LES DIFFÉRENTS FONCTIONNEMENTS D'UNE FIGURE DANS UNE DÉMARCHE GÉOMÉTRIQUE (1)

Raymond DUVAL
Irem de Strasbourg

La question la plus fréquemment soulevée à propos de l'emploi de figures en géométrie est celle de leur utilité : à quoi sert une figure dans une démarche géométrique ? Pour justifier cet emploi on explique qu'une figure donne une représentation d'une situation géométrique plus facile à appréhender que sa présentation dans un énoncé verbal : elle fait "apparaître sur un objet visible des relations ou de hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal" (Bessot 1983 p. 35). En effet, à la différence d'un discours, les figures font apparaître pour chaque objet toutes ses relations avec les autres objets de la situation représentée (Larkin & Simon, 1987). Permettant ainsi de saisir d'un coup une situation dans son ensemble, les figures sont le moyen le plus direct d'en explorer les différents aspects, d'anticiper les résultats d'une démarche, de sélectionner une solution. Cette rapidité et cette économie d'appréhension d'une situation justifie l'importance que les mathématiciens attachent au "rôle des figures dans la solution des problèmes" (Pólya 1965, pp. 86, 95). Elles permettent d'apercevoir l'idée centrale d'une démonstration déductivement complexe.

Mais, en réalité, pour beaucoup d'élèves, les figures ne fonctionnent pas du tout comme cet outil heuristique lors des phases de recherche. La simple vue d'une figure semble exclure le regard mathématique sur cette figure. Deux types de difficultés persistantes sont, en effet, couramment constatés, aux différents niveaux de la scolarité :

(1) Nous reprenons ici, en les développant, certains des points exposés dans deux communications, l'une faite au *Symposium Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Institute of Education, University of London), et l'autre, au *Premier Congrès Panhéllénique de Didactique des Mathématiques* (Université de Ioannina).

– la résistance à se détacher des formes et des propriétés visuellement reconnues du premier coup d'œil : la figure constitue alors une donnée intuitive qui se suffit à elle-même et qui rend inutile ou absurde, toute exigence de démonstration,

– l'incapacité à voir dans une figure, c'est-à-dire à y discerner des éléments de solution possibles à un problème posé : cela supposerait que l'attention se focalise sur certaines parties de la figure plutôt que sur d'autres, ou que la figure soit éventuellement enrichie de tracés supplémentaires. Or il y a tellement d'entrées possibles dans une figure que le choix de l'une d'elle paraît arbitraire, et *surtout ce choix semble présupposer que l'on connaisse déjà la solution cherchée !*

Il y a ainsi un fossé entre la vue d'une figure, c'est-à-dire son appréhension perceptive spontanée, et la manière mathématique de la regarder. L'une apparaît souvent comme un obstacle à la seconde, alors que, sans la première, la seconde ne serait pas possible (2).

Pour comprendre les raisons d'un tel fossé et les difficultés rencontrées à le faire franchir, parfois même malgré la multiplication de tâches de construction, il nous faut nous poser une autre question, non plus sur l'utilité les figures mais sur leur fonctionnement : comment fonctionne effectivement une figure dans une démarche géométrique ? L'écart entre ce que montre une figure au regard d'un élève et ce qu'elle montre au regard de l'enseignant suggère qu'il y a différentes appréhensions possibles d'une même figure. Mais ce serait une erreur d'en conclure qu'il y aurait seulement deux appréhensions possibles d'une figure, son appréhension perceptive et son appréhension mathématique. *En réalité, il y a quatre types d'appréhension possible d'une figure dans une démarche géométrique. Et la manière mathématique de regarder une figure fait intervenir, simultanément ou alternativement, deux ou trois de ces quatre appréhensions possibles.* Une longue pratique mathématique tend évidemment à les faire se fusionner, mais elles n'en restent pas moins cognitivement très différentes. Un apprentissage véritable de la manière mathématique de regarder une figure ne peut donc pas être mis en place si l'on ne prend pas spécifiquement en compte chacun de ces quatre types d'appréhension.

Ce sont ces quatre types d'appréhensions possibles d'une figure que nous nous proposons d'expliquer dans cet article. Nous le ferons en montrant ce que cela apporte au problème, évoqué plus haut,

(2) Naturellement qu'une figure soit réellement tracée sur papier, sur écran, ou qu'elle soit simplement imaginée est une variation non pertinente pour notre propos. Comme Pólya l'avait souligné, "dans un problème de géométrie, nous avons à considérer une figure; *celle-ci peut n'exister que dans notre imagination, ou peut être représentée sur le papier.* Dans certains cas, il peut être avantageux d'imaginer la figure sans la dessiner, mais si nous avons à examiner l'un après l'autre plusieurs détails différents, il y a intérêt à tracer une figure. *Si en effet ces détails sont nombreux, on ne peut les imaginer tous en même temps mais on les verra tous réunis sur le papier...*" (1965, p. 87). En d'autres termes, que la figure soit une repésentation mentale ou une représentation matérielle, elle reste une représentation sémiotique qui relève des mêmes modes d'appréhension. La différence entre les deux est d'abord de l'ordre du coût et de la limitation de traitement comme les remarques de Pólya le suggèrent. Rappelons aussi, si besoin est, que les images mentales présentent des conditions d'exploration et de discernabilité des détails des objets représentés semblables à celles de l'exploration perceptive des objets réels. On a d'ailleurs parlé de "quasi-perception" pour les images mentales (Denis 1989, p. 80-86; Kosslyn 1980).

celui de l'utilisation heuristique des figures lors des phases de recherche. Et plus particulièrement comment cela permet de répondre aux deux questions suivantes :

1. *Comment une figure peut-elle fonctionner de façon heuristique dans une phase de recherche ?* Car la rapidité et l'économie d'appréhension qu'une figure permet de réaliser par rapport à l'énoncé d'un problème de géométrie n'exliquent pas comment cette figure peut aussi aider à trouver l'idée de sa solution.

2. *Pourquoi une figure n'apporte-t-elle pas toujours une aide heuristique ?* Cette deuxième question se pose du fait qu'une figure n'aide pas toujours à voir.

Nous décrirons d'abord, très brièvement, chacune des quatre appréhensions. Puis nous analyserons comment et pourquoi une figure peut être une aide heuristique et nous présenterons deux exemples de ce type d'analyse. Enfin, nous verrons pourquoi l'acquisition d'un type d'appréhension n'entraîne aucun transfert pour un autre type d'appréhension. Un apprentissage spécifique de chaque type d'appréhension semble nécessaire pour développer la manière mathématique de regarder une figure en géométrie.

I. Les différentes appréhensions possibles d'une figure géométrique.

Il y a plusieurs manières d'appréhender une figure dans le contexte d'une démarche de géométrie.

La plus immédiate est **l'appréhension perceptive**, c'est-à-dire celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan soit dans l'espace. Cette identification d'une forme en 2D ou en 3D se fait en fonction de lois, dites "gestaltistes" d'organisation ou en fonction d'indicateurs intrafiguraux (Francès 1967, pp. 191-198 ; Coren *et alii* 1978, pp. 248-256).

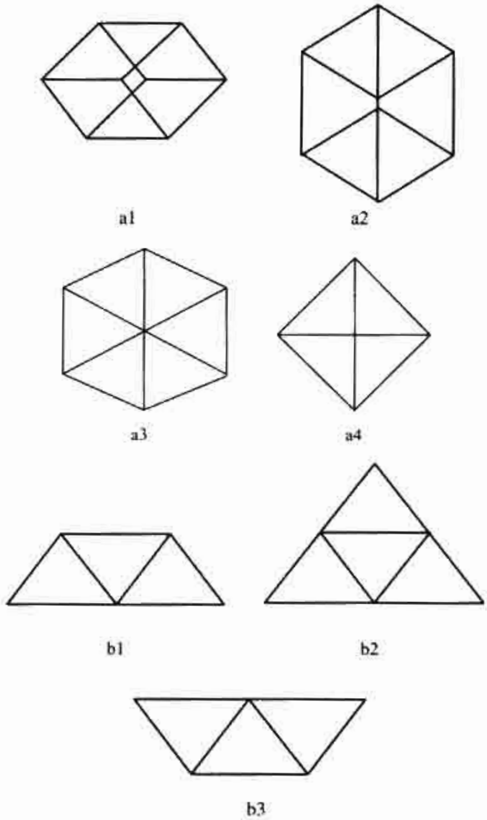
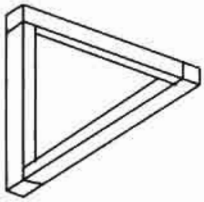


Fig. 1. La série des figures a1-a4 illustre le rôle de la loi de symétrie dans l'organisation d'une forme en 2D ou en 3D. La série des figures b1-b3 illustre le rôle de la loi de clôture et l'importance du contour dans l'identification d'une forme. Il s'ensuit qu'il peut être difficile de reconnaîttre immédiatement b1 et, *a fortiori*, b3 dans b2 lorsque les deux figures ne sont pas vues ensemble et comparées (Dupuis *et alii*, 1978, p. 76-78)

Les indicateurs intra-figuraux sont, par exemple, des différences de taille ou d'orientation entre certaines unités figurales constituant l'image de ce qui est vu. L'appréhension perceptive a donc une fonction épistémologique d'identification des objets en deux ou en trois dimensions. Cela se fait par des traitements cognitifs effectués automatiquement, et donc inconsciemment. C'est pour cela qu'on reconnaît, dès le premier coup d'œil, la forme d'une figure, ou celles qui la composent, et que cette reconnaissance reste stable. Et c'est d'ailleurs la prise en compte de ces lois et de ces indicateurs qui permet de représenter des objets paradoxaux comme le triangle impossible de S. et R. Penrose cidessous :



Naturellement, en mathématique, on ne s'en tient jamais à cette appréhension, bien qu'on s'y réfère toujours soit instrumentalement (logiciels de construction, règle et compas, tracés à main levée) soit mentalement lorsque beaucoup de figures perçues ont été "intériorisées". Car l'appréhension perceptive reste trop globale et s'en tient seulement à des constatations. Mais peut-on pour autant lui opposer une appréhension mathématique de la figure ? Cela est évidemment concevable mais ne permet ni de prendre en compte les différents fonctionnements possibles d'une figure dans une démarche géométrique ni de découvrir les conditions d'apprentissage permettant de faire accéder les élèves à ce qu'on appelle globalement "l'appréhension mathématique des figures".

Il y a trois autres appréhensions possibles d'une figure que l'on peut distinguer à la fonction épistémologique spécifique qu'elles remplissent et par les traitements ou les opérations propres permettant de remplir cette fonction (tableau de la fig. 2).

L'appréhension la plus simple est l'**appréhension discursive.** Une figure est regardée par rapport à une dénomination *(Soit un...,)*, une légende ou une hypothèse qui en fixent explicitement certaines propriétés. Car on ne peut jamais dire qu'une propriété mathématique "se voit" sur la figure. Le parallélisme de deux droites ou l'égalité de deux segments ne peuvent être établies ni par simple estimation perceptive ni par des procédures de mesure : car il y a toujours des marges de variation et d'erreur. Ainsi certains peuvent voir deux droites données comme étant parallèles entre elles, d'autres comme n'étant pas parallèles, et d'autres encore comme étant "presque parallèles". Ces trois estimations sont des constatations perceptives également recevables si l'on s'en tient à l'appréhension perceptive. Naturellement, nous ne prenons pas en compte ici l'influence des normes d'un groupe sur les critères d'estimation perceptive de chacun de ses membres [3], lesquelles peuvent conduire à faire admettre une certaine "évidence". L'appréhension discursive d'une figure correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive. La fonction épistémologique de l'ap-

(3) Pour mettre en évidence ce phénomène Shérif a utilisé l'effet autocinétique : un point lumineux stationnaire perçu dans une obscurité totale paraît en mouvement. On demande d'estimer la distance du déplacement perçu. Après avoir établi isolément leur norme d'estimation, les sujets mis en groupe tendent à faire converger les normes et les écarts de variation (Lévy 1970, p. 232).

Fig. 2

Les différentes Appréhensions d'une figure	*Traitements cognitifs correspondants*	*Fonction épistémologique*
Appréhension **discursive** Les propriétés mathématiques représentées ne peuvent pas être déterminées par une simple constatation visuelle : certaines doivent être données par une indication discursive : dénomination ("Soit un..."), hypothèse...	**Raisonnement déductif** Pour expliciter d'autres propriétés à partir des propriétés données *on utilise des définitions*, des axiomes, des théorèmes.	**Démonstration**
Appréhension **séquentielle** Il y a un ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure. Cet ordre dépend des propriétés mathématiques à représenter et des contraintes techniques des instruments utilisés (logiciels, règle et compas...).	**Instrumental** *Impose des détours* par des unités figurales qui n'appartiennent pas à la figure à construire. *Produit un feed-back* : pour réaliser la figure, il faut respecter les propriétés mathématiques associées aux possibilités techniques de traçage de l'instrument (menu...)	**Modèle** Les actions sur le représentant et les résultats constatés correspondent à la situation mathématique représentée
STRUCT. DYADIQUE DE LA REPRESENTATION		
STRUCT. TRIADIQUE DE LA REPRESENTATION		
Appréhension **opératoire** Une figure donnée peut être modifiée de différentes manières, ***matériellement ou mentalement***.	**Modification figurale** ***Opérations*** *modifiant une figure*. La partager en "morceaux", en sous-figures, et les recombiner en une autre figure. L'agrandir, la diminuer ou l'incliner comme avec des lentilles ou des miroirs. En changer la position dans le plan fronto-parallèle.	**Heuristique** Une des opérations produit le changement figural qui **montre l'idée** d'une solution ou d'une démonstration.
Appréhension **perceptive** Ce qu'une figure montre au premier coup d'œil. Nous pouvons ensuite y discriminer des sous-figures qui ne coïncident pas nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure.	**Intégration inconsciente** En fonction des ***lois gestaltistes*** *d'organisation et d'**indicateurs intra-figuraux***. (La figure perçue peut être différente de l'image rétinienne).	**Identification** On reconnaît quelque chose (forme, objet) dans le plan ou dans l'espace.

préhension discursive est la démonstration. On remarquera que les exercices élémentaires d'application de théorèmes ou de définitions reposent sur cette seule appréhension discursive.

L'appréhension, actuellement la mieux prise en compte dans le cadre de l'enseignement, est l'appréhension **séquentielle.** Elle concerne l'ordre de construction d'une figure. Cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés (les primitives et les commandes du menu d'un logiciel, la règle et le compas). D'où un traitement spécifique commandé par cette exigence : pour réussir la construction il faut respecter les associations initiales entre propriétés mathématiques et possibilités techniques de l'instrument. Ce traitement présente deux caractéristiques. Il effectue souvent des détours par des constructions auxiliaires et ces détours ne sont pas nécessairement les mêmes selon les instruments utilisés. Il s'appuie sur un contrôle externe puisque tout écart entre l'intention et l'instruction apparaît dans l'exécution instrumentale en principe toujours fiable : les résultats obtenus après exécution peuvent différer de ceux que l'on croyait pouvoir atteindre. La fonction de l'appréhension séquentielle d'une figure est celle de modèle, et cette fonction apparaît nettement avec certains logiciels de construction : les actions que l'on fait sur le représentant permettent par leur résultat "de modifier la connaissance que l'on a de l'objet représenté" (Bresson 1987, p. 936).

L'appréhension la plus méconnue est l'appréhension opératoire, bien que sa fonction d'exploration heuristique soit celle qui est la plus fréquemment invoquée pour justifier l'utilisation des figures dans une démarche géométrique : montrer l' "idée" de la solution d'un problème ou d'une démonstration (Polya, 1965). L'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. Nous avons distingué ailleurs trois grands types de modification : les modifications méréologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure (voir plus loin fig. 5 et 6), les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle (Duval, 1988). A chacun de ces types de modification correspondent des traitements spécifiques. En outre, ces traitements peuvent être effectués aussi bien mentalement que réalisées matériellement (par des actions de pliage ou de découpage de feuilles, par l'emploi de puzzles de pièces de différentes formes, par l'utilisation de zooms, de lentilles, de miroirs convexes ou concaves, etc.). Cette rapide présentation suffit pour comprendre le principe explicatif suivant sur lequel nous allons revenir plus en détail dans la deuxième partie de cet article : une figure fournit une aide heuristique quand l'une de ses modifications possibles montre l'"idée" d'une solution.

Ces trois appréhensions remplissent donc des fonctions épistémologiques très différentes et font appel à des traitements propres. Mais le point important, du point de vue de l'apprentissage et donc de l'enseignement, consiste à savoir si, malgré ces différences de fonction et de traitement, ces appréhensions sont réellement indépendantes l'une de l'autre. Ce point concerne la question de la possibilité d'un transfert de l'une à l'autre : par exemple un travail sur l'appréhension séquentielle développe-t-il du même coup l'appréhension discursive et, réciproquement, un travail sur l'appréhension discursive favorise-t-il les tâches de construction ? Mais, surtout, un travail sur ces deux types d'appréhension permet-il de développer les compétences d'exploitation heuristique d'une figure ? Chacun sait d'expérience qu'il y a peu de transfert et même souvent pas du tout de transfert. L'incapacité à voir dans une figure, c'est-à-dire à y discerner des éléments de solution possibles pour un problème donné demeure malgré un travail sur l'appréhension discursive ou sur l'appréhension séquentielle. Pourquoi cette indépendance et par conséquent cette quasi-impossibilité de transfert ?

Avant d'aborder cette question, il nous faut décrire plus en détail certains des traitements de l'appréhension opératoire de façon à pouvoir répondre aux deux questions évoquées dans l'introduction : "Comment une figure peut-elle fonctionner de façon heuristique ?" et "Pourquoi une figure n'apporte-t-elle pas toujours une aide heuristique ?".

II. Les facteurs internes déclenchant ou inhibant le fonctionnement heuristique d'une figure.

Toute figure, matériellement tracée ou simplement imaginée, est susceptible de trois types de modifications comme nous venons de l'indiquer en décrivant l'appréhension opératoire : modification méréologique, modification optique ou modification positionnelle. Par exemple, les sous-figures perceptibles dans une figure donnée peuvent être séparées les unes des autres puis recombinées en une nouvelle reconfiguration, laquelle apparaît comme une nouvelle figure par rapport à la figure de départ. On peut également projeter dans la figure de départ des partages non initialement donnés. L'adjonction de droites supplémentaires qui est une pratique normale et souvent indispensable, en est une parfaite illustration. Nous appelons ces modifications "méréologiques" parce qu' elles se font en fonction des différentes relations tout / parties que l'on peut discerner entre une figure et l'une des sous-figures ou l'une de ses unités figurales. On peut également agrandir ou diminuer une figure, incliner le plan dans laquelle elle est tracée ce qui entraîne une modification de ses contours. On peut encore la déplacer de différentes manières dans le plan où elle est tracée. Toutes ces modifications présentent deux caractéristiques essentielles :

1. Toute modification d'une figure donnée résulte d'opérations qui peuvent être effectuées librement, **sans contraintes théoriques ou techniques à respecter**. En cela, l'appréhension opératoire diffère de l'appréhension discursive et de l'appréhension séquentielle. Elle diffère de l'appréhension discursive parce que celle-ci est subordonnée à la mobilisation de théorèmes ou de définitions et que cette mobilisation doit respecter les conditions d'application des théorèmes ou des définitions dans la situation donnée. Elle diffère de l'appréhension séquentielle en ce qu'il n'y a aucune contrainte liée à l'utilisation d'un instrument de construction. La matérialisation de ces modifications n'a qu'une valeur d'illustration.

2. La modification d'une figure donnée ne joue qu'avec **les lois et les paramètres qui déterminent l'organisation d'une figure**. Car toute figure est essentiellement organisation de plusieurs éléments, des stimuli, des traces... Et pour un même ensemble d'éléments on peut avoir des organisations différentes, donc des figures visuellement différentes. Les lois et les paramètres qui déterminent l'organisation

d'une figure sont les lois et les paramètres qui commandent l'appréhension perceptive. On peut voir sur le tableau de la figure 3 (les deux premières colonnes : intégration des traces et type de modifications figurales) que les trois types de modification figurale correspondent chacun à un groupe de lois ou de paramètres relatifs à l'organisation en une figure d'un ensemble d'éléments. Cela veut dire que l'appréhension opératoire peut se faire indépendamment de connaissances mathématiques, même si certaines de ses modifications peuvent être congruentes avec des traitements mathématiques. Toutes ces modifications s'effectuent dans le seul registre de la figure et en utilisant les traitements que permettent les lois et les paramètres d'organisation d'éléments en une figure.

Ces deux caractéristiques nous aident à répondre à la première question et permettent de mieux comprendre le principe explicatif énoncé plus haut. Il peut être reformulé ainsi : *pour un problème déterminé, et pour une figure de départ, celle donnée avec l'énoncé du problème ou construite à partir de l'énoncé du problème, il y a généralement une des modifications figurales possibles qui montre l'idée de la solution ou de la démonstration. C'est la modification figurale heuristiquement pertinente.*

Cependant, ces deux caractéristiques ne nous permettent pas encore de répondre à la seconde question : "pourquoi une figure ne fournit-elle pas toujours une aide heuristique ?"

L'explication doit être cherchée dans le phénomène suivant : toutes les modifications ne sont pas également immédiatement "visibles" sur une figure de départ et, plus spécialement, la modification heuristiquement figurale n'est pas toujours immédiatement visible. Naturellement si on s'en tenait à la constatation de ce phénomène on ne serait guère avancé. En revanche, ce qui est intéressant est que l'on peut déterminer la plus ou moins grande visibilité de la modification heuristiquement pertinente à partir des lois et des paramètres d'organisation d'une figure. On peut ainsi définir plusieurs facteurs qui jouent sur la visibilité de la modification heuristiquement pertinente, c'est-à-dire qui déclenchent ou inhibent les opérations produisant cette modification (tableau de la figure 3, colonne 4 et colonne 1 : facteurs de signification perceptive et intégration de traces en une figure). *Pour chacune des modifications figurales possibles, il y a un ensemble de facteurs liés aux significations perceptives de la figure qui en font varier la visibilité dans le sens d'une facilitation ou dans celui d'une inhibition.* D'où la réponse à la deuxième question :

> *Le caractère plus ou moins directement visible, plus ou moins coûteux à effectuer, de la modification figurale heuristiquement pertinente, sur une figure de départ, dépend de facteurs liés à son organisation interne.*

Cette réponse a deux conséquences directes.

La première est que l'aide heuristique d'une figure (celle donnée avec l'énoncé d'un problème ou celle construite à partir de l'énoncé du problème) peut être évaluée en l'analysant selon ces facteurs. Nous en donnerons un exemple dans la troisième partie.

La seconde est que l'appréhension opératoire d'une figure peut être développée en construisant des situations d'apprentissage fondées sur une variation systématique des figures en fonction de ces facteurs. En effet, ces facteurs constituent des variables indépendantes qu'un expérimentateur, ou un enseignant, peuvent manipuler

Appréhension perceptive d'un complexe de traces	Appréhension opératoire d'une figure donnée Structure triadique de la représentation		
Intégration des traces *(brusques constrastes de brillance)* ***en une figure***	*Types de modifications figurales*	*Opérations effectuant la modification figurale :* ***traitement heuristique***	*Facteurs de signification perceptive* ***déclenchant ou inhibant la visibilité des opérations***
Lois gestaltistes d'organisation (clôture, bonne continuation, proximité...) et **identification d'une forme** dans un complexe de traces	Méréologique (relation de partie à tout)	- **Reconfiguration**... Toute figure géométrique peut être partagée en sous-figures de différentes formes. Celles-ci peuvent être recombinées en une nouvelle figure ou en d'autres sous-figures emboîtées	- Partage en sous-figures pertinentes : donné ou non dans la figure de départ - Convexité des sous-figures pertinentes : oui ou non - Complémentarité de bonne forme des sous-figures à recombiner : oui ou non... - Dédoublement d'une sous-figure...
Indicateurs intra-figuraux pour la profondeur et la distance (taille, superposition, point de fuite, inclinaison par rapport au plan fronto-parallèle...) : **deux ou trois dimensions**	Optique	- même forme et même orientation dans le plan fronto-parallèle, mais variation de taille : **superposition en profondeur de deux figures semblables** - variation de forme et constance de taille et de forme : **inclinaison du plan de la figure** par rapport au plan fronto-parallèle	- même orientation pour les figures objet et image - les lignes de perspective sont toutes distinctes des côtés des figures - le centre d'homothétie est à l'intérieur, ou à l'extérieur, du contour convexe enveloppant les deux figures
Repères déterminant l'orientation dans le plan fronto-parallèle	Position	même taille et même forme, mais variation d'orientation : **rotation**, **translation**...	*Prégnance* des directions verticale et horizontale

Fig. 3.

à leur gré et dont les variables dépendantes sont, d'une part, la réussite ou l'échec et, d'autre part, le *temps de réaction* (t < 2 s. (c'est-à-dire très grossièrement en dessous du seuil de perception subjective de l'écoulement d'un intervalle ou de l'exécution d'un traitement)) ou *le temps de résolution* (2 s. < t < 45mn. (c'est-à-dire le temps d'une séance de travail en classe)). La connaissance de ces facteurs s'avère donc indispensable dans la simple perspective de l' enseignement. Du moins si l'on estime que les figures sont nécessaires ou utiles. Ce qui n'a pas toujours été le cas dans l'enseignement des mathématiques en France.

Naturellement l'élaboration d'un instrument d'analyse de "l'aide heuristique" d'une figure dans une situation mathématique et celle de situations d'apprentissage exigent que nous ayons une connaissance détaillée de tous les facteurs intervenant pour chacune des modifications figurales, ainsi qu'une estimation de leur influence respective sur la visibilité des opérations produisant ces modifications. Des travaux ont déjà été entrepris en ce sens avec succès, du moins pour ce qui concerne les modifications méréologiques (Mesquita 1989a, 1989b, Padilla 1990, Padilla 1992) et l'une des modifications optiques possibles (Lémonidis 1991).

Dans le cadre très restreint de article, nous allons nous contenter de montrer comment la simple prise en compte des facteurs relatifs à la modification méréologique (Fig. 3 col. 4) permet d'analyser et d'évaluer l'aide heuristique qu'une figure peut apporter dans un problème déterminé.

	I	II	III
Énoncé du cas particulier	Dans la figure suivante, ABCD est un parallélogramme, U est le milieu du côté AD...	Dans la figure suivante, AC est la diagonale du rectangle ABCD.	Dans la figure suivante ABCD est un trapèze, AC et BD sont ses diagonales, et U le point d'intersection de AC et BD.
	Comparer les aires des deux régions en gris (UAB et UBD) et de la région en blanc (CUB)	Comparer les deux aires des deux rectangles... en gris.	Comparer les aires des deux triangles... en gris
Énoncé du cas général	En faisant varier le point U sur AD...	En faisant varier le point U sur la diagonale AC,	Dans un trapèze quelconque, ..., on trace des triangles comme dans la figure ci-dessous
	Obtiendra-t-on... la même réponse qu'à la question précédente ?	Obtiendra-t-on la même réponse... qu'à la question précédente ?	Comparer... Obtiendra-t-on... la même réponse qu'à la question précédente ?

figure donnée

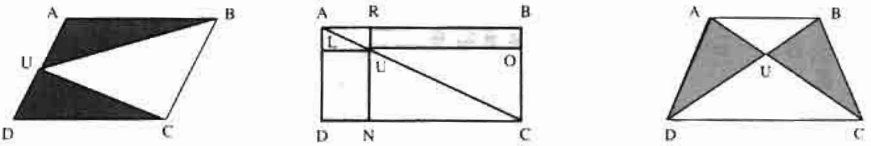
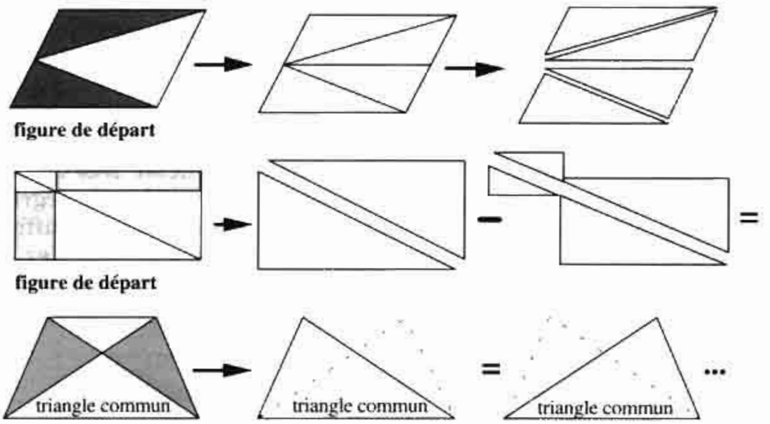


Fig. 4. Variations de figures pour un problème de géométrie.

III. Deux exemples d'analyse de l'aide heuristique d'une figure

Le premier exemple est emprunté au travail d'A. Mesquita (1989b, pp. 39-46, 92). Il présente un double intérêt. Le même type de problème géométrique, faisant appel à la même modification figurale pertinente pour sa résolution a été présenté avec trois figures différentes à un population d'élèves de quatrième (13-14ans). On a donc là un bel exemple de variation figurale qui peut être analysé en fonction des facteurs relatifs à la modification méréolo-



Facteurs favorisant ou inhibant la visibilité de l'opération de reconfiguration	I	II	III
1. **Partage en sous-figures pertinentes**	**non donné**	**donné**	**donné**
2. Complémentarité de bonne forme des sous-figures à recombiner	oui	non	non
3. Contour des sous-figures à obtenir par reconfiguration	oui	non	non
4. **Dédoublement d'une sous-figure**	Non	Non	oui
Résultats avec 120 élèves de 13-14 ans			
cas particulier	56%	60%	11%
cas général	34%	24%	0%

Fig. 5. Facteurs déterminant la visibilité de l'opération de reconfiguration pour les trois figures du problème de comparaison d'aires. Nous avons mis en caractères gras les facteurs qui se révèlent être les plus importants. Le fait que le partage ne soit pas donné pour le parallélogramme et qu'il faille dédoubler une sous-figure pour le trapèze empêchent de voir les reconfigurations à effectuer. Toutes les réponses comptées comme des réussites dans le cas particulier n'ont pas été obtenues par un traitement de reconfiguration, mais beaucoup ont été obtenues par des mesures. En revanche la plupart de ceux qui ont réussi le cas général avaient résolu le cas particulier par reconfiguration. Les résultats indiqués ici sont ceux de Mesquita (1989b p. 92).

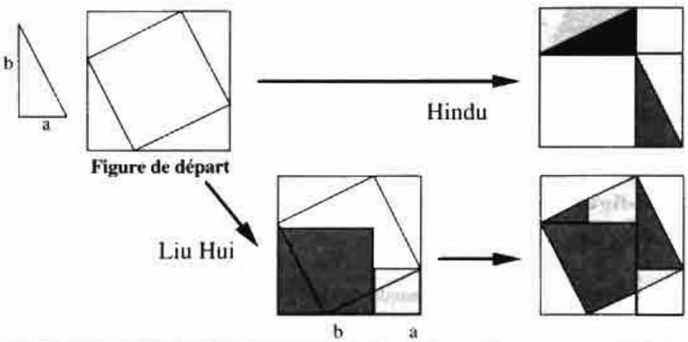
gique. Et nous pouvons observer les effets éventuels de ces variations figurales du point de vue de l'aide heuristique de chaque figure.

Pour bien mettre en évidence la similitude des énoncés proposés, nous avons choisi de les présenter en parallèle (voir Fig. 4).

La même opération de reconfiguration (Fig. 3, col. 3) donne la modification figurale heuristiquement pertinente pour résoudre le problème. Les phases du déroulement de cette opération sont représentées ci-après pour chacune des trois figures (voir Fig. 5). Et on peut constater que cette opération n'est pas également visible dans chacune des trois figures. Le tableau donne les valeurs de chacune des trois figures en fonction des facteurs d'organisation.

Le deuxième exemple concerne la comparaison de deux "démonstrations" historiquement célèbres du théorème de Pythagore (voir Fig. 6).

On trouvera dans Padilla (1992, pp. 35-38, 197-218) des analyses détaillées d'autres démonstrations du théorème de Pythagore reposant sur des mises en œuvre variées de la reconfiguration. Ce type d'analyse peut d'ailleurs être appliqué à des exercices, même très élémentaires de géométrie pour évaluer le degré de difficulté ainsi que la nature des difficultés qu'ils peuvent représenter pour des élèves de 6^e^ ou de 5^e^ (Padilla 1992, pp. 85-88).



Facteurs favorisant ou inhibant la visibilité de l'opération de reconfiguration	Hindu	Liu Hui
1. **Partage en sous-figures pertinentes**	donné	**non donné** - *Deux partages successifs sont requis*
2. Complémentarité de bonne forme des sous-figures à recombiner	oui	**Non**
3. Contour des sous-figures à obtenir par reconfiguration	non convexe	convexe

Fig. 6. Dans cette analyse nous n'avons retenu que les facteurs pour lesquels des différences notables dans le coût de traitement figural apparaissent. On voit pourquoi la reconfiguration est beaucoup moins visible dans la seconde démonstration (valeurs en caractères gras) que dans la première.

IV. Les structures dyadique et triadique de la représentation figurale dans une démarche géométrique

Nous pouvons maintenant reprendre la question cruciale soulevée à la fin de la première partie à propos de l' indépendance des différentes appréhensions d'une figure : pourquoi un travail sur l'appréhension discursive ou sur l'appréhension séquentielle ne développe-t-il pas, ou seulement rarement, des compétences d'exploitation heuristique d'une figure ?

Comme on a pu s'en rendre compte le rapport de chacun de ces trois types d'appréhension à l'appréhension perceptive change. Il suffit de se rappeler la nature des traitements qui leur sont propres (1[re] partie). Il y a ainsi opposition entre l'appréhension discursive d'une figure et son appréhension perceptive : cette opposition est celle entre ce qu'on reconnaît spontanément sur une figure, c'est-à-dire ce qu'elle montre, et ce qu'elle représente mathématiquement. Les élèves n'ont pas toujours conscience de cette opposition et lorsqu'ils s'y heurtent il ne la comprennent pas toujours. La prise en compte de contraintes techniques donne les moyens de se distancier par rapport aux évidences de l'appréhension perceptive d'une figure. Et en ce sens l'*appréhension séquentielle oblige à prendre du recul par rapport à l'appréhension perceptive*. En revanche, il y a une *grande proximité entre l'appréhension opératoire et l'appréhension perceptive*. Toutes les deux mobilisent les mêmes lois et les mêmes paramètres d'organisation d'élément d'une figure permettant de reconnaître un objet en 2D ou en 3D. Même si cette mobilisation ne se joue pas aux mêmes niveaux de traitement. Car, dans un cas, le traitement est automatique, c'est-à-dire immédiat à l'échelle du contrôle conscient, dans l'autre, le traitement consiste en opérations effectuées consciemment, de façon tâtonnante et prend un temps qui peut varier considérablement. Cette distance et cette proximité changent radicalement la nature de la représentation propre à la figure : dans un cas nous avons une structure dyadique de la représentation et dans l'autre nous avons une structure triadique. La différence tient au fait que la signification qui est propre à une figure et qui est déterminée par ses lois et ses paramètres d'organisation interne est soit éliminée au profit de l'objet représenté soit conservée indépendamment de l'objet représenté, comme on peut le voir sur les deux schémas de la page suivante.

Pour bien comprendre la différence qui sépare la structure dyadique de la représentation et la structure triadique, il est important de se rappeler deux choses.

1. **Un système sémiotique détermine des significations par lui-même, indépendamment des objets que son emploi permet de représenter**. On sait, par exemple, que la "valeur" des unités constituant une langue dépend du système d'oppositions permettant de les distinguer (Saussure pp. 159-162). Ainsi la signification des mots dans une langue dépend de leurs relations avec les autres mots dont ils se distinguent. Un autre exemple est celui de l'écriture des nombres. Le système d'écriture des nombres détermine une "signification opératoire" qui change avec le système : la signification opératoire de l'écriture décimale d'un nombre n'est pas la même que celle de l'écriture fractionnaire de ce même nombre. De même les lois d'organisation perceptive déterminent des "significations perceptives" de forme, de surface et de disposition dans un espace à deux ou à trois dimensions.

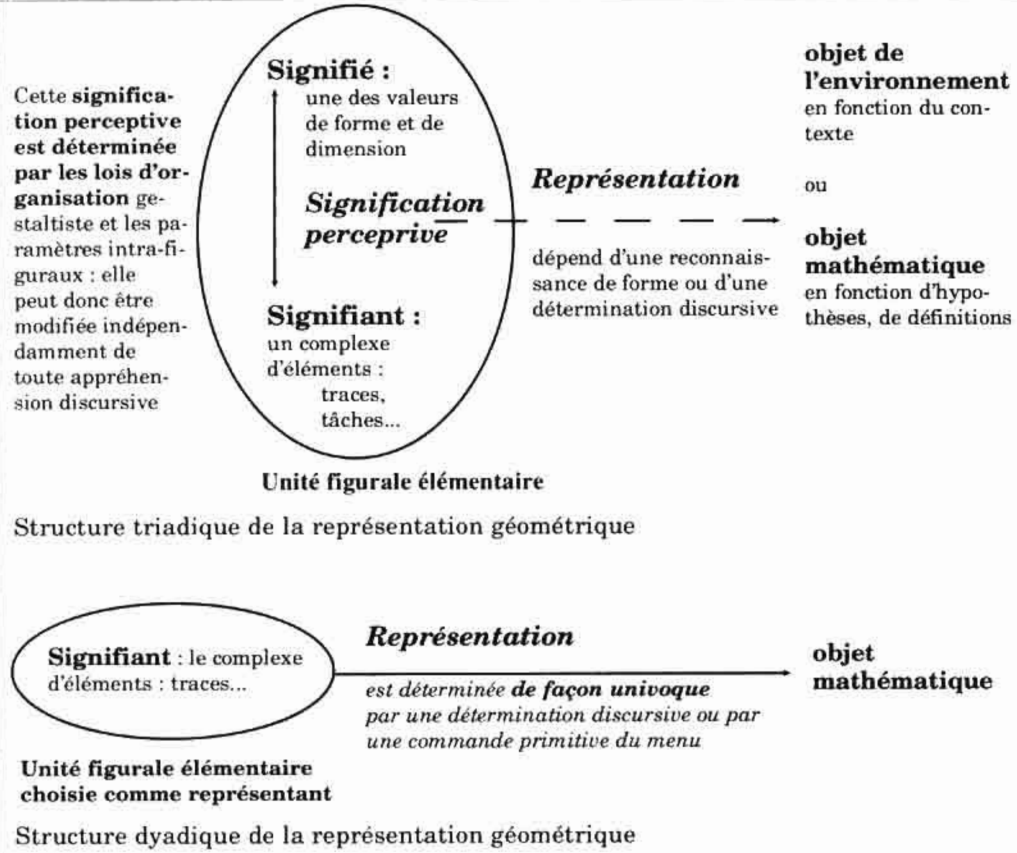


Fig. 7. Les deux structures de la représentation. Une même figure peut fonctionner selon deux structures différentes de la représentation. Rappelons que toute figure géométrique comprend au moins deux unités figurales élémentaires (Duval 1992a, ch. IV).

2. **La signification perceptive est différente de sa dénomination dans une langue ou dans le cadre d'une théorie.** En d'autres termes la signification perceptive déterminée par l'appréhension perceptive est indépendante de toute appréhension discursive : on peut reconnaître des objets ou des formes et être incapables de les nommer et ignorer leurs propriétés ou leur usage (Marr 1982, pp. 35-36). En réalité, la dénomination concerne la relation de référence : c'est elle qui détermine ce qu'une figure représente. Naturellement, la langue naturelle commune tend à associer des noms à des unités figurales élémentaires : rond, ovale, carré, triangle... Chaque langue a un vocabulaire pour désigner et

distinguer des formes, au même titre qu'elle a un vocabulaire pour désigner les couleurs. Mais cela ne doit pas cacher le fait qu'une même figure est susceptible de représenter des objets différents et peut donc être dénommée différemment. Un rond peut représenter un ballon, la lune ou un cercle. Une forme carrée surmontée d'un forme pointue peut représenter une maison, une enveloppe ouverte ou un triangle ayant un côté commun avec un carré. Une forme carrée peut représenter un carré ou un cube ayant une face dans le plan fronto-parallèle, etc. La détermination de ce qu'une figure représente dépend du contexte ou des indications discursives qui sont données.

On voit alors sur les schémas ci-dessus que, dans une structure dyadique de la représentation, les significations perceptives de la figure, comme celle des unités figurales qui la composent, sont subordonnées à la représentation fixée par la dénomination *("c'est un...")*. L'appréhension discursive et l'appréhension séquentielle d'une figure dans une démarche géométrique impliquent un fonctionnement selon la structure dyadique (tableau de la fig. 2). Les significations perceptives y sont complètement neutralisées. Car la référence à l'objet représenté dépend uniquement des définitions qui sont posées ou des commandes primitives du menu, c'est-à-dire des associations primitives entre quelques unités figurales élémentaires et un objet mathématique. Tout signifié perceptif qui ne peut pas être obtenu par déduction à partir des définitions, ou par une des procédures de construction propres à l'instrument utilisé, ne peut rien représenter. En d'autres termes les relations entre les unités figurales élémentaires admises au départ comme des "représentants" ne peuvent avoir comme relations perçues pertinentes que des relations théoriquement déductibles, ou instrumentalement constructibles. Sur les schémas, c'est la barre verticale en pointillés qui marque le maintien et la priorité de la signification perceptive par rapport à la détermination de ce qui est représenté.

On voit également sur les schémas ci-dessus que, dans une structure triadique de la représentation, les significations perceptives gardent leur autonomie par rapport à ce qu'elles représentent et par conséquent gardent une certaine ouverture par rapport aux possibilités de représentation. De par sa grande proximité avec l'appréhension perceptive l'appréhension opératoire d'une figure, celle qui permet l'exploration heuristique d'une situation, implique un fonctionnement selon la structure triadique et non pas selon la structure dyadique.

On voit donc pourquoi un travail sur l'appréhension discursive ou sur l'appréhension séquentielle d'une figure ne développe pas des compétences d'exploitation heuristique d'une figure. Un travail spécifique et irremplaçable, prenant en compte les facteurs de visibilité relatifs aux modifications figurales s'avère donc nécessaire.

Perspectives pour un apprentissage

La géométrie est un domaine dont la pratique fait appel à des activités cognitivement hétérogènes : raisonnement déductif, argumentation au cours de la recherche de conjectures par exemple, utilisation des figures soit à des fins heuristiques soit à des fins de modélisation, etc. Les mathématiciens, les enseignants de mathématiques et même parfois les didacticiens sont loin d'avoir pris conscience de la complexité et de l'hétérogénéité des activités cognitives mobilisées par la pratique de la géométrie. Et cela malgré des constats d'échecs répétés dont le plus flagrant est peut-être celui fait pas Schoenfeld, celui de compartimentalisation des connaissances acquises :

> "Certains exemples de recherches en cours indiquent que les étudiants sont compétents lorsqu'il s'agit de déduire et compétents lorsqu'il s'agit de construire mais qu'ils **compartimentalisent** souvent leurs connaissances de façons inappropriées... Il en résulte qu'une grande part de leurs connaissances reste inutilisée et que leurs performances dans la résolution de problème sont beaucoup plus faibles qu'elles ne pourraient (et ne devraient) être... _– contrairement à ce qui est explicitement visé dans le curriculum mathématique – La **compartimentalisation inappropriée** des activités de *déduction* et des activités de *construction* est une conséquence directe de l'enseignement. (1986, p. 226).

Cette compartimentalisation des connaissances décrite par Schoenfeld sera inévitable aussi longtemps que le découpage didactique des tâches en géométrie ignorera l'hétérogénéité des activités cognitives réelles.

Il y a, en effet, un traitement figural heuristique qui est indépendant des activités de construction et qui est indépendant de toute activité de raisonnement, sans quoi le recours au registre des figures ne serait qu'une ruse pour présenter le déroulement d'un raisonnement sous une forme supposée plus immédiatement accessible. Or ce traitement figural se révèle peu évident et très difficile à attraper pour beaucoup d'élèves. "On voit ou on ne voit pas" comme disent, d'un ton goguenard, les élèves qui réussissent et, d'un ton résigné, ceux qui ne réussissent pas. Thom, en d'autres temps et dans un article qui fit grand bruit, ne disait pas autre chose (Thom 1972). De même le raisonnement déductif est également irréductible à l'argumentation et ne présente rien de naturel pour la grande majorité des élèves (Duval 1991, 1992, Duval & Egret 1993).

Prendre conscience de l'hétérogénéité des activités cognitives mobilisées par la pratique de la géométrie, c'est aussi découvrir la nécessité d'un apprentissage spécifique de ces activités. Nous venons de faire allusion à celle concernant le raisonnement déductif, nous voudrions ici attirer l'attention sur celle qui concerne les traitements liés à l'appréhension opératoire des figures. Dans un tel apprentissage les différents facteurs liés aux significations perceptives joue un rôle central. Leur prise en compte permet d'organiser, pour chaque opération de modification figurale, une variation systématique des figures en allant des effets de visibilité immédiate jusqu'à ceux d'une occultation presque complète. De cette manière les élèves sont introduits dans le registre des figures, registre de représentation qui a ses opérations et ses traitements propres, indépendamment de toute subordination illustrative ou interprétative de figures particulières à un cadre théorique ou à une gamme de contraintes instrumentales. C'est à cette condition seulement que les figures peuvent devenir un registre d'exploration heuristique et servir, également, de registre de référence pour l'appréhension discursive. Des expériences d'enseignement ont été entreprises en ce sens pour les opérations de reconfiguration (Padilla 1992) et de superposition en profondeur (Lémonidis 1991) ; et, bien qu'elles se soient déroulées sur quelques séances seulement, des transformations profondes dans les démarches des élèves ont été observées et un saut spectaculaire dans les taux de réussite a été enregistré. Des voies de recherche fructueuses pour l'enseignement s'ouvrent dans ce domaine.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTIN, J. (1970) : "La graphique", *Communications* 15, pp. 169-185.

BESSOT, D. (1983) : "Problèmes de représentation de l'espace", *Enseignement de la Géométrie*, Bulletin Inter-Irem n°23 pp. 33-40.

BRESSON, F. (1987) : "Les Fonctions de Représentation et de Communication", *In* Piaget, Mounoud, Bronckart (eds.) *Psychologie,* Encyclopédie de la Pleïade, pp. 933-982.

COREN, S., PORAC, C., WARD, L.M. (1979) : *Sensation and Perception*, New-York, Academic Press.

DENIS, M. (1989) : *Image et Cognition*, Paris, P.U.F.

DUPUIS, C., DUVAL R., PLUVINAGE F., (1978) : "Etude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième", *Géométrie au premier cycle,* II, Paris, A.P.M.E.P. pp. 65-101.

DUVAL, R. (1983) : "L'obstacle du Dédoublement des objets mathématiques", *Educational Studies in mathematics* 14, pp. 385-414.

DUVAL, R. (1988) : "Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*1, pp. 57-74.

DUVAL, R. (1991) : "Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration", *in Educational Studies in Mathematics*. 22,3, pp. 233-261.

DUVAL, R. (1992a) : *Sémiosis et Noésis*, Préprint.

DUVAL, R. (1992b) : "Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive", *Petit x* n°31, pp. 37-61.

DUVAL, R. (1993) : "Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings", *Symposium Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.*

DUVAL, R. & EGRET, M.A. (1993) : "Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif", *Repères* n°12, pp. 114-140.

FRANCÈS, R. (1967) : "La perception des formes et des objets", dans *Traité de Psychologie Expérimentale VI* (Ed. Fraisse & Piaget), Paris, P.U.F.

LÉMONIDIS, E.C. (1990) : *Conception, Réalisation et Résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie,* Strasbourg, Thèse U.L.P.

LÉMONIDIS, E.C. (1991) : "Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement sur l'homothétie", *Recherches en didactique des mathématiques* 11, 2.3, pp. 295-324.

LÉVY, A. (1970) : *Psychologie sociale textes fondamentaux*, Paris, Dunod.

MARR, D. (1982) : *Vision*, New York, W.H. Freeman and Company.

MESQUITA, A. (1989a) : "Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie", *Educational Studies in Mathematics* 20, pp. 55-77.

MESQUITA, A. (1989b) : *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie*, Strasbourg, Thèse U.L.P.

PADILLA, V. (1990) : "Les Figures aident-elles à voir en géométrie ?", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 3, pp. 223-252.

PADILLA, V. (1992) : *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Strasbourg, Thèse U.L.P.

PAÏVO, A. (1986) : *Mental Representations. A dual coding Approach,* Oxford, Oxford University Press.

PÓLYA, G., (1945) : *How to solve it*, (1965) tr. fr : *Comment poser et résoudre un problème,* Paris, Dunod.

SAUSSURE, (de), F. (1973) : *Cours de linguistique générale*, Paris, Payot.

SCHOENFELD, A.H. (1986) : "On having ad using Geometric knowledege", *in Conceptual and Procedural Knowledge the case of mathematics,* (Ed. J. Hiebert) Hillsdale NJ, Erlbaum, pp. 225-263.

THOM, R. (1972) : "Les Mathématiques "Modernes": une erreur pédagogique et philosophique", *l'Age de la Science*, III, 3, pp.225-242.