
MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

Modèle de Bézier et modèle B. Spline

(Première partie)

Jean-Pierre POUGET
Irem Paris Nord

1. Une démarche modélisante

L'activité de *MODÉLISATION* est une des plus nobles et des plus difficiles. *MODÉLISER*, c'est-à-dire inventer des modèles qui traduisent le mieux possible une réalité souvent complexe, débouche aussi sur l'exploitation des modèles créés : cette exploitation va faire naître d'autres réalités, grâce à la simulation par exemple, qui va amener des modifications éventuelles.

La *modélisation de formes*, partie fondamentale de la modélisation géométrique présente deux facettes : soit modélisation de formes réelles, préexistantes, soit modélisation de nouvelles formes, ex nihilo. Elle reçoit le qualificatif de géométrie par référence aux objets, aux formes géométriques du plan ou de l'espace qui vont être modélisés. Les modèles mathématiques intervenant dans cette modélisation dépendent de l'analyse mathéma-

tique, de la géométrie vectorielle et analytique et de nombreuses autres parties des mathématiques.

Ce domaine n'aurait pas vu le jour, si après l'invention du transistor, n'avait été inventé l'ordinateur, et si une science nouvelle, l'informatique, ne s'était créée sur les fondements de ces *nouvelles technologies*.

Ce domaine n'aurait pas vu le jour, si quelque part dans le monde des *bureaux d'études* de constructeurs automobiles (Renault, Citroën, General Motors), ou aéronautiques (Boeing), quelques précurseurs géniaux ne s'étaient dit :

* Nous disposons d'un nouvel outil ; inventons des modèles mathématiques capables de donner une *mémorisation facile* pour des formes complexes, capables aussi de *favoriser la création et la modification* de ces formes.

Modélisons pour mieux concevoir, puis fabriquer nos automobiles, nos avions. »

Le domaine de la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) était né.

Bézier, De Casteljaou, Ferguson, De Boor, Cox, Coons, Gordon, Riesenfeld, Forest apportèrent les premiers éléments de modélisation de 1962 à 1973.

Après l'écoulement du temps nécessaire à la maîtrise des concepts, à la compréhension de l'intérêt de leurs apports, ces modèles deviennent la base de nombreux logiciels de CAO (conception) ou de CFAO (conception et fabrication), destinés à l'assistance dans les tâches de conception, de simulation (lien avec la méthode des éléments finis) et de fabrication.

Actuellement, en 1993, des dizaines de systèmes informatiques, comme CATIA (Dassault), EUCLID (Matra), PRISM (Calma), CADAM (IBM), STRIM (Cisigraph)..., sont disponibles sur un marché sans cesse grandissant, comme en témoignent les nombreuses expositions et conférences spécialisées (par exemple, MICAD).

De nombreux modèles sont proposés [2, 14]. Parmi ceux-ci, le modèle de Bézier et le modèle B-Spline sont les plus connus. Ce sont, en général, des modèles utilisant des fonctions polynomiales. Cependant on trouve aussi, depuis le début, des modèles s'appuyant sur des fractions rationnelles.

2. Du rôle des mathématiques

On peut maintenant poser cette question : que viennent faire les mathématiques, et par voie de conséquence les mathématiciens, enseignants ou chercheurs, dans cet environ-

nement technique, au milieu d'applications industrielles et informatiques ?

Donnons une amorce de réponse :

— Les mathématiques vont fournir les outils nécessaires pour la création et la construction des modèles.

— Les mathématiques vont favoriser la compréhension, l'explication, la formation, à propos de ces modèles.

Signalons cependant un écueil possible. Il n'est pas souhaitable que, par théorisation excessive soit masquée la motivation qui a amené la création de ces modèles chez les ingénieurs et chercheurs, travaillant dans les bureaux d'études de conception : il s'agissait d'inventer des modèles permettant la création, la modification de formes géométriques, les plus efficaces et les plus interactives possibles.

Au contraire, l'explication permanente du lien entre les modèles et cette motivation en donnant des présentations différentes d'un même modèle donne au mathématicien la possibilité de favoriser la compréhension profonde de ce modèle.

Le professeur de mathématiques trouvera de plus dans ce domaine un vaste champ d'applications de plusieurs ressources mathématiques (Analyse, vecteurs, dérivation...). Il pourra aussi varier la nature de sa présentation, selon l'auditoire : en effet, des activités simples comme la fabrication d'une forme plane avec des arcs de paraboles jointifs permet une première approche au niveau secondaire. L'illustration d'un cours sur les courbes définies en coordonnées paramétriques peut emprunter des exemples au domaine de la modélisation géométrique (cubiques par exemple).

L'étude de *famille de fonctions* de type polynomial peut être illustrée d'exemples venus de la modélisation géométrique : polynômes de Bernstein, fonctions polynomiales B-Splines.

L'étude de *barycentres* peut aussi s'appuyer sur les définitions barycentriques du modèle de Bézier ou du modèle B-Spline. Le domaine fournit aussi des exemples intéressants de présentation d'*algorithmes itératifs et récursifs*. Cette longue succession est destinée à montrer que l'on peut puiser dans ce domaine des exemples illustratifs lors de l'exposé de certaines notions mathématiques.

Le professeur de mathématiques peut aussi introduire une *formation complète* sur ces modélisations lorsque les étudiants sont appelés professionnellement à utiliser ces modèles. Le rôle de l'enseignant en mathématiques est alors de découvrir l'intérieur d'une boîte noire, où les mathématiques fournissent les éléments du modèle.

(Exemple : Brevet de Technicien Supérieur en Informatique Industrielle)

Il est souvent difficile de convaincre et de motiver ! Voici un domaine où la curiosité intellectuelle des étudiants va s'exercer de manière naturelle. Les étudiants vont capter l'esprit de ces modèles, vont exploiter ces modèles en réalisant souvent, sans qu'on les y pousse, des applications de leur cru, et auront le confort et l'assurance des utilisateurs connaissant l'intérieur de l'outil utilisé.

Les fonctions polynomiales, et les fractions rationnelles sont employées depuis longtemps en mathématiques — Newton, Lagrange, Legendre, Hermite, Bernstein... — mais le plus souvent dans des contextes d'interpolation ou d'approximation.

L'*originalité* des modèles polynomiaux intervenant en modélisation géométrique est due au contexte très différent de la création de formes géométriques. Certes des liens apparaissent çà et là entre les modèles polynomiaux relatifs aux contextes d'*interpolation, d'approximation, de création de formes*, mais chaque modèle a sa propre cohérence liée à l'application visée. À titre d'exemple de liaison, il a fallu une dizaine d'années pour relier le modèle de Bézier aux polynômes de Bernstein. On peut aussi entre plusieurs modèles de B-Spline candidats à une création de forme, approchant une forme préexistante, engager des méthodes d'approximation permettant la recherche de la meilleure courbe possible, associées à un critère, comme celui des moindres carrés.

Au sein d'une longue chaîne où l'on trouve la perspective de Léonard de Vinci, la géométrie descriptive de Monge, appui des techniques du dessin industriel, arrivent aujourd'hui de *nouveaux modèles* au service de la modélisation des formes géométriques. Ces nouveaux modèles sont ceux des systèmes informatiques de CAO.

Nous allons donner une vue d'ensemble sur ces différents modèles avant d'aborder en détail la présentation de deux d'entre eux.

3. Vue d'ensemble sur la modélisation en CAO

Des modèles de courbes définies paramétriquement de type B-Spline, du nom de la languette de bois flexible qui servait avant à créer les formes pratiquement, sont les premiers à être utilisés par FERGUSON (Boeing) en 1964. Ferguson utilisa les polynômes les plus simples $1, t, t^2, \dots$ mais ces modèles exi-

gent une grande habitude et une grande dextérité pour arriver à piloter une forme.

Les courbes *B-Spline*, (Basis Splines) proposées par De Boor (72), et reprises, dans un contexte CAO, par Gordon et Riesenfeld (73) s'appuient sur la définition des fonctions B-Splines (définition récursive de De Boor). Ce modèle permet une création interactive, très paramétrée, d'une grande famille de formes géométriques.

Le modèle de Bézier, proposé par Pierre Bézier, à partir de 1962 a mûri au sein d'UNISURF développé dans les bureaux d'études de Renault. En parallèle, Paul de Casteljaou créait chez Citroën un autre modèle (forme à pôle).

Le lien entre ces différents modèles a notamment été fait par Riesenfeld (polynômes de Bernstein).

L'évolution de ces différents modèles est ordonnée par une relation d'inclusion, *chacun étant un cas particulier du précédent* : modèle de Bézier, modèle B-Spline, modèle NURBS.

Les deux premiers modèles sont à base de polynômes, le troisième est à base de fractions rationnelles.

Même si, dès le début de la modélisation, des modèles à base de polynômes et des modèles à base de fractions rationnelles ont été concurremment expérimentés, ceux à base de polynômes se sont développés en premier, pour des raisons de simplicité évidentes. On a complexifié vers 1985 pour réaliser des formes difficiles à créer en faisant de nouveau appel aux fractions rationnelles avec le modèle NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline). Ce modèle a en outre la propriété d'unifier dans le même modèle, la réalisation

exacte de certaines courbes classiques (cercles et coniques) et la création de courbes créées *ex nihilo*.

Pour la création de formes dans l'espace, on trouve deux classes de modèles :

— Coons propose un modèle où la forme volumique est créée à partir de *carreaux* définis uniquement par quatre courbes frontières.

— D'autres modèles basés sur des extensions des modèles de Bézier et des modèles B-Splines définissent la surface *paramétriquement point par point*.

En moins d'une trentaine d'années, en raison de la présence de l'outil informatique s'est mis, petit à petit en place, un domaine nouveau, où s'exerce une *recherche active* : par exemple modèle avec déplacement de courbes (offset), modèle NURBS.

4. Deux exemples de modélisation

Détaillons à titre d'exemples, deux modèles fondamentaux, celui de Bézier [5, 6] et celui des B-Splines [8, 9, 10].

4.1. Modèle de BÉZIER.

Sur le plan pédagogique, plusieurs présentations du modèle de Bézier peuvent être faites. Chacune de ces présentations apportent un *éclairage différent* sur le modèle, et découvre des propriétés différentes mettant en évidence la *capacité* de ce modèle dans la création des formes géométriques [3].

Une présentation s'appuie sur le choix des points de *contrôle* et le choix des *ponds bino-*

miaux affectés à ces points dont les influences sur la forme de la courbe sont mises clairement en évidence.

Une deuxième présentation basée sur des vecteurs et des contraintes de dérivation montre le contrôle possible de la courbe par un "moule vectoriel".

Une troisième présentation donne une construction algorithmique, à la fois numérique et géométrique montrant pas à pas l'évolution de la forme vers sa forme définitive. De plus, le modèle est suffisamment riche pour offrir d'autres angles pour l'aborder (matrices, courbures par exemple).

4. 11. Une première présentation : points de contrôle.

A. Définition du modèle.

Soit t une variable réelle appartenant à l'intervalle $[0,1]$. On considère un ensemble de $n + 1$ points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$.

Soit la famille de polynômes définie par :

$$t \longmapsto B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

où i est un entier prenant les valeurs $0, 1, \dots, n$.

On définit un point $M(t)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot \vec{OP}_i \quad (1)$$

Exemple.

Pour $n=3$ les polynômes $B_{i,3}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Soient les points $P_0(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(2,1)$, $P_3(3,0)$.

Les coordonnées x, y du point $M(t)$ sont alors :

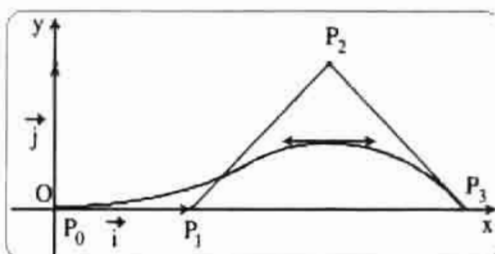
$$\begin{cases} x = ft = 0_6(1-t)^3 + 1_6 3t(1-t)^2 + 2_6 3t^2(1-t) + 3_6 t^3 \\ y = g(t) = 0_6(1-t)^3 + 0_6 3t(1-t)^2 + 1_6 3t^2(1-t) + 0_6 t^3. \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2(1-t). \end{cases}$$

Une équation cartésienne de cette courbe est :

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9}, \text{ pour } x \text{ appartenant à } [0,3].$$



B. Influence des polynômes de Bernstein

Les polynômes précédents sont les polynômes de Bernstein. Bernstein les a utilisés au début de ce siècle dans la théorie de l'approximation des fonctions.

Dans le modèle des courbes de Bézier, ces polynômes sont utilisés pour réaliser des courbes de forme voulue.

L'étude conjointe des polynômes permet de voir l'influence des valeurs des polynômes, pour une valeur de t fixée, sur la forme de la courbe.

Compte tenu de la définition du modèle, les valeurs $B_{1,n}(t)$ sont des "poids" affectés à chaque point P_i .

Les points P_i qui permettent de contrôler la forme de la courbe sont appelés des points de contrôle. Suivant les valeurs de t de l'intervalle $[0,1]$, l'influence de chaque point de contrôle est plus ou moins forte, en liaison avec la valeur de $B_{1,n}(t)$ correspondante.

Exemple

Faisons l'étude conjointe de ces polynômes, pour une valeur déterminée de n , par exemple pour $n = 3$.

• $B_{0,3}(t) = (1-t)^3$; $B'_{0,3}(t) = -3(1-t)^2$.

t	0		1
$B'_{0,3}$	-3	-	0
$B_{0,3}(t)$	1		0

• $B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$; $B'_{1,3}(t) = 3(1-t)(1-3t)$.

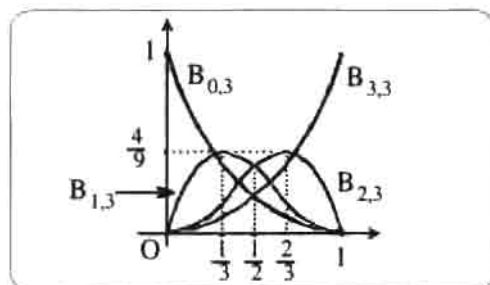
t	0	$\frac{1}{3}$	1
$B'_{1,3}(t)$	3	+	0
$B_{1,3}$	0	$\frac{4}{9}$	0

• $B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$; $B'_{2,3}(t) = 3t(2-3t)$.

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$B'_{2,3}(t)$	0	+	-3
$B_{2,3}$	0	$\frac{4}{9}$	0

• $B_{3,3}(t) = t^3$; $B'_{3,3}(t) = 3t^2$.

t	0		1
$B'_{3,3}(t)$	0	+	3
$B_{3,3}$	0		1



Si l'on revient à l'exemple précédent ($n = 3$), pour $t = 0$ seul le point P_0 influe puisque $B_{1,3}(0) = B_{2,3}(0) = B_{3,3}(0) = 0$.

En suivant la variation dans le sens de t croissant l'influence de P_1 diminue, alors que les influences de P_1, P_2, P_3 augmentent jusqu'à une influence maximale pour P_1 obtenue pour $t = \frac{1}{3}$.

Par exemple, pour $t = \frac{1}{2}$, les influences venant des poids polynomiaux $B_{1,3}$ et $B_{2,3}$ affectés aux points de contrôle P_1 et P_2 sont égales.

Les polynômes de Bernstein ont quelques propriétés remarquables (pour les démonstrations, voir [3]) :

(P1) • Pour tout t appartenant à $[0,1]$,

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1.$$

(P2) • Une conséquence de la propriété (P1) est d'assurer dans la définition du modèle (1), l'indépendance de la courbe par rapport au point O choisi dans cette définition.

(P3) • Une deuxième conséquence de la propriété (P1) conduit à :

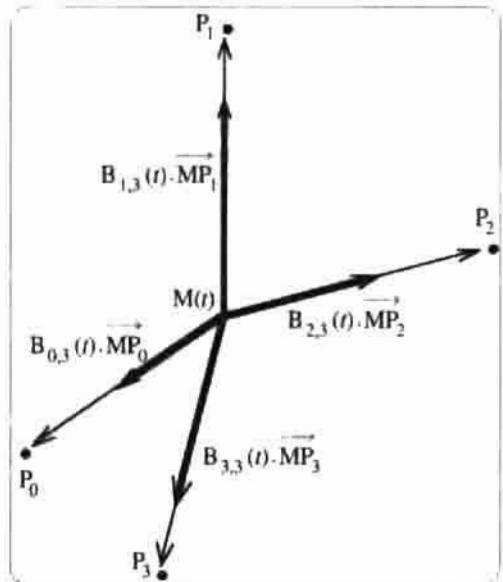
$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \vec{MP}_i = \vec{0}.$$

Le point M est le barycentre, pour t fixé, des points (P_i) affectés des coefficients $B_{i,n}(t)$.

Cette propriété donne matière à une interprétation intéressante mettant en évidence l'influence des points de contrôle, et l'influence des poids polynomiaux $B_{i,n}(t)$ sur la position du point $M(t)$.

Exemple : $n = 3$

On peut "imaginer" le point $M(t)$ centre d'une "araignée à ressort" s'équilibrant en étant soumise aux forces d'attraction $B_{i,3}(t) \cdot \vec{MP}_i$ de la part des points de contrôle.



(P4) • Des relations de récurrence permettent de définir la famille de polynômes de Bernstein :

$B_{0,n}(t) = (1-t)B_{0,n-1}(t)$; $B_{n,n}(t) = t B_{n-1,n-1}(t)$.
Pour i appartenant à $\{1, 2, \dots, n-1\}$:

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t).$$

(P5) • Une dernière propriété, est relative à l'intégration.

On calcule dans l'exemple précédent successivement :

$$A_0 = \int_0^1 B_{0,3}(t) dt = \frac{1}{4} \text{ unité d'aire ;}$$

$$A_1 = \int_0^1 B_{1,3}(t) dt = \frac{1}{4} \text{ unité d'aire ;}$$

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{4} \text{ unité d'aire.}$$

Cette propriété (aire constante pour une valeur fixée de n) se généralise :

$$A_{i,n} = \int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1} \text{ unité d'aire.}$$

C. Modèle global

Le modèle des courbes de Bézier apparaît de manière claire comme un modèle **global** dans le sens où *le changement de position d'un point de contrôle modifie l'ensemble de la courbe*. En effet la position de chaque point P_i pondéré par $B_{i,n}(t)$ avec t variant de 0 à 1, intervient sur toute la courbe.

Exemple

Construisons les courbes de Bézier, correspondant à $n = 2$, la première courbe étant définie par les points de contrôle $P_0(2,0)$, $P_1(1,3)$, $P_2(-2,0)$; la deuxième par les points

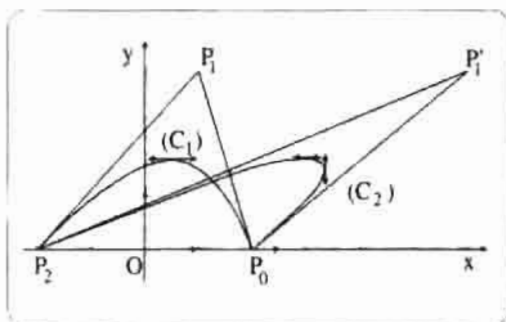
de contrôle P_0 , $P'_1(6,3)$, P_2 (on change le deuxième point seulement).

Première courbe (C_1) :

$$\begin{cases} x = -2t^2 - 2t + 2 \\ y = -6t^2 + 6t. \end{cases}$$

Deuxième courbe (C_2) :

$$\begin{cases} x = -12t^2 + 8t + 2 \\ y = -6t^2 + 6t. \end{cases}$$



Le changement du deuxième point de contrôle modifie *toute* la courbe. On remarque sur cet exemple le lien graphique entre le déplacement de la courbe qui "suit" le déplacement du point de contrôle.

D. Propriétés géométriques

— Le modèle de Bézier possède des propriétés géométriques simples qui permettent d'obtenir rapidement la forme de la courbe.

(PG1). La courbe passe par le premier et le dernier point de contrôle.

(PG2). La courbe est tangente en P_0 à (P_0P_1) et est tangente en P_n à $(P_{n-1}P_n)$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on constate que (C_1) et (C_2) passent par P_0 et P_2 .

Et pour (C_1) , le coefficient angulaire de la droite (P_1P_2) est le même que celui de la tangente en P_2 :

$$\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

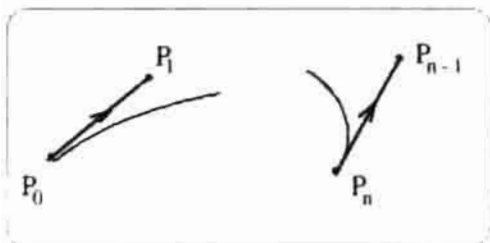
— Ces propriétés sont générales [3] :

On pourra pour les démontrer, montrer que $\frac{d\vec{M}}{dt}(0) = n \overrightarrow{P_0P_1}$ et que

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(1) = n \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

en dérivant

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \overrightarrow{OP_i}$$

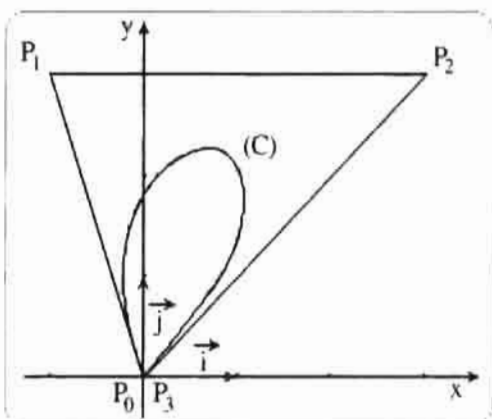

E. Réalisation de forme fermée

Pour réaliser une forme fermée, on peut choisir le premier et le dernier point de contrôle confondus.

Exemple

Avec $P_0(0,0)$, $P_1(-1,3)$, $P_2(3,3)$, $P_3(0,0) = P_0$, on obtient :

$$\begin{cases} x = -2(4t^3 - 5t^2 + t) \\ y = 9(t - t^2) \end{cases}$$


F. Augmentation de l'ordre de multiplicité

Si l'on souhaite réaliser un modèle de courbe plus proche d'un point de contrôle, on peut augmenter le degré d'une unité et prendre deux fois ce point de contrôle.

Exemple

La courbe de Bézier (C_1) définie avec

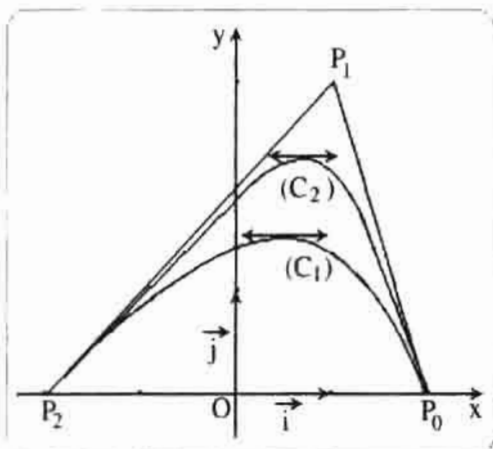
$n = 2$ par les trois points de contrôle $P_0(2,0)$, $P_1(1,3)$, $P_2(-2,0)$, d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2t^2 - 2t + 2 \\ y = -6t^2 + 6t. \end{cases}$$

est remplacée par une deuxième courbe de Bézier (C_2), plus "attirée" par le point de contrôle P_1

En prenant $n=3$ et les quatre points de contrôle P_0, P_1, P_1, P_2 , une équation de (C_2) est :

$$\begin{cases} x = -4t^3 + 3t^2 - 3t + 2 \\ y = 9t(1-t). \end{cases}$$



G.Obtention de formes complexes par jonction de plusieurs courbes de Bézier

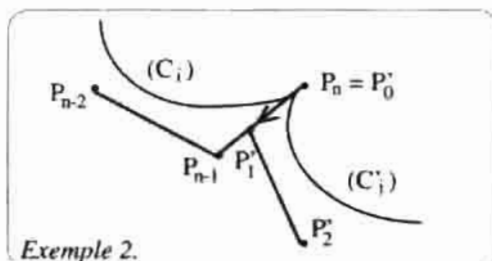
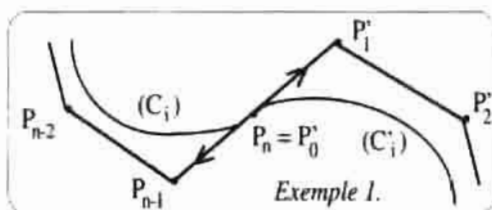
Pour réaliser une forme complexe à base d'une seule courbe de Bézier, il faut augmenter le nombre de points de contrôle. Mais cette augmentation conduit d'une part à une augmentation de la complexité du modèle, puisque le degré augmente du nombre de points de contrôle ajoutés, et d'autre part à un

changement global de la forme puisque toute la courbe est modifiée.

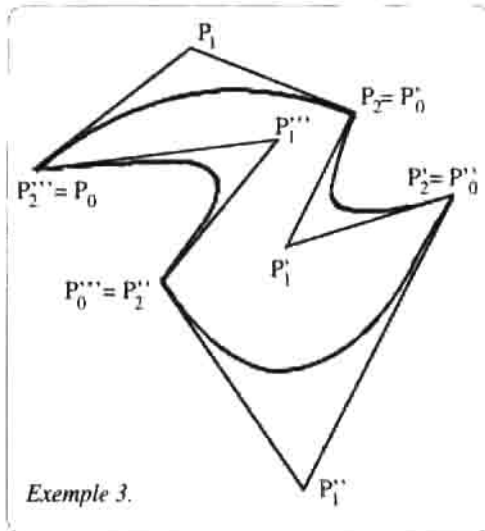
Cette double contrainte peut être contournée en utilisant une succession de courbes de Bézier de degré assez faible (par exemple de degré 3, avec quatre points de contrôle), mais raccordées entre elles, de la manière désirée par le concepteur de la forme.

Par exemple, si l'on souhaite un raccord continu, conservant la tangente, il suffit d'aligner les deux derniers points de contrôle de la courbe de Bézier C_i avec les deux premiers points de contrôle de la courbe de Bézier C_{i+1} . Suivant le sens du choix de ces points de contrôle, on peut réaliser des formes "ne laissant pas apparaître" le raccord, ou réaliser des raccords avec des points analogues aux points de rebroussement sur une courbe en coordonnées paramétriques (analogue seulement, car il s'agit alors de deux courbes en coordonnées paramétriques différentes).

Donnons quelques exemples :



Avec un modèle très simple ($n = 2$, succession d'arcs de paraboles), on peut réaliser très facilement une forme complexe.



Remarque

Il serait difficile de réaliser une telle forme avec une courbe de Bézier avec neuf points de contrôle. En fait on réagit sur le caractère global du modèle, en créant une aptitude à la maîtrise d'une forme localement, en prenant plusieurs courbes de Bézier.

Ceci sera à mettre dans la classe des modèles "locaux" comme celui des courbes B-Splines qui sera étudié ensuite.

4. 12. Autres présentations du modèle de Bézier

En complément de cette première présentation du modèle de courbes de Bézier, nous proposons trois autres présentations.

— Une présentation basée sur des suites, qui permettra l'obtention d'un algorithme de calcul numérique des coordonnées d'un point du modèle, et d'un algorithme de construction géométrique d'un point de la courbe.

— Une présentation basée sur la détermination du modèle basée sur des contraintes faisant intervenir les dérivées successives, apportant des conséquences géométriques sur la forme de la courbe.

— Une présentation basée sur l'écriture matricielle des résultats maintenant en évidence la maîtrise de la forme sur ces modèles, par opposition à la non-maîtrise de la forme sur des modèles utilisant d'autres bases de polynômes.

A. Présentation basée sur des suites

On définit une suite vectorielle, permettant de définir d'une manière récursive ou itérative un point $M(t)$ appartenant à une courbe de Bézier.

Pour t appartenant à $[0,1]$, on considère la suite vectorielle :

$$OM_n^p(t) = (1-t)OM_{n-1}^{p-1}(t) + tOM_n^{p-1}(t)$$

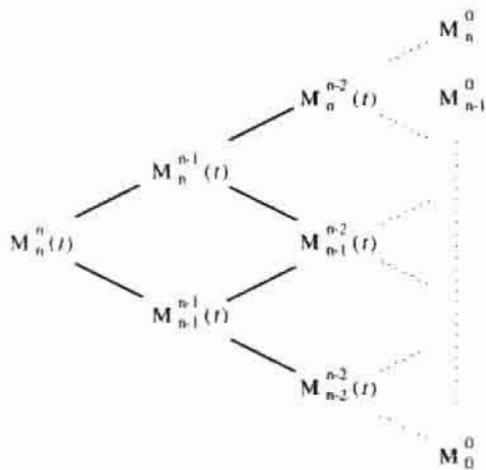
Un point $M_n^0(t)$ est bâti à partir des points $M_{n-1}^{n-1}(t)$ et $M_n^{n-1}(t)$ lesquels sont respectivement bâtis, avec la même suite, à partir des points $M_{n-2}^{n-2}(t)$ et $M_{n-1}^{n-2}(t)$ pour $M_{n-1}^{n-1}(t)$, et à partir des points $M_{n-1}^{n-2}(t)$

et $M_n^{n-2}(t)$ pour $M_n^{n-1}(t)$.

La suite est appliquée jusqu'aux points de base :

$M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$ qui sont indépendants de t .

Cette suite peut être représentée par le graphe suivant :



$$\begin{cases} x_n^p(t) = (1-t)x_{n-1}^{p-1}(t) + t x_n^{p-1}(t) \\ y_n^p(t) = (1-t)y_{n-1}^{p-1}(t) + t y_n^{p-1}(t) \end{cases}$$

Analytiquement, on retrouve cette même suite sur les coordonnées :

De cette définition, on déduit un algorithme permettant de tracer le point $M_n^p(t)$

Entrée du nombre de points de contrôle, $N+1$

Entrée de la position des $N+1$ points de contrôle

Entrée du pas p pour le tracé de la courbe

Faire pour $t=0$ pas p tant que $t \leq 1$

 Faire pour $I=1$ pas 1 jusqu'à N

 Faire pour $J=1$ pas 1 tant que $J \leq I$

$$\overrightarrow{OM}_I^J = (1-t)\overrightarrow{OM}_{I-1}^{J-1} + t\overrightarrow{OM}_I^{J-1}$$

 Fin boucle J

 Fin boucle I

 Tracé de $M(t)$

Fin boucle t .

Remarque 1

Cet algorithme peut être vu d'une manière *itérative* en lisant la graphe de la droite vers la gauche, ou d'une manière *réursive* en lisant ce même graphe de la gauche vers la droite.

Dans le premier cas, on part des points de contrôle et on remonte au point $M(t)$ (Itération) ; dans le deuxième cas, le point $M(t)$ est déterminé par des points inconnus d'indice inférieur, jusqu'à arriver aux points de contrôle connus (Récursivité).

Remarque 2

Cependant, pour le calcul rapide des coordonnées du point M , les algorithmes précédents ne sont pas les meilleurs, dans le sens où la détermination de chaque point par itération (ou par récursivité) prend beaucoup de temps. Il est plus rapide d'avoir les coordonnées, sans autre calcul que celui de $x(t)$ et de $y(t)$, par exemple en utilisant les formules basées sur les points de contrôle et les polynômes de Bernstein, et en simplifiant ces formules.

— Ce modèle, bâti à partir de suites, est identique au modèle de la première présentation : nous allons seulement le vérifier sur le cas particulier correspondant à $n = 3$. On admettra que cette propriété se généralise (démonstration par récurrence).

Soient les points de base $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$.

Nous choisissons, par exemple la définition récursive :

$$(1) \quad \vec{OM}_3^2(t) = (1-t)\vec{OM}_2^2(t) + t\vec{OM}_3^2(t)$$

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{OM}_2^2(t) = (1-t)\vec{OM}_1^1(t) + t\vec{OM}_2^1(t) \\ \vec{OM}_3^2(t) = (1-t)\vec{OM}_2^1(t) + t\vec{OM}_3^1(t) \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \vec{OM}_1^1(t) = (1-t)\vec{OM}_0^0(t) + t\vec{OM}_1^0(t) \\ \vec{OM}_2^1(t) = (1-t)\vec{OM}_1^0(t) + t\vec{OM}_2^0(t) \\ \vec{OM}_3^1(t) = (1-t)\vec{OM}_2^0(t) + t\vec{OM}_3^0(t) \end{cases}$$

En remplaçant dans (1), et en utilisant (2) et (3), on obtient :

$$\vec{OM}_3^2(t) = (1-t)^3\vec{OM}_0^0 + 3t(1-t)^2\vec{OM}_1^0 + 3t^2(1-t)\vec{OM}_2^0 + t^3\vec{OM}_3^0$$

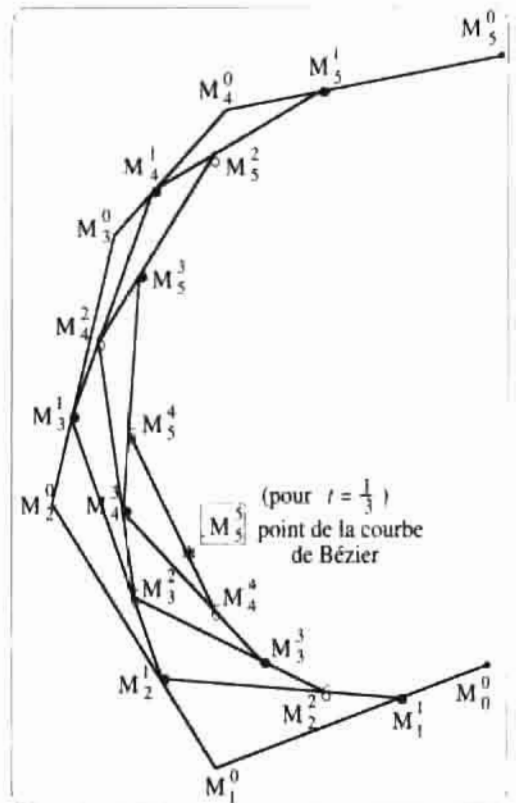
On reconnaît la définition du modèle de Bézier avec les *polynômes de Bernstein* et les *points*

de contrôle $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0$.

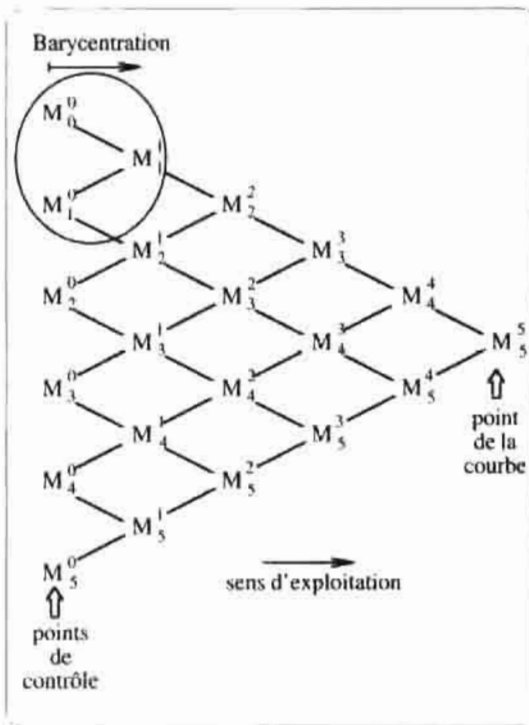
— On peut aussi donner une *interprétation géométrique* à cette suite.

Le point $M_n^p(t)$ est le *barycentre* du point $M_{n-1}^p(t)$ affecté du coefficient $(1-t)$ et du point $M_{n-1}^{p-1}(t)$ affecté du coefficient t .

La construction géométrique se déduit de cette propriété ; elle exploite évidemment l'algorithme itératif, partant de la donnée des points de contrôle, selon le schéma suivant fait, par exemple, pour $t = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.



Le schéma correspond à ce graphe :



Cette "toile d'araignée" polygonale faite pour différentes valeurs de t met en évidence le pilotage effectif de la forme de la courbe par la position des points de contrôle.

B. Présentation basée sur des contraintes

Définition du modèle

Une autre présentation du modèle de courbe de Bézier est basée sur une utilisation des vecteurs (vecteurs de référence), à mettre en parallèle avec une utilisation de points (points de contrôle) et sur une utilisation de

contraintes vectorielles, à mettre en parallèle avec une utilisation des poids polynomiaux (polynômes de Bernstein).

Un ensemble de vecteurs \vec{V}_i où i appartient à $\{0, 1, \dots, n\}$ est donné. Il forme l'ensemble des vecteurs de référence.

On considère une famille de fonctions polynomiales f_i de degré n où la variable t décrit l'intervalle $[0, 1]$.

La position d'un point $M(t)$ est déterminée par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \cdot \vec{V}_i$$

Les fonctions f_i vérifient les contraintes suivantes, quels que soient les vecteurs de référence.

$$(C_0) \quad \vec{OM}(0) = \vec{V}_0; \quad \vec{OM}(1) = \sum_{i=0}^n \vec{V}_i$$

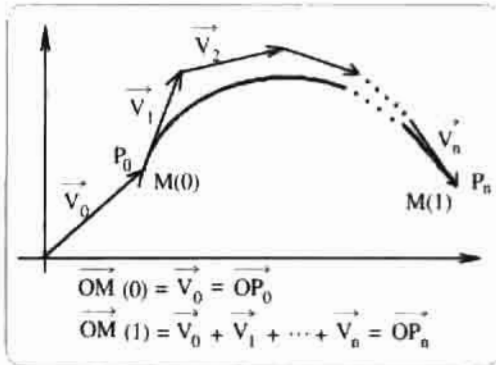
et pour p appartenant à $\{1, 2, \dots, n-1\}$

$$(C_p) \quad \vec{OM}^{(p)}(0) = \sum_{k=1}^p f_k^{(p)}(0) \cdot \vec{V}_k; \\ \vec{OM}^{(p)}(1) = \sum_{k=n-p+1}^n f_k^{(p)}(1) \cdot \vec{V}_k$$

— La contrainte (C_0) va "contraindre" la courbe à passer par les points M_0 et M_n tels que :

$$\vec{OM}_0 = \vec{V}_0 = \vec{OP}_0 \quad \text{et}$$

$$\vec{OM}_n = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \dots + \vec{V}_n = \vec{OP}_n.$$



— Les contraintes (C_p) donnent l'ensemble de contraintes suivantes faisant intervenir les dérivées successives, quels que soient les $n+1$ vecteurs de référence choisis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } p=1 : \\ \vec{OM}'(0) = f_1'(0) \cdot \vec{V}_1 \\ \vec{OM}'(1) = f_n'(1) \cdot \vec{V}_n \\ \\ \text{pour } p=2 : \\ \vec{OM}''(0) = f_1''(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2''(0) \cdot \vec{V}_2 \\ \vec{OM}''(1) = f_{n-1}''(1) \cdot \vec{V}_{n-1} + f_n''(1) \cdot \vec{V}_n \\ \vdots \\ \text{pour } p=n-1 : \\ \vec{OM}^{(n-1)}(0) = f_1^{(n-1)}(0) \cdot \vec{V}_1 + f_2^{(n-1)}(0) \cdot \vec{V}_2 + \dots + f_{n-1}^{(n-1)}(0) \cdot \vec{V}_{n-1} \\ \vec{OM}^{(n-1)}(1) = f_2^{(n-1)}(1) \cdot \vec{V}_2 + f_3^{(n-1)}(1) \cdot \vec{V}_3 + \dots + f_n^{(n-1)}(1) \cdot \vec{V}_n \end{array} \right.$$

— Ces contraintes permettent :

- pour $p=1$, d'imposer une contrainte de tangence au point de départ et au point d'arrivée.

La forme sera ainsi guidée par \vec{V}_1 (portant la tangente pour $t=1$ en M_0), et par \vec{V}_n (portant la tangente pour $t=1$ en M_1).

- pour $p=2$, de diriger la concavité en faisant intervenir :

$$\vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2 \text{ pour } t=0, \quad \vec{V}_{n-1} \text{ et } \vec{V}_n \text{ pour } t=1.$$

Les contraintes sont alors de plus en plus globales, dans le sens, où elles font intervenir de plus en plus de vecteurs. Plus le degré n est grand, plus le nombre de contraintes augmente.

— La détermination des fonctions f_i est longue et demande beaucoup de calculs. Elle présente, par contre, peu de complexité pour des petites valeurs de n ($n=2, n=3$).

Exemple (voir [3])

Dans le cas où $n=3$ (cubiques), on obtient en exprimant les contraintes sur les polynômes f_i de degré 3 :

$$f_0(t)=1; f_1(t)=3t-3t^2+t^3; f_2(t)=3t^2-2t^3; f_3(t)=t^3.$$

Soit :

$$\vec{OM}(t) = \vec{V}_0 + (3t-3t^2+t^3)\vec{V}_1 + (3t^2-2t^3)\vec{V}_2 + t^3\vec{V}_3.$$

Par ailleurs, on montre qu'il s'agit du même modèle ; les extrémités du "pantin vectoriel" et les points intermédiaires de ce pantin sont

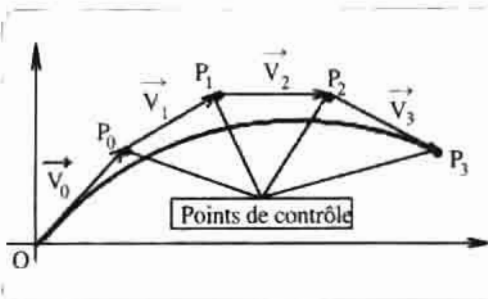
les points de contrôle. En effet, comme

$$\vec{V}_0 = \vec{OP}_0, \quad \vec{V}_1 = \vec{P_0P_1}, \quad \vec{V}_2 = \vec{P_1P_2} \quad \text{et}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{P_2P_3} \quad \text{on a :$$

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= (1 - f_1(t)) \vec{OP}_0 + (f_1(t) - f_2(t)) \vec{OP}_1 \\ &\quad + (f_2(t) - f_3(t)) \vec{OP}_2 + f_3(t) \vec{OP}_3 \\ &= (1-t)^3 \vec{OP}_0 + 3t(1-t)^2 \vec{OP}_1 \\ &\quad + 3t^2(1-t) \vec{OP}_2 + t^3 \vec{OP}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= B_{0,n}(t) \vec{OP}_0 + B_{1,n}(t) \vec{OP}_1 \\ &\quad + B_{2,n}(t) \vec{OP}_2 + B_{3,n}(t) \vec{OP}_3 \end{aligned}$$



C. Présentation matricielle

— L'égalité vectorielle

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot \vec{OP}_i$$

peut être notée matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_i & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0,n}(t) \\ B_{1,n}(t) \\ \vdots \\ B_{i,n}(t) \\ \vdots \\ B_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

— Cependant, au lieu de prendre comme base de polynômes, les polynômes de Bernstein $B_{i,n}(t)$, il est possible de prendre comme base, la *base canonique*, plus simple, formée par les polynômes $B'_{i,n}(t)$:

$$\begin{aligned} t &\mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2, \dots, \\ &\quad t \mapsto t^i, \dots, \quad t \mapsto t^n. \end{aligned}$$

— Les points de contrôle P_i , sont alors remplacés par de nouveaux points, que nous allons appeler points canoniques P'_i .

On définit alors la *même* courbe par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(t) \cdot \vec{OP}'_i$$

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n t^i \cdot \vec{OP}'_i$$

— Cette base de polynômes a été, historiquement, utilisée en premier pour la modélisation des formes par Ferguson.

Comme l'explique très bien Richard Riesenfeld dans sa communication de 1973, il était *très difficile d'arriver à diriger* la forme de la cour-

be à partir de la position des points canoniques. En effet, il n'y a pas de lien visible entre la position des points canoniques et la forme de la courbe. Seuls des utilisateurs expérimentés arrivaient, mais avec beaucoup de mal, à posséder un certain savoir-faire permettant de piloter la forme. Dans le modèle de Bézier, au contraire le lien est très fort. On *contrôle très bien* la forme de la courbe à partir des points de contrôle.

Illustrons cette affirmation sur un exemple ($n = 3$).

Exemple

$$\begin{cases} x = x_0 (1-t)^3 + x_1 3t (1-t)^2 + x_2 3t^2 (1-t) + x_3 t^3 \\ y = y_0 (1-t)^3 + y_1 3t (1-t)^2 + y_2 3t^2 (1-t) + y_3 t^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X_0 \cdot 1 + X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3 \\ y = Y_0 \cdot 1 + Y_1 t + Y_2 t^2 + Y_3 t^3 \end{cases}$$

Comme les coordonnées sont uniques dans la base $\{1, t, t^2, t^3\}$:

$$\begin{cases} x = x_0 1 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 3x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 \\ y = y_0 1 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 3y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \end{cases}$$

On obtient les formules de passage donnant les points canoniques à partir des points de contrôle :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_1 = -3x_0 + 3x_1 \\ X_2 = 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 \\ X_3 = -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{et de même pour } Y_0, Y_1, Y_2, Y_3.$$

Le passage s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{soit } (X) = (P)(x) \text{ et de même } (Y) = (P)(y).$$

Soit, par exemple, la courbe de Bézier définie par les points de contrôle :

$$P_0(1,1), P_1(1,5), P_2(3,5), P_3(4,3).$$

On a :

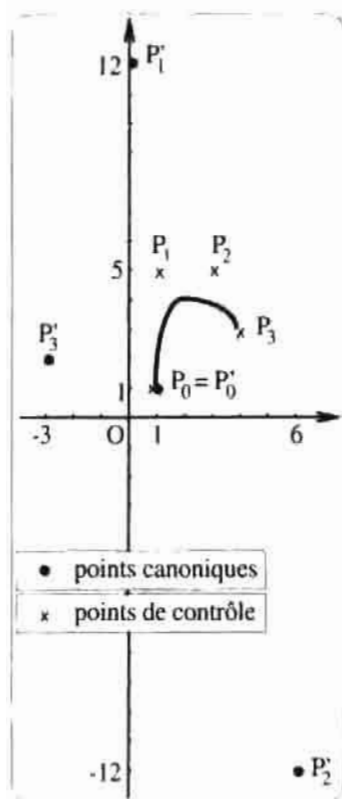
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

De même on obtient :

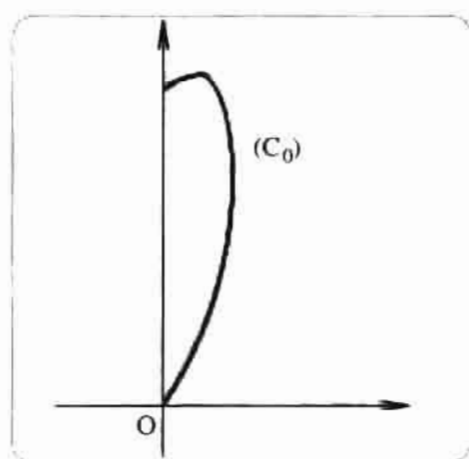
$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit :

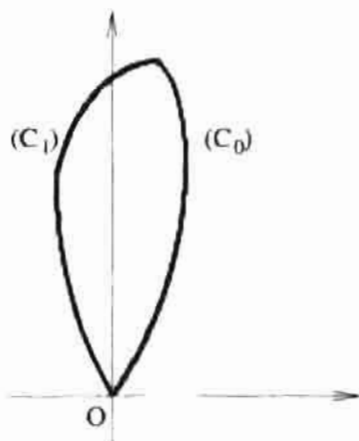
$$\begin{cases} P^*_0(1, 1) \\ P^*_1(0, 12) \\ P^*_2(6, -12) \\ P^*_3(-3, 2) \end{cases}$$



Les nouveaux points n'ont pas de lien avec la forme de la courbe.



Une deuxième étape amène, par un bon choix des points de contrôle, à compléter avec (C_1) pour fabriquer un pétale.



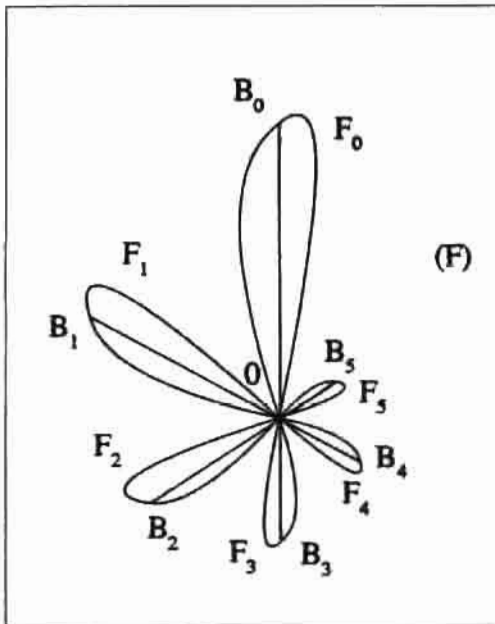
4. 13. Deux exemples d'utilisation

Dans le cadre de l'enseignement de ces modèles à des techniciens supérieurs, extrayons deux exemples représentatifs.

Exemple 1 : Sujet d'examen (1990 BTS II).

Dans le sujet d'examen du BTS Informatique Industrielle, on fabrique une "fleur". Dans une première étape, on construit la courbe de Bézier (C_0) .

Une troisième étape, utilisant des transformations géométriques du plan (similitudes) permet de réaliser "la fleur"...



Exemple 2 : Travaux pratiques.

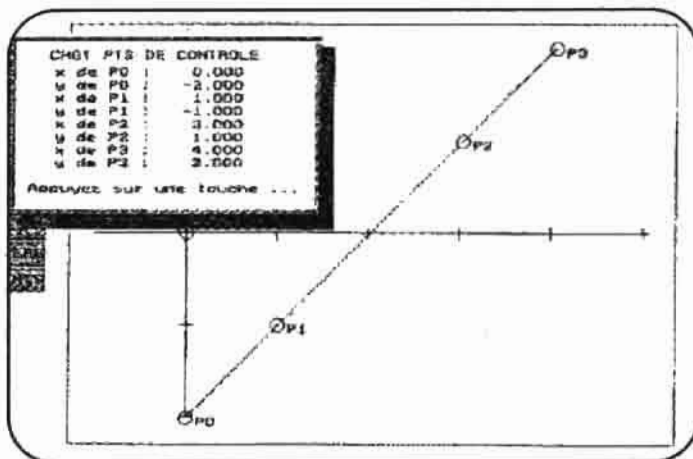
— On demande de réaliser un logiciel permettant de concevoir des formes planes à partir de cubiques de Bézier.

— En réponse, un étudiant a, par exemple, proposé un logiciel, en Pascal, permettant le tracé automatique de la courbe de Bézier, après cliquage via la souris, de la position des points de contrôle choisis. Ce logiciel permet le tracé de plusieurs arcs jointifs de Bézier, pour réaliser une courbe plane fermée.

Exemple d'utilisation 1

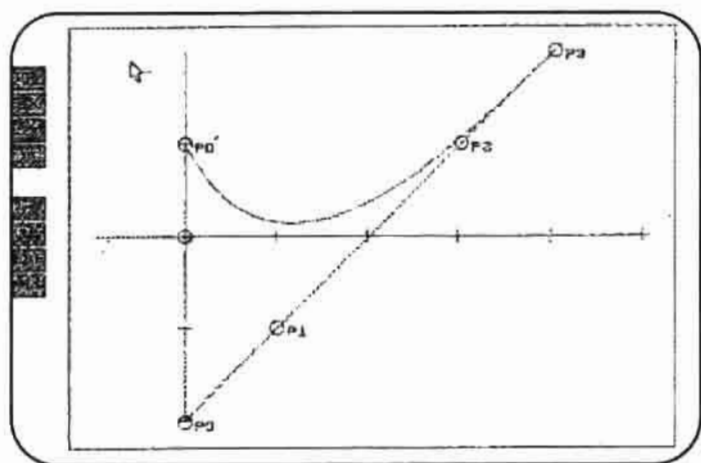
1. La courbe de Bézier passe par les 4 points de contrôle alignés.

Écran 1



2. On déplace un point de contrôle : P_0 vient en P_0' , en conservant les autres ; on obtient alors la courbe de Bézier associée.

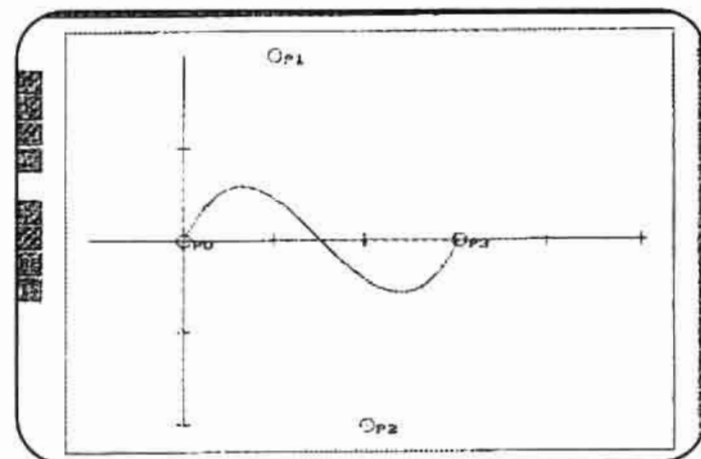
Écran 2

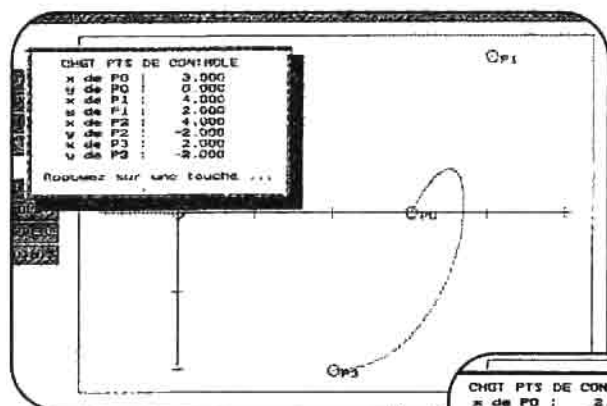


Exemple d'utilisation II :

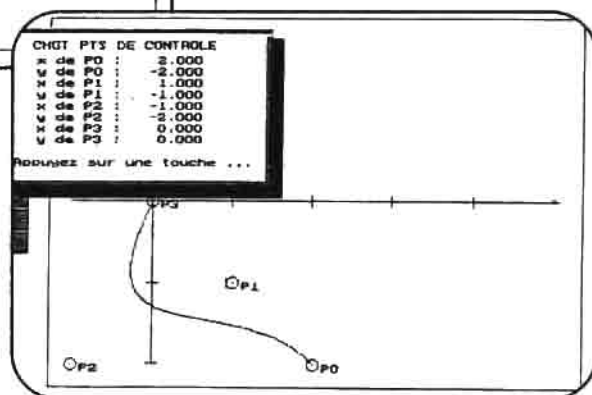
On réalise un premier arc (écran 3), puis un deuxième arc (écran 4), puis un troisième arc (écran 5) pour réaliser une courbe fermée (écran 6).

Écran 3





Écran 4



Écran 5

Écran 6

