui] présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance."

Ces deux progrès décisifs font qu'aujourd'hui (quatre siècles après Stevin, deux siècles après Laplace) l'ensemble de l'édifice est extrêmement cohérent : les conventions d'écriture des nombres décimaux, les techniques opératoires usuelles, les conversions des mesures sont si bien adaptées les unes aux autres qu'il n'est pas rare de constater des dérives pédagogiques dans lesquelles l'apprentissage de ces techniques et conventions prend la place de la réflexion sur le sens. Deux exemples pour éclairer ce qui précède :

"Il y a 100 dm^2 dans 1 m^2 parce qu'il y a deux chiffres par colonne dans le tableau de conversion" (paroles prononcées par un étudiant de deuxième année).

"Dans la multiplication des décimaux, il faut aligner les virgules du multiplicande

et du multiplicateur" (exigence formulée par un enseignant titulaire).

Il est donc vital que le futur enseignant soit contraint de s'interroger sur ses propres connaissances, sur ses automatismes et ses mécanismes. A cette fin, il me semble intéressant de le placer dans des situations qui l'amèneront à constater l'inefficacité – voire la nuisance – de ses procédures habituelles.

Pour cela, j'ai choisi, dans les activités présentées plus loin, d'exploiter la "non-décimalité" des mesures de longueur de l'Ancien Régime ("leurs divisions bizarres et incommodes" comme le dit Laplace) pour déstabiliser les étudiants et les contraindre à "inventer" des procédures "non-habituelles" avec l'espoir que ces inventions permettront de se poser les vraies questions sur les procédures habituelles.

Plusieurs objectifs ont été poursuivis :

- Quant aux techniques opératoires sur les entiers :
 - La retenue dans la soustraction,
 - L'importance de la distributivité dans l'algorithme usuel de la multiplication,
 - Le reste de la division euclidienne.
- Quant à la mesure :
 - Qu'est-ce qu'un multiple ou un sous-multiple d'une unité de mesure ?
 - Pourquoi "deux chiffres par colonne" dans les conversions d'unités d'aire ?

Plusieurs de ces objectifs pouvant être atteints dans une même activité.

Nous travaillerons donc sur des longueurs exprimées en toises, pieds, pouces, avec :

1 toise = 6 pieds,
1 pied = 12 pouces.
(la toise sera notée "t", le pied "p", le pouce "po")

PREMIÈRE ACTIVITÉ

**Calculer la différence entre
3t 2p 5po et 1t 5p 8po**

L'objectif est ici, à l'évidence – le choix des nombres en atteste – de réfléchir sur la "retenue".

Le réflexe "je place des petits 1" pour ensuite retirer 8 de 15, puis 6 de 12, puis 2 de 3 est très vite reconnu comme inadapté !

Trois procédures différentes émergent et se valident mutuellement par leurs résultats identiques.

Première procédure

Exprimer les deux termes en pouces :

$$\begin{aligned}
 &3t \ 2p \ 5po \\
 &= 3 \times 6 \times 12 \text{ po} + 2 \times 12 \text{ po} + 5 \text{ po} = 245po. \\
 &1t \ 5p \ 8po \\
 &= 1 \times 6 \times 12 \text{ po} + 5 \times 12 \text{ po} + 8 \text{ po} = 140po. \\
 &245po - 140po = 105po.
 \end{aligned}$$

Puis (ce qui nous offre la possibilité de réfléchir sur le reste de la division euclidienne) :

$$105 = 12 \times 8 + 9.$$

L'algorithme habituel de la division euclidienne est légitime : 105 et 12 sont des entiers, le reste 9 représente bien le nombre de pouces restants quand on a extrait 8 pieds. Qu'il soit inférieur à 12 a

évidemment un sens. Puis les 8 pieds sont transformés en 1t 2p (division euclidienne non posée).

Résultat, donc : 1t 2p 9po.

(Exploitation possible : 267 mn à écrire en heures et minutes. Il s'agit bien d'une division euclidienne par 60 : quotient 4 h, reste[nt] 27 mn. Alors que nombre d'étudiants "tapent" sur la calculette et obtiennent 4,45 qu'ils identifient à 4 h 45 mn !)

Le résultat (105 po) a parfois été traité de la façon suivante :

divisé par 72 (nombre de pouces dans une toise)
quotient 1 (1t) reste 33 (33po)
puis 33 divisé par 12 : quotient 2 (2p)
reste 9 (9po) donc : 1t 2p 9po.

Deuxième procédure

Disposition classique "en colonnes" :

$$\begin{aligned}
 &3t \ 2p \ 5po \rightarrow 2t \ 8p \ 5po \rightarrow 2t \ 7p \ 17po \\
 &- 1t \ 5p \ 8po \quad - 1t \ 5p \ 8po \quad - 1t \ 5p \ 8po \\
 &\text{(1 toise du grand terme} \\
 &\text{a été convertie en pieds,} \\
 &\text{puis 1 pied a été converti} \\
 &\text{en pouces)} \qquad \qquad \qquad = 1t \ 2p \ 9po
 \end{aligned}$$

Grâce à cet exemple, il devient possible de mettre en place une technique de soustraction à retenue pour les entiers (ou les décimaux) : la technique parfois dite "par démolition".

$$\begin{array}{r}
 361 \\
 - 135 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 36 \text{ (11)} \\
 - 135 \\
 \hline
 226
 \end{array}$$

OPÉRONS EN TOISES,
PIEDS, POUCES

Une des dizaines du grand terme a effectivement été remplacée par 10 unités.

Troisième procédure

Elaborée par des étudiants voulant "à tout prix" utiliser la technique la plus usuelle de soustraction à retenue.

$$\begin{array}{r} 3\text{t } 2\text{p } 5\text{po} \\ - 1\text{t } 5\text{p } 8\text{po} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(ajoutons 12po. au grand} \\ \text{terme et 1p. au petit terme,} \\ \text{on ne change pas la} \\ \text{différence car } 1\text{p} = 12\text{po)} \end{array}$$

Cela devient :

$$\begin{array}{r} 3\text{t } 2\text{p } 17\text{po} \\ - 1\text{t } 6\text{p } 8\text{po} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(ajoutons encore 6p. au grand} \\ \text{terme et 1t. au petit ; } 1\text{t} = 6\text{p)} \end{array}$$

Cela devient :

$$\begin{array}{r} 3\text{t } 8\text{p } 17\text{po} \\ - 2\text{t } 6\text{p } 8\text{po} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(pour chaque unité, la sous-} \\ \text{traction est devenue possible)} \end{array}$$

$$1\text{t } 2\text{p } 9\text{po}$$

Cette dernière procédure illustre bien, je crois, mon propos. On a été contraint de s'interroger sur un "mécanisme" que l'on croyait universel (les petits 1 de retenue) pour pouvoir l'adapter à la nouvelle situation. Il apparaît que les nombres ont changé, c'est une nouvelle soustraction que l'on fait (3t 8p 17po - 2t 6p 8po, au lieu de 3t 2p 5po - 1t 5p 8po) c'est bien la propriété de la soustraction : $a - b = (a + c) - (b + c)$, qui est en œuvre. Ces changements de nombres sont invisibles dans la présentation classique de la technique usuelle.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 12 \quad 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{or c'est} \\ \text{pourtant bien} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\text{c } 4\text{d } 11\text{u} \\ 1\text{c } 3\text{d } 8\text{u} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{que l'on} \\ \text{fait} \end{array}$$

DEUXIÈME ACTIVITÉ

**Soit à partager en trois
parties égales une longueur
de 5t 3p**

L'objectif principal, ici, est de faire découvrir les limites de l'algorithme habituel de la division afin d'amener à une interrogation sur le sens de chacune de ses étapes. Il est à noter, ici encore, que le même travail peut être fait sur les temps en heures, minutes, secondes.

Première procédure

$$\begin{array}{r|l} 5\text{t } 3\text{p} & 3 \\ \hline 2\text{t } 3\text{p} & 1\text{t} \end{array}$$

Le fait "d'abaisser" les 3p. n'aboutit pas.

Réponses entendues :

- "ça ne tombe pas juste"
- "ce n'est pas divisible"
- "ça fait 1t. restent 2t 3p"

Deuxième procédure

5t. divisées par 3 donnent 1t, restent 2t ; le reste (2t) a un sens, c'est une partie de la longueur initiale qui n'est pas encore divisée. 2t = 12p ; 12p. divisés par 3 donnent 4p. Restent à diviser par 3 les 3p. initiaux, soit 1p.
Quotient donc, 1t 5p.

Troisième procédure

5t 3p = 33p ; 33p divisés par 3 donnent 11p ; puis, par une division euclidienne par 6, on obtient : 1t 5p.

La première procédure oblige à s'intéresser à l'étape "j'abaisse" de l'algorithme habituel ; les deuxième et troisième procédures amènent à une réflexion sur la signification de "pousser une division".

Dans les trois cas, l'impossibilité de recourir à la si commode virgule (ou à la calculette !) implique des inventions qui mobiliseront le *sens*.

TROISIÈME ACTIVITÉ

Quelle est l'aire d'un rectangle de 3p 4po de longueur et de 2p 7po de largeur ?

Autant les durées (en heures, minutes, secondes) pouvaient être utilisées avec les mêmes objectifs dans les activités précédentes, autant il est clair qu'elles ne se prêtent pas à une telle opération (multiplication de deux mesures non entières et a-décimales ⁽¹⁾) ; existe-t-il des cas, en effet, où l'on pourrait être amené à multiplier 2h 30mn par 3h 20mn ?

Les objectifs sont ici : la réflexion sur les algorithmes habituels de la multiplication des entiers ou des décimaux, notamment le rôle clé de la distributivité, et les interrogations sur les conversions d'unités d'aire.

Dans un premier temps, les réponses des étudiants furent toutes fausses et de trois sortes :

Première sorte :
3p 4po × 2p 7po

$$\begin{array}{l} 3 \times 2 = 6 \quad \rightarrow \quad 6 \text{ pieds carrés} \\ 4 \times 7 = 28 \quad \rightarrow \quad 28 \text{ pouces carrés,} \\ \text{l'aire est de } 6\text{p}^2 \underline{28\text{po}^2} \end{array}$$

On a ici transposé aveuglément la technique *d'addition* des décimaux (partie entière plus partie entière, partie décimale plus partie décimale). Il est à remarquer qu'aucun auteur de cette erreur n'a considéré le 2 de 28 comme une retenue à ajouter à 6, ce qui a rendu plus simple la remédiation. L'erreur de première sorte est du même type que l'erreur traditionnelle sur les décimaux ($2,3 \times 4,2 = 8,6$!)

Deuxième sorte :

$$\begin{array}{r} 3\text{p } 4\text{po} \\ \times 2\text{p } 7\text{po} \\ \hline 2 \ 3 \ 8 \quad \leftarrow 7 \times 4 = 28, \text{ je pose } 8, \text{ je retiens } 2; \\ \ 6 \ 8 \quad \leftarrow 2 \times 4 = 8; 2 \times 3 = 6. \\ \hline \end{array}$$

$$9 \ 1 \ 8 \quad \rightarrow \text{ "Comment convertir } 918 \text{ po}^2 \text{ ?"}$$

"Et pourquoi seraient-ce des pouces carrés ?" Blocage.

L'algorithme classique de la multiplication est appliqué ici. La nécessité de distribuer 7 sur 4 et 3, puis 2 sur 4 et 3 a peut-être été vue.

La correction permettra de redonner du sens à "je pose 8 et je retiens 2", ainsi qu'au décalage vers la gauche du deuxième produit partiel en liant ces deux étapes à la numération décimale de position et en montrant ainsi l'inadaptation de cet algorithme à ce problème.

Troisième sorte :

$$\begin{array}{l} 3\text{p } 4\text{po} = 40 \text{ po} \\ 2\text{p } 7\text{po} = 31 \text{ po}; \quad 40 \times 31 = 1240. \\ \text{L'aire est de } 1240 \text{ po}^2 \end{array}$$

(1) Par a-décimales, j'entends : exprimées avec des unités n'ayant pas entre elles de rapport décimal.

OPERONS EN TOISES,
PIEDS, POUCES

Pour convertir, division euclidienne par 12 (!) : $1240 = 12 \times 103 + 4$.
L'aire est de $103 \text{ p}^2 + 4 \text{ po}^2$.

La conversion systématique dans la plus petite unité, qui avait fait la preuve de son efficacité dans les activités précédentes, est réemployée avec un succès partiel (1240 po^2 est exact), mais la technique de conversion (division euclidienne par 12) qui était pertinente ne l'est plus ici. Le rectangle donné mesure moins de 4 pieds de long et moins de 3 pieds de large, il doit donc avoir une aire inférieure à 12 pieds carrés ; la réponse $103 \text{ p}^2 + 4 \text{ po}^2$ est facilement reconnue comme erronée. D'autre part, la validité aisément prouvée du résultat 1240 po^2 élimine la réponse de deuxième sorte 918 po^2 pour d'éventuels irréductibles !

A partir de ces analyses, les étudiants se penchent à nouveau sur la question, guidés par les éléments suivants :

1) Un changement de cadre : le rectangle est dessiné à une échelle arbitraire.

2) Une écriture avec parenthèses :
 $(3 \text{ p} + 4 \text{ po}) \times (2 \text{ p} + 7 \text{ po})$

On s'aperçoit alors rapidement que les produits partiels : 3 p. par 7 po. et 2 p. par 4 po. avaient été oubliés dans les erreurs de 1^{re} sorte (oubli analogue à celui des doubles produits ou des termes rectangles bien connu des collègues de Lycées et Collèges !)

Dès lors, on peut "re-trouver" que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition joue le rôle principal dans l'algorithme multiplicatif habituel. On redécouvre également l'importance capitale du support "rectangle" dans une progression pédagogique vers la technique de la multiplication.

On obtient alors assez vite que :

$$3 \text{ p} + 4 \text{ po} \times 2 \text{ p} + 7 \text{ po} \\ = 6 \text{ p}^2 + (3 \times 7 + 4 \times 2) \text{ p.po.} + 28 \text{ po}^2$$

↓
mais qu'est-ce qu'un pied-pouce ?

C'est à partir de cette étape que sont abordés les problèmes de conversion des unités d'aire, et donc la remédiation à l'erreur de 3^e sorte.

L'unité d'aire "pied-pouce" équivaut à l'aire d'un rectangle de longueur 1 pied et de largeur 1 pouce. Les 3×7 et les 4×2 "pieds-pouces" peuvent être visualisés sur le dessin.
Observé de près, le "pied-pouce" va livrer ses secrets :

- Il en faut 12 pour faire 1 pied carré.
- Il est égal à 12 pouces carrés.
- Il y a donc 144 pouces carrés dans 1 pied carré.

Nous avons donc à convertir 1240 po^2 d'une part et, d'autre part, le produit "éclaté" $6 \text{ p}^2 29 \text{ p.po. } 28 \text{ po}^2$:

- 1240 po^2 : il faut faire une division euclidienne par 144.

$$1240 = 144 \times 8 + 88.$$

L'aire du rectangle est donc : $8 \text{ p}^2 88 \text{ po}^2$. Certains irréductibles s'insurgeront car $88 > 12$! (analogie infondée avec les heures et minutes ?)

- $6 \text{ p}^2 29 \text{ p.po. } 28 \text{ po}^2$: deux stratégies seront trouvées qui utilisent chacune une division euclidienne.

Première stratégie : les pieds-pouces sont convertis en pouces carrés.

$$\begin{aligned} 6 \text{ p}^2 29 \text{ p.po. } 28 \text{ po}^2 &= 6 \text{ p}^2 + (29 \times 12 + 28) \text{ po}^2 \\ &= 6 \text{ p}^2 + 376 \text{ po}^2 \\ &= 6 \text{ p}^2 + 2 \text{ p}^2 + 88 \text{ po}^2 && (\text{car } 376 = 144 \times 2 + 88) \\ &= 8 \text{ p}^2 88 \text{ po}^2 \end{aligned}$$

Deuxième stratégie (séduisante car elle peut être faite de tête) : on extrait des douzaines de 29 p.po.

$$\begin{aligned} 6 \text{ p}^2 + 29 \text{ p.p} &= 6 \text{ p}^2 + 24 \text{ p.po} + 5 \text{ p.po} + 28 \text{ po}^2 \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &= 6 \text{ p}^2 + 2 \text{ p}^2 + 5 \times 12 \text{ po}^2 + 28 \text{ po}^2 \\ &= 8 \text{ p}^2 88 \text{ po}^2. \end{aligned}$$

En guise de conclusion

Le 27 Ventôse de l'an II (17 Mars 1794) les membres du Directoire de Seine Inférieure écrivent (2) :

"Notre arithmétique qui est un des

chefs-d'œuvre de l'esprit humain était encore soumise au joug tyrannique de nos vieilles lois gothiques et barbares. [...] nos absurdes institutions admettaient des fractions qui contrariaient absolument l'art de la numération, des sols qui étaient les vingtièmes de la livre, des deniers qui étaient les douzièmes du sol, etc. C'était une absurdité dans le système des monnaies. Les institutions des poids et mesures n'étaient pas moins absurdes. La livre

(2) Rapporté par E. Grutier et Y. Marec dans "Les Actes de l'Université d'été sur l'Histoire des Mathématiques" (Université du Maine, 1986)

OPÉRONS EN TOISES,
PIEDS, POUCES

pesant se sous-divisait en marcs qui étaient des moitiés, les moitiés en onces qui étaient des huitièmes de marc... Le temps, cet être abstrait qui paraissait devoir être soumis au seul empire des mathématiques était cependant l'esclave de l'usage tyrannique qui nous asservissait [...] les jours en 24 heures, les heures en minutes, les minutes en secondes, les secondes en tierces, en suivant le calcul sexagésimal."

Aujourd'hui (à la notable exception des usages des pays anglo-saxons) seul le temps reste "l'esclave de l'usage tyrannique", le jour dure encore 24 heures, l'heure 60 minutes, la minute 60 secondes (la tierce a cédé la place aux 1/10 et aux 1/100 de secondes) et des erreurs comme celle que j'ai citée plus haut (4,45 h lu 4 h 45 mn) résultent de l'inadaptation des algo-

rithmes opératoires (et des calculettes !) à ce système non décimal ⁽³⁾.

Si j'ai exhumé ces "vieilles lois gothiques et barbares", c'est précisément parce qu'elles "contrarient absolument l'art de la numération" et que, *par ce fait même*, elles me semblent pouvoir permettre à des futurs enseignants, tombés dans le système métrique étant petits, de remettre en cause des évidences trop grandes et de réfléchir sur la numération et les techniques opératoires.

« Imagine la paysanne ritale, fraîche débarquée, qui a lu sur l'ardoise que le kilogramme de patates vaut un franc trente et qui entend la maraichère lui dire : "Ça fait pas tout à fait les trois livres, je vais jusqu'à quarante sous ?" »
(F. Cavanna, *Les Ritals*, Belfond, 1978)

(3) Les minutes et secondes d'angle, qui avaient longtemps résisté (les grades ne se sont pas imposés) semblent céder, sous la pression des calculettes, au profit des divisions décimales du degré.