CALCULATRICES GRAPHIQUES : LA GRANDE ILLUSION

Luc TROUCHE
Irem de Montpellier

A entendre professeurs et élèves parler des calculatrices graphiques, un Martien pourrait à bon droit imaginer qu'il ne s'agit pas pour les uns et les autres du même objet : pour les élèves, une calculatrice graphique (dé)montre les propriétés des fonctions. Pour les professeurs une calculatrice graphique est un gadget qui n'a aucune légitimité mathématique. Les uns et les autres s'accordent cependant sur un fait : la maîtrise de cet outil ne nécessite aucun apprentissage particulier.

On défendra ci-dessous la thèse inverse : la manipulation dune calculatrice graphique n'a rien de naturel, son utilisation non maîtrisée peut peser lourdement sur la construction des connaissances mathématiques.

Et on présentera quelques pistes pour une prise en compte raisonnée de cet outil dans l'enseignement..

1. Calculatrices graphiques : statut pour l'élève, statut pour le maître

Dire que ces statuts sont opposés n'a rien de caricatural. Certes, la rapidité de la généralisation des calculatrices graphiques dans l'enseignement secondaire (et probablement bientôt des calculateurs formels) fait que leur statut évolue sans cesse. Sans vouloir donc émettre des jugements valables en tous lieux et en tous temps, on peut cependant faire quelques remarques, issues d'enquêtes réalisées dans le cadre d'un mémoire de DEA [1].

Une première enquête a été menée auprès de 32 professeurs de 1èreS. Elle a permis de constater d'abord que deux élèves sur trois possédaient une calculatrice graphique (en Mars 92. Cette proportion serait sans doute plus importante aujourd'hui). Cependant les réponses des professeurs interrogés témoignent d'une relative indifférence à cet objet.

Si la majorité des professeurs donne des conseils pour l'achat d'une calculatrice, pour l'apprentissage de la manipulation de celle-ci, cet apprentissage ne concerne que l'aspect programmation. Une minorité des professeurs interrogés évoque avec les élèves l'aspect graphique de leur machine.

On peut penser que cette relative indifférence découle du fait que les programmes (en vigueur en 1992) ne rendent pas obligatoire l'utilisation d'une calculatrice graphique. En fait les entretiens réalisés à l'occasion de cette enquête indiquent plutôt que pour les professeurs interrogés l'outil graphique

(1) Trouche L. 1992, *Calculatrices graphiques, Statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA, Didactique des disciplines Scientifiques, Université Montpellier II

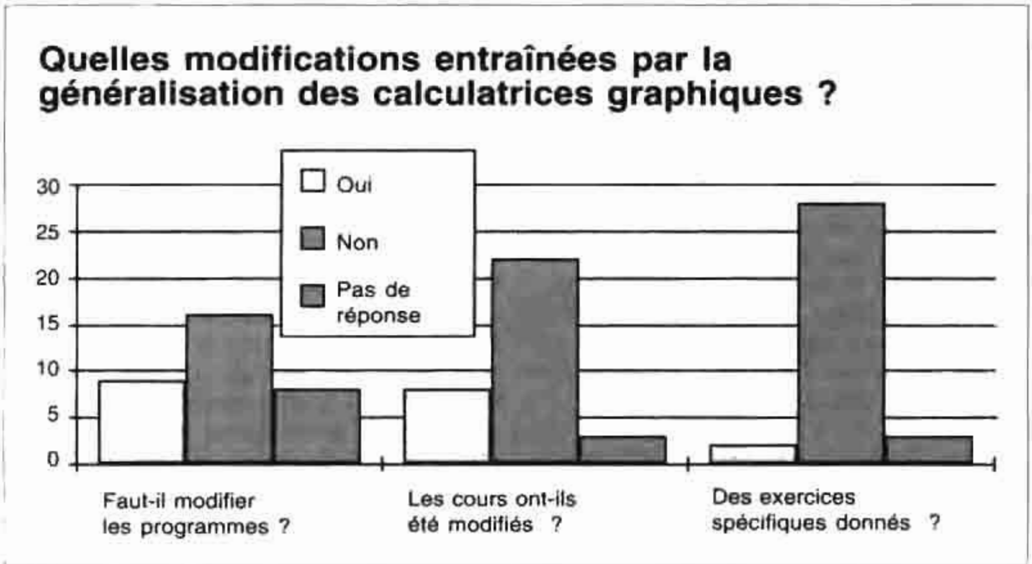
n'exige aucun apprentissage spécifique : on n'*interprète* pas un écran graphique, on *lit* des résultats sur un écran (2). Et sa généralisation n'a que peu de conséquences pour l'enseignement : seuls neuf professeurs interrogés pensent que les programmes devraient être modifiés, seuls huit d'entre eux ont modifié leur enseignement des fonctions, seuls deux d'entre eux ont donné des exercices spécifiques utilisant les calculatrices graphiques (voir graphique 1 ci-dessous).

Une deuxième enquête a été réalisée auprès de l'ensemble des élèves de trois classes de 1èreS possédant une calculatrice graphique (soient 62 élèves). Pour les élèves, comme pour les professeurs, l'outil graphique est tout à fait transparent. La quasi-totalité des élèves interrogés estime bien le maîtriser. Pour le reste, la photographie qui en ressort est celle, inversée, de l'enquête professeurs :

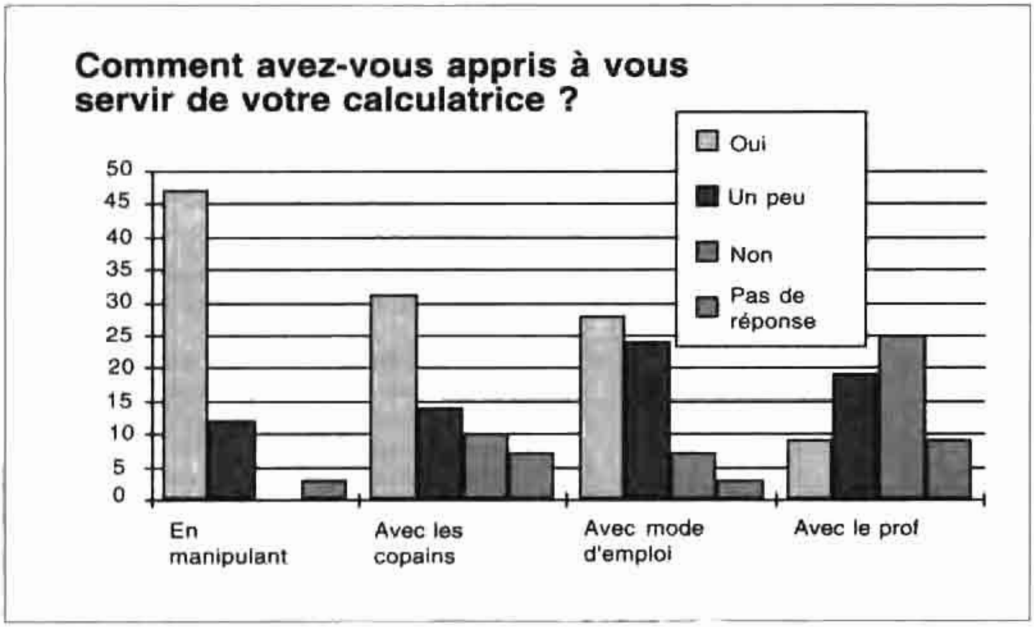
— pour les élèves, la calculatrice est un outil aussi important que le cahier de cours, ou le livre de mathématique. Mieux, entre l'aspect graphique et l'aspect programmation, 50% des élèves jugent que le plus utile est le premier (contre 16% au second)

— conséquence naturelle de cet écart de point de vue entre élèves et professeurs, l'apprentissage de la manipulation de la machine passe largement en dehors du cadre du cours (*cf.* graphique 2 page suivante).

— en cas de désaccord entre l'écran de la machine et les calculs, les élèves remettent en question leurs calculs. On verra plus loin que cette situation traduit une difficulté



(2) On dira désormais que ceux qui ont une telle conception de l'objet le considèrent comme transparent, c'est-à-dire qu'ils pensent que le lien entre l'image de l'écran et la réalité mathématique qu'elle est censée exprimer est direct.



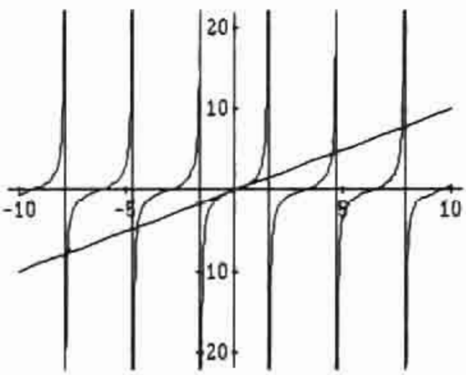
réelle pour les élèves à combiner les fonctions de référence, les calculs papier-crayon, et les résultats machine. Ce sont les résultats machine qui prévalent, et qui vont avoir des conséquences sur les concepts mêmes en cause.

On l'aura compris, notre thèse est que l'outil graphique, loin d'être transparent, pèse lourdement dans les apprentissages élèves. Nous allons l'illustrer à partir de quelques expériences, puis émettre des hypothèses à propos de l'étude des limites.

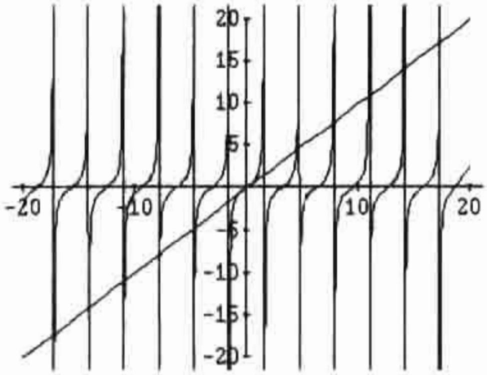
2. Observation de quelques travaux d'élèves

Le mémoire déjà cité relate les travaux d'une classe de 1èreS à qui il a été proposé des exercices utilisant l'outil graphique. Les élèves étaient regroupés par 2, et pouvaient utiliser aussi bien leur cahier de cours que leur livre et leur calculatrice. Le travail, libre, n'était pas noté.

— Résolution de l'équation x = tan x. Combien de solutions dans R ?



Les élèves avaient vu 10 jours plus tôt la fonction tangente en cours. Seuls 4 élèves (sur 32) vont évoquer une infinité de solutions à cette équation, en évoquant les résultats du cours. Les autres, le nez collé sur l'écran de leur machine, vont tous repérer un nombre fini de solutions. En effet, la définition même de l'écran entraîne des contraintes graphiques qui vont limiter le tracé des courbes en question :



A partir d'un certain moment la droite d'équation y = x "ne coupe plus" la représentation graphique de la fonction tangente...

Mais aussi plus étonnant, 7 élèves vont considérer que les intersections entre la droite et les asymptotes de la fonction tangente sont autant de solutions à prendre en compte, avec l'argumentation simple : les asymptotes font partie de la courbe, puisqu'elles sont apparues quand on a demandé à la machine de tracer précisément cette courbe. Enfin 5 élèves vont exploiter la proximité de la courbe et de la droite au voisinage de 0 (évidemment !) pour affirmer qu'il y a là une infinité de solutions...

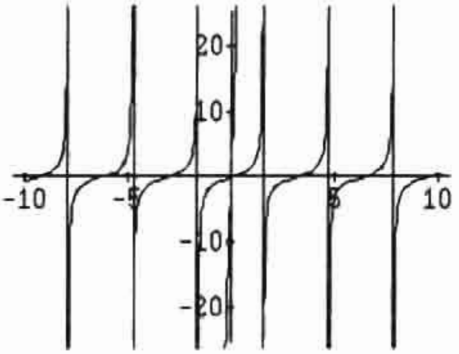
On le voit bien, la non-connaissance du fonctionnement graphique de la calculatrice entraîne des erreurs graves d'interprétation, qui peuvent ensuite entraîner une déformation grave des notions en présence (la fonction tangente, bien sûr, mais aussi la compréhension de ce qu'est la "meilleure approximation affine", ou de ce qu'est une asymptote).

— Résolution de l'équation 100x = tanx. Combien de solutions sur R ?

Cette étude venait une semaine après la précédente. 26 élèves étaient présents. Ce qui est tout à fait remarquable, c'est que ce travail constitue une activité nouvelle pour les élèves, sans lien avec l'activité précédente. Comme pour l'activité précédente, la grande majorité des élèves veut traiter le problème par manipulation directe de la calculatrice, sans faire appel aux résulats du cours. Ce qui va poser un problème, puisque la représentation graphique de la fonction linéaire en cause, sur une fenêtre d'affichage "standard", est collée à l'axe des abscisses...

Seuls deux élèves, en mobilisant les fonctions de référence (linéaire et tangente), imaginent une infinité de solutions. Neuf élèves vont trouver une seule solution (0), et pour celà ont du faire un choix : soit voir la fonction tangente, et imaginer la fonction linéaire, soit le contraire. Dans un cas une représentation est applatie sur l'axe des ordonnée, dans l'autre cas, l'autre est applatie sur l'axe des abscisses. L'origine est, dans ces conditions, **la** solution la plus "visible"... (voir page suivante).

Le reste de la classe n'a vu aucune solution ("graphique difficile à analyser : la courbe se confond avec la droite y'y", "problèmes d'échelles : on ne voit jamais la courbe", ...). Peut-on dire après cela que la fonction tangente et la fonction linéaire sont des fonctions de référence pour les élèves ?



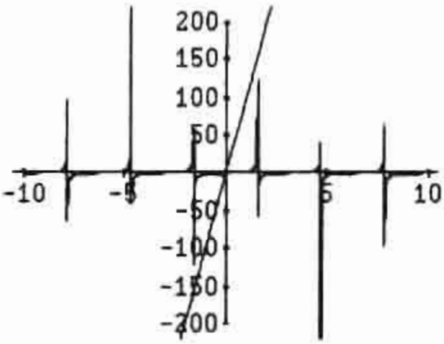
Mieux, peut-on dire que pour les élèves l'outil calculatrice graphique est maîtrisé ?

— Représentation graphique de

$$f : x \to \sqrt{-x^2 + 101x - 2550}$$

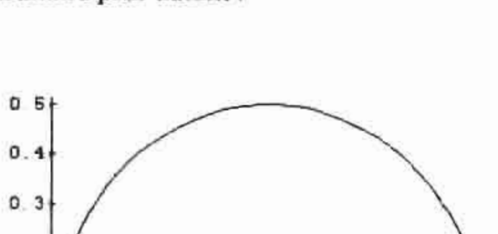
Les élèves pourraient tout à fait obtenir une représentation correcte de cette fonction, soit par élévation au carré, et on obtient un demi-cercle en repère orthonormé, soit en déduisant la représentation de f de celle de la fonction trinôme. Un seul élève va choisir la deuxième méthode, et obtenir assez rapidement la tableau de variation de f, et une représentation graphique convenable, après un coup d'œil sur l'écran de la calculatrice.

La plupart des élèves va chercher par tâtonnements successifs, à obtenir directement une représentation graphique sur l'écran. Quasiment impossible, évidemment, cette fonction était choisie pour cela : les élèves opèrent des reculs successifs, mais, quand ils arrivent dans la zone intéressante, ils sont trop loin, et ne peuvent apercevoir le "petit" demi-cercle (ou plutôt demi-ellipse). Les remarques des élèves sont à relever : *"La fonction n'existe*



pas : je prends un Range démentiel, et je ne vois rien"...

Les élèves vont alors se résoudre à déterminer le domaine d'existence de la fonction. 9 élèves sur les 15 présents à cette séance de TP, vont trouver le bon domaine [50;51]. Mais ils ne sont pas encore tirés d'affaire pour autant :



En effet, suivant la fenêtre d'affichage choisie, les élèves vont obtenir deux types de configuration :

— Certains élèves choisissent $49 \le x \le 52$ (ils le justifient en disant : *je veux être sûr de ne rien rater, comme ça je pourrais vérifier qu'il n'y a rien entre 49 et 50, et 51 et 52.* Hélas, la courbe ne va pas "arriver" à l'axe des abscisses (*cf.* ci-dessus). En effet, sur les TI81, la machine place 95 points, et donc va déterminer les images de $49+\frac{3i}{95}$, pour $0 \le i \le 95$. On ne disposera donc pas des images de 50 et 51.

— par contre, pour les élèves ayant choisi la fenêtre $51 \le x \le 52$, on aura le "raccord" entre la courbe et l'axe.

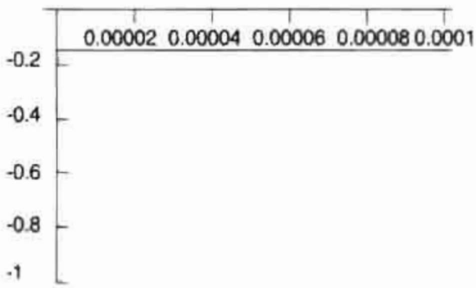
Ce qui est tout à fait remarquable, c'est que les élèves dans le premier cas de figure, alors qu'ils ont correctement obtenu le domaine de définition [50;51], vont être amenés, ne connaissant pas le fonctionnement "intime" de la machine, à produire des justifications du type : "*En fait, la fonction n'existe pas en 50 et 51. Par contre la limite de f en 50 et 51, c'est 0*" On voit bien que, en cas de doute, les élèves ne reviennent pas au calcul, mais imaginent des justifications pour conforter l'image de leur écran. On voit bien aussi les problèmes que ce type de justification peuvent entraîner pour la construction des concepts de limite, ou de continuité...

— Etude de la limite en zéro de

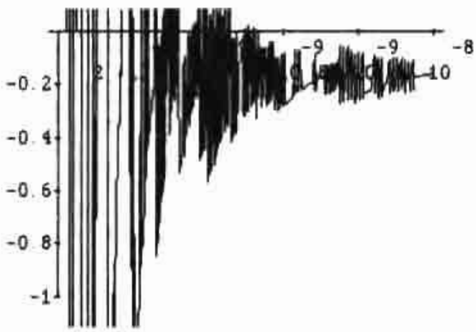
$$f : x \to \frac{\sin x - x}{x^3}$$

Les élèves sont invités à émettre des conjectures sur l'existence de cette limite, on observant ce qui se passe sur leurs machines. Ils sont invités à garder une fenêtre de [-1,0] pour les y , et une fenêtre de [0,a] pour les x, en faisant "tendre" a vers 0. Ils vont successivement observer pour les fenêtres

$[0,10^{-4}]$



$[0,10^{-8}]$



Et enfin pour x dans $[0,10^{-12}]$, la courbe semblera confondue avec l'axe des abscisses. Il est clair (!) que la machine donne un résultat convenable ($-\frac{1}{6}$) quand on ne s'approche pas trop de zéro, mais que, ensuite ses capacités de calcul sont insuffisantes pour gérer des différences de l'ordre de 10^{-24} (3).

(3) Les graphiques de ce document sont réalisés sur Mac LCII, avec le logiciel Mathematica. Il est clair que les mêmes contraintes agissent sur toutes les calculatrices graphiques.

Les élèves, qui en général ne connaissent pas les performances de la machine, en sont conduits à faire les observations suivantes :

"Au début, la limite paraît être de l'ordre de -0,2, puis il y a une incertitude, puis la limite se stabilise à 0".

Dans une deuxième séance, le professeur reprend ce problème, et, à l'aide d'une stratégie d'encadrement, prouve aux élèves que la limite cherchée est -1/6. La question est alors posée aux élèves : ces résultats sont-ils compatibles avec les observations faites sur la calculatrice ?

On peut ranger les réactions des élèves dans quatre catégories :

— il y a les élèves perplexes, que toute contradiction entre les résultats "machine", et les résultats théoriques paralysent.

— il y a les élèves "exclusifs", qui remplacent purement et simplement le résultat "douteux" par le résultat "certain". Le résultat douteux étant évidemment le résultat le moins légitime... Si c'est la parole du professeur contre la machine, c'est la professeur qui a raison. Mais si c'est l'élève contre la machine...

— il y a les élèves "conciliateurs", qui s'arrangent pour tout rendre compatibles : ils vont expliquer que la machine avait donnée 0 comme limite, mais que 0 n'est pas loin de -1/6...

— il y a enfin les élèves "critiques" qui vont reprendre les résultats machine successifs, et constater que la machine donnait bien un résultat convenable... quand on restait dans des zones de calcul acceptables pour elle... On verra plus loin quelques pistes pour développer ces attitudes critiques, c'est à dire pour combiner le recours aux fonctions de référence, au calcul analytique, et à la calculatrice.

Mais quelles que soient les attitudes des élèves, il est clair que la manipulation de la calculatrice graphique ne sera pas sans conséquence sur les apprentissages en cause.

3. Calculatrices graphiques, et obstacles relatifs à l'acquisition de la notion de limites.

F. Monnet et Y. Paquelier [4] évoquent certaines différences entre les images scientifiques et les images mathématiques. Même si les choses ne sont pas toujours aussi nettes, de nombreuses images en biologie ou en physique ont un rôle d'*abstraction* (un schéma électrique fait passer du circuit électrique de la table de TP au circuit "universel"). En mathématiques, et particulièrement en ce qui concerne l'étude des fonctions, l'image a, partiellement, un rôle de concrétisation : le graphique *donne à voir* la fonction. Il va y avoir alors des effets induits :

— autonomisation de l'image ("n'étant rattachée à aucune réalité matérielle dont elle serait la représentation, l'image mathématique devient *la* réalité mathématique").

— attribution en retour des propriétés du graphique apparent à la fonction (contagion du signifiant sur le signifié [5]).

(4) *Aster* n° 14, 1992

(5) Voir thèse d'Alain Lerouge sur la rationalité mathématique, 1992, Montpellier II

On peut observer ces phénomènes à l'œuvre quant à l'étude des limites. Un certain nombre de travaux ont mis en évidence les obstacles relatifs à cette notion (6). On peut faire l'hypothèse que les calculatrices graphiques, si elles ne sont pas intégrées dans l'enseignement par le professeur, ne sont pas de nature à aider au franchissement de ces obstacles.

Premier obstacle repéré par Sierpinska, l'"horror infiniti".

Elle classe sous cette rubrique le refus de donner au passage à la limite le statut d'une opération mathématique : pour les élèves *le passage à la limite est la recherche de ce dont nous ne connaissons que des approximations.*

Avec les calculatrices graphiques, l'infini est *limité* par 10^{-99} et 10^{99}. Et l'écran n'affiche qu'une dizaine de chiffres, et qu'un nombre fini de points pour la représentation graphique des fonctions. L'hypothèse que l'on peut faire est que la manipulation de la machine renforcera cette tendance naturelle des élèves à considérer le passage à la limite comme un arrondi, ou une approximation :

— l'observation des termes successifs d'une suite convergente apparaissant à l'écran accrédite l'idée qu'*une suite convergente est une suite qui stationne à partir d'un certain rang*

Elle classe aussi dans cette rubrique l'obstacle qui consiste à associer le passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement. Avec les calculatrices graphiques, on peut penser que la possibilité de déplacement d'un point clignotant sur la courbe pour se "rapprocher" du point d'étude va renforcer ce modèle dynamique : une phrase parmi d'autres à propos de la limite en 4 de $x \rightarrow \frac{2x+3}{x-4}$: *ça se rapproche de 4, et ça saute 4...*- autre phrase significative de ce point de vue : *la limite de exp(10/lnx) est **proche** de 1 quand x tend vers 0.* Et ceci bien entendu aura des conséquences très importantes sur la définition même de limite. Une enquête menée en 1993 dans une classe de 1èreS montre que tous les élèves qui utilisent un vocabulaire dynamique pour donner une définition de limite (*f(x) se rapproche de l...*) ont en fait une conception de monotonie : ils imaginent tous par exemple qu'une fonction positive qui tend vers 0 en l'infini est forcément décroissante à partir d'un certain rang.

Deuxième obstacle repéré par [S], l'obstacle lié au concept de fonction

Elle revient sur les problèmes d'apparition de ce concept. Ainsi, pour Cauchy, "lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". Parler de valeurs consécutives ne signifie-t-il pas que cette définition ne concerne que les suites ? Ou plus profondément cette définition ne signifie-t-elle pas que Cauchy n'était pas encore tout à fait libéré des ambiguïtés d'un Leibniz parlant de "points voisins" ? [S] estime que la conception du continu des élèves témoigne des mêmes ambiguïtés.

(6) Sierpinska. 1985. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, RDM, 6.1. Robert A. 1982. L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris VII

L'hypothèse que je fais est que la manipulation des fonctions graphiques de la calculatrice (en particulier l'option "trace" — le point se déplace de saut en saut sur la courbe —) renforcera cette conception "discrète". L'enquête précédemment évoquée est tout à fait claire de ce point de vue. A la question : *"Que veut dire : aussi près que l'on veut de x_0 ?"* les élèves répondent : *"Aussi près que possible"*. Il s'agit bien là d'une discrétisation du continu, appuyée fortement sur l'utilisation de la machine.

Troisième obstacle repéré par [S], la conception géométrique de la notion de limite

Tels Archimède définissant le cercle comme limite des polygones inscrits ou circonscrits, les élèves retiennent : *la tangente est la limite des sécantes* au lieu de *la pente de la tangente est la limite des pentes des sécantes.* Or la notion de limites se rapporte à des fonctions dont les valeurs sont des points, et non des sous-ensembles d'un espace topologique. Cette conception va donc constituer un obstacle quand il s'agira de donner une définition précise de la limite. On peut penser que l'utilisation systématique des écrans graphiques va renforcer cette conception, sous couvert d'observation, voire d'expérimentation : *la courbe tend vers l'asymptote, la courbe tend vers l'infini...*

Quatrième obstacle repéré par [S], l'obstacle logique

Cauchy lui même ne marquait pas distinctement la dépendance entre le voisinage du point auquel on calcule la limite, et le voisinage du point qui est la limite, note [S]. En l'absence de formalisation précise de la notion de limite, la langue naturelle aura du mal à traduire cette dépendance. D'autant que la dépendance "naturelle" s'exerce de "l'axe des x" vers "l'axe des y". Ce sens est renforcé par la manipulation de la fenêtre d'affichage de la calculatrice graphique : pour vérifier que la limite de f en x_0 est bien l, l'élève définit d'abord l'intervalle autour de x_0, puis recherche un intervalle autour de l pour "voir la courbe". C'est à dire l'exact inverse de la démarche souhaitée...

Il est ainsi clair que l'utilisation des calculatrices graphiques n'est pas neutre, qu'elle a une influence importante sur l'acquisition des concepts essentiels de l'analyse.

4. Quelques perspectives

L'idée de base est simple : on ne peut pas ne pas prendre en compte les nouveaux outils dans l'enseignement de l'analyse.

Il y a déjà des conditions d'ordre institutionnel

Ne pas tenir compte des calculatrices graphiques pour ne pas défavoriser les élèves qui n'en ont pas est largement illusoire. Cela revient à fermer les yeux devant une situation de fait. Prendre en compte cet outil supposerait :

— comme pour les manuels scolaires, choisir un modèle par établissement, pour un certain nombre d'années, de telle façon que l'apprentissage collectif en soit facilité.

— inscrire son apprentissage dans les programmes des sections scientifiques de lycée, au même titre que les calculatrices programmables. On ne peut pas se contenter de prescrire l'utilisation des écrans graphiques dans les salles informatiques des lycées. Ce sont, pour l'instant, les calculatrices graphiques que les élèves ont en permanence avec eux, ce sont ces objets qu'il faut prendre en compte dans l'enseignement. Cela nécessite, en particulier pour les enseignants, un gros effort de formation, pour lequel les Irem ont une lourde responsabilité...(7)

Il y a des conditions d'ordre pédagogique

Il est indispensable de prendre en compte les performances de la machine, et ceci de deux poins de vue:

— du point de vue des calculs : domaine de validité, précision des calculs (de telle façon que les élèves comprennent les errements éventuels)

— du point de vue graphique propre : les manuels d'utilisation sont singulièrement discrets sur ce point . Comment une courbe est-elle tracée ? Quelle est l'aire d'un point affiché ? Combien la calculatrice en trace-t-elle ? Relie-t-elle toujours deux points consécutifs, et de quelle façon ? Répondre à ces questions de façon claire est indispensable pour que les élèves puissent comprendre le surgissement inopiné d'asymptotes non sollicitées (*cf.* en particulier dans l'activité 1 la résolution de l'équation x = tanx). Le caractère réducteur du graphique-machine a ceci de commode qu'il présente des permanences que ne présentent pas les graphiques-papier des élèves. Mais ces permanences n'ont rien de naturel, de "transparent". Faire toute la clarté sur ce point est indispensable à la compréhension des graphiques affichés.

Il y a enfin des conditions plus générales d'ordre didactique

Il s'agit d'abord de repenser le statut général du graphique dans l'enseignement des mathématiques

"Il faudrait qu'un autre traitement des rapports entre graphique et algébrique soit perçu par les élèves comme l'outil adapté et légitime pour résoudre une classe importante de problèmes [...]. Mais ceci nécessite un changement de statut du graphique dans l'enseignement: il ne peut rester un cadre mineur servant uniquement à la représentation, il doit prendre le statut de véritable cadre de travail mathématique" (8)

Les calculatrices graphiques sont sans doute un des éléments utiles pour parvenir à ce changement de statut.

A condition de mettre en œuvre des activités pour lesquelles la combinaison des méthodes graphiques et des méthodes analytiques est nécessaire.

On peut ainsi faire un parallèle avec la

(7) Alex Muchielli, dans *L'enseignement par ordinateur*, (Que sais-je ? n° 2360), estime que la typologie des attitudes des enseignants face à l'introduction, dans leur établissement, des ordinateurs, peut se résumer ainsi : un tiers d'"appréciateurs", un tiers de "fugitifs", un tiers de "réfractaires". Peut-on estimer que pour les calculatrices graphiques, les deux dernières catégories sont plus importantes, dans la mesure où la situation échappe encore plus à l'enseignant : c'est lui qui décidait d'utiliser, ou non, l'ordinateur dans le lycée. Mais c'est l'élève qui a la "maîtrise" de sa calculatrice...

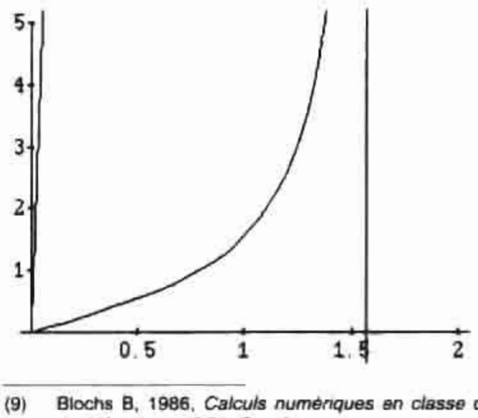
(8) Artigue M., *Audimath* n°2. Le mot cadre est ici à prendre dans son sens courant...

calculette de l'école primaire : une véritable formation mathématique doit permettre à l'enfant de combiner le calcul mental, le calcul papier-crayon, et le calcul machine (9). De la même façon, au lycée, il s'agit de permettre aux élèves de combiner la manipulation de leur machine graphique, le recours aux fonctions de référence, et le calcul analytique. Cela fait que de nombreux problèmes sont caduques, et que de nouveaux problèmes doivent apparaître. Quelques exemples :

Exemple 1. Combien l'équation $100x = \tan x$ a-t-elle de solutions ?

Quelle est la valeur approchée à 10^{-10} près par défaut de la plus petite racine strictement positive de cette équation ?

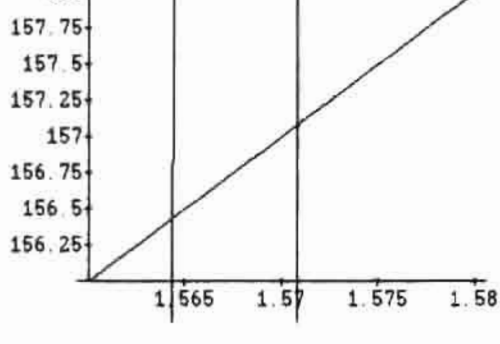
En fait, dans un recueil d'exercices, on pourrait poser le problème sous la forme : combien l'équation $ax = \tan x$ a-t-elle de solutions ? Ce serait à l'enseignant de faire une analyse a priori de sa classe, de ses objectifs..., et de choisir la valeur de a adéquate. Il est clair que suivant la valeur choisie, les travaux des élèves ne seront pas les mêmes.



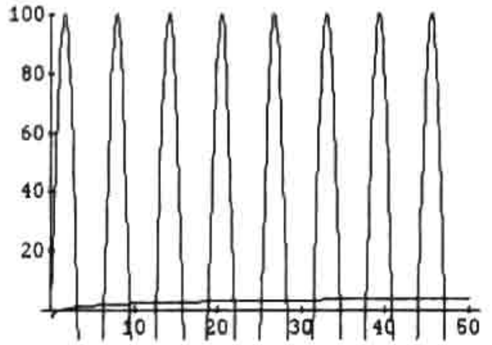
(9) Blochs B, 1986, *Calculs numériques en classe de 4e*, Mémoire de DEA, Strasbourg

On a déjà évoqué les problèmes rencontrés par les élèves pour la détermination du *nombre* de solutions de cette équation. Que dire de la recherche par les élèves de la solution cherchée ?

Il est clair que si les élèves en restent à la fenêtre d'affichage ci-dessus ils ne verront pas grand chose (même s'ils se déplacent avec l'option "trace" sur la courbe : le déplacement sera de courte durée...). En effet, choisir une bonne fenêtre d'affichage suppose avoir mobilisé dans sa tête les fonctions de référence en cause, avoir localisé la racine cherchée au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, avoir choisi en conséquence une fenêtre de [1,56 ; 1,58] pour x, et de [156, 158] pour y (puisque y = 100x au point cherché), avoir identifié la courbe de la fonction tangente et l'asymptote d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ sur l'écran (alors qu'il n'est pas très fréquent de voir une courbe "parallèle" à son asymptote...), et avoir utilisé l'option zoom de façon convenable pour obtenir la précision demandée. On le voit, ce travail est un terrain privilégié pour le "changement de cadre"...



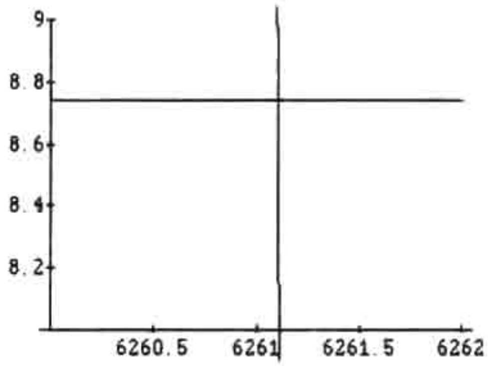
Exemple 2. Quel est le nombre de solutions de l'équation lnx = 100 sinx ? Donner une valeur approchée à 10^{-8} près par défaut de la 1993° racine ?



Le problème est inverse du précédent. La tendance naturelle, induite par les différentes fenêtres choisies par les élèves, est de considérer qu'il y a une infinité de solutions... Sauf si on sait que la limite de la fonction ln est infinie, et que donc, à partir de exp(100), la fonction ln dépasse la fonction 100sinx... Il y a donc,"à peu près", $\frac{\exp(100)}{2\pi}$ solutions (résultat à affiner en fonction de ce qui se passe "aux bornes").

Pour cerner la 1993ᵉ solution, il faut localiser celle-ci autour de 1993p, choisir une fenêtre adaptée. On obtient la fenêtre ci-contre, qu'on pourrait difficilement trouver... par hasard.

Tout ceci, passé la surprise devant le caractère un tantinet exotique de l'équation, peut sembler assez naturel. Il n'en est rien.Faites l'expérience de l'étude de cette équation avec des élèves de Terminale, et

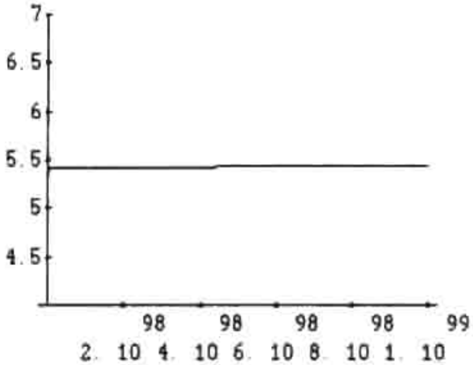


vous aurez des surprises... Pour mes élèves par exemple, d'une ordinaire classe de Terminale C :

— la majorité d'entre eux considèrent , graphique à l'appui, que cette équation admet une infinité de solutions. Les graphiques reproduits à ma demande sur papier font apparaître implicitement une sorte d'asymptote horizontale pour la fonction log. En tous cas l'horizontalité de la "branche infinie" ne coïncide pas avec l'image habituelle de la fonction log : mais dans la fenêtre d'affichage choisie, c'est bien ainsi que la courbe leur apparaît. Il faut noter que, si l'on demande aux élèves de rappeler la limite de la fonction log en l'infini, ils rappellent que c'est bien l'infini. Mais c'est une sorte de coup de chapeau à un résultat aimé du professeur. Car en même temps ils expriment clairement que la fonction log ne dépassera pas 100... Ce qui montre bien la fragilité de la notion de limite infinie chez nos élèves.

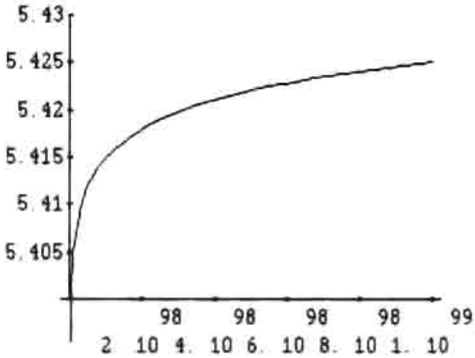
— mieux, pour la majorité des élèves aussi, la périodicité de la fonction sinus disparait. En effet, la machine ne donnant qu'une centaine de points, ceux-ci, si on veut la sinusoïde pour x variant de 0 à 1000 par exemple, ne seront pas nécessairement situés en haut de chaque arche. La machine affichera donc une espèce d'accordéon fatigué, que les élèves reproduiront fidèlement sur leurs feuilles. Même la fonction sinus a pour les élèves des traits caractéristiques qui s'estompent quand la machine s'essouffle un peu... Mais n'est-ce pas dans ces situations que l'on peut espérer construire les notions de périodicité, plus que sur l'intervalle [-p,p] ?

Exemple 3. Quelle est la limite de ln(lnx) en + l'infini ? Pour quelle valeur de x f dépasse-t-elle 1 ? 10 ? 100 ? 1000 ? Interpréter la représentation graphique de f sur l'intervalle $]1,10^{99}[$.



La difficulté réside dans le fait que sur l'intervalle considéré la représentation graphique apparait obstinément horizontale... Il faut alors comprendre que les (à peu près) points tracés par la machine sont (à peu près) les images des points $i.10^{97}$, pour i entier variant de 1 à 100.

C'est-à-dire que le point le plus bas de la courbe aura pour abscisse la valeur : $\ln(\ln 10^{97}) = \ln 97 + \ln\ln 10$, et le point le plus haut $\ln 98 + \ln\ln 10$, c'est-à-dire la courbe que évolue entre les altitudes 5,40 et 5,43. Ce qui permet de récupérer une fenêtre d'affichage convenable, et une allure plus sympathique de la courbe étudiée...



Une remarque à propos de cette dernière situation. La question a été posée à un stage de professeurs du second degré : comment expliquer le graphique que donne la calculatrice pour la fonction ln(lnx) entre 0 et 10^{99}.

— le tracé, compte tenu des contraintes de la machine est-il correct (autrement dit pouvait-on s'attendre, avant d'appuyer sur les touches de la calculatrice, à ce résultat ?)

— ou le tracé est-il aberrant ?

Il est à noter que, pour la totalité des stagiaires, le tracé était aberrant.

— Certains stagiaires s'attendaient à voir une asymptote en + 1

— Tous en tout cas pensaient légitime de retrouver la pente douce de la fonction ln. : " Puisque la fonction croît de moins l'infini à plus l'infini, cela doit apparaître, même déformé, sur l'écran".

On ne peut pas seulement considérer comme naïves de telles remarques. Elles témoignent, clairement, de l'illusion que le tracé de la machine est un tracé continu. ***Bref que la machine, moyennant d'eventuelles affinités, doit retraduire la courbe réelle.*** *Je pense qu'on ne peut pas combattre de telles illusions par de savants discours. C'est en mettant nos élèves (et nos collègues...) devant de telles situations que l'on parviendra à bousculer quelques certitudes... bien installées.*

Il ne s'agit à travers ces quelques exemples que de suggérer quelques pistes de travail : l'objectif n'est pas de donner des exercices pour mettre la calculatrice en défaut, ni de sombrer dans les lectures approximatives systématiques, mais de faire jouer la complémentarité des différentes approches.

5 . Un exemple d'activité

On terminera par un exemple plus complet d'activité, mettant en valeur le rôle privilégié de la calculatrice graphique pour le "débat scientifique" dans une classe.. Il s'agit de l'étude d'une suite implicite [10] :

On notera f_n la fonction polynôme qui à x associe :

$$x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 \ (n > 0)$$

Première étape : définition de la suite

On pourra faire tracer simultanément par la calculatrice graphique sur **R+** (ou plutôt sur un intervalle [0,a] bien choisi...) les représentations de f_1, f_2, f_3 et f_4, et formuler des conjectures sur le sens de variation de ces fonctions et sur le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ [11].

On pourra ensuite démontrer sans trop d'efforts que les fonctions f_n sont strictement croissantes sur **R+**

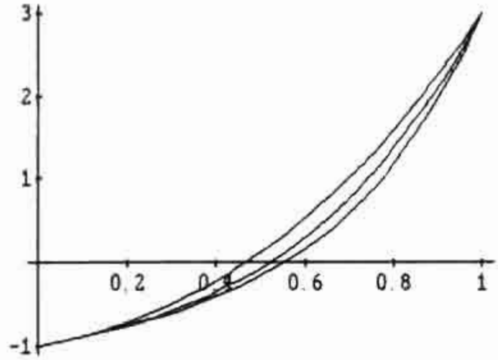
(On pourra faire remarquer l'intérêt qu'il y a à considérer f_n comme somme de fonctions strictement croissantes sur **R+** *, au lieu de passer par un calcul de dérivée...)* et en déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ a une solution unique sur **R+**.

On note u_n cette solution, et on proposera d'étudier la suite (u_n) ainsi définie.

(10) D'après une idée tirée de la Thèse d'Aline Robert 1982 *Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Université Paris VII.

(11) Il est clair que, pour le travail des élèves, il sera préférable de ne pas donner les questions suivantes avant l'énoncé par eux de conjectures. Les élèves ont vite fait de comprendre qu'il suffit de lire les questions suivantes pour s'éviter un effort d'imagination...

On donnera les valeurs exactes, si possible, et sinon approchées à 10^{-4} près par défaut de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6. On formulera enfin des conjectures sur le comportement de cette suite.



Cette première partie, traitée en TP en Terminale C, a pris une heure. Cela peut paraître long, mais l'expérience montre que si on laisse le débat se dérouler librement dans la classe et dans les groupes, on perd facilement un temps qui n'est pas tout à fait... perdu :

— certains élèves vont programmer sept *fonctions successives pour se persuader du résultat, d'autres vont dériver tout de suite, d'autres vont avoir recours aux fonctions puissances de référence pour conclure tout de suite à l'existence de la suite*

— certains élèves vont poser la question : *pourquoi restreindre l'étude à R+, et vont regarder ce qui se passe sur R- ...*

De premiers débats vont avoir lieu sur les "économies de mesure", sur conviction et démonstration...

Où l'on prouve la convergence

La consigne de la deuxième séance est claire : on veut prouver la convergence de la suite.

Il est clair qu'il "suffit" de prouver que la suite est croissante et majorée.

Cette deuxième séance dure aussi une heure. Certains élèves vont vouloir exprimer explicitement la suite, mais la grande majorité va conjecturer la croissance et la majoration.

La majoration par 1 se "voit", et se prouve immédiatement. La croissance se "voit", mais se prouve beaucoup plus péniblement. Une méthode est suggérée par un élève après observation de l'écran : si on prouve que $f_3(u_2)$ est négatif, c'est bon... La voie est ouverte pour l'étude de $f_n(u_{n-1})$ ...

Où l'on détermine la limite de la suite

Sans indication, le travail peut être très long, et son issue incertaine. La consigne donnée avait donc été d'en revenir à la définition de la suite, c'est à dire à

$$(u_n)^n + (u_n)^{n-1} + (u_n)^2 + u_n - 1 = 0 .$$

Il va falloir là 1h30 de travail. Il serait très difficile de donner tous les détails de la recherche. Signalons simplement les procédures mises en œuvre par les deux groupes de TP.

Les deux groupes, après certains tâtonnements, vont remarquer qu'il y a des *suites géométriques dans l'air... et vont alors essayer de démontrer que la suite est majorée par un nombre strictement inférieur à 1. Un groupe va prendre 3/4, l'autre 0,9. A partir de là, les deux chemins vont diverger.*

*Le premier groupe, par passage à la limite, va prouver que la limite cherchée est nécessairement racine de l'*équation $x^2 + x - 1 = 0$. *Il restera à mettre en forme la démonstration.*

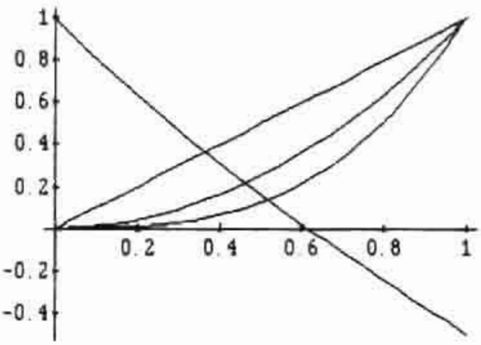
Le deuxième groupe va en revenir à l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 = 0$, *va dire que "l'inconnue, la variable est en fait ici n", et va "isoler n", ce qui revient à résoudre l'équation*

$$\frac{-x^2 - x + 1}{x+1} = x^{n-1}$$

Puis retour à l'écran graphique (cf. ci-dessous), observation de plusieurs courbe x^n, *et de leur intersection avec* $\frac{-x^2 - x + 1}{x+1}$, *remarques sur l'"applatissement" des fonctions puissances entre 0 et 1, conjectures sur la limite nécessaire de la suite cherchée, intersection de la courbe de* $x \to \frac{-x^2 - x + 1}{x+1}$ *avec l'axe des abscisses, etc.*

Enfin, l'activité s'achève par la confrontation entre les travaux des deux groupes. Chacun défend l'excellence de sa méthode. Est-ce qu'une méthode bonne est une méthode rapide, où est-ce une méthode qui met en évidence l'objet d'étude, ici la limite de la suite ?...

Il ne s'agit bien évidemment pas de dire qu'un tel problème donnera à tous coups le même type d'initiatives de la part des élèves. Disons simplement qu'il y a là



matière à activité, à débat pour les élèves, et que le rôle du maître est de toutes façons central pour la circulation du dit débat dans la classe. Il y a bien sûr beaucoup d'autres idées de problèmes qui pourraient être développées [12].

L'essentiel me semble être de prendre en compte les outils à disposition des élèves pour l'enseignement des mathématiques. En en connaissant les potentialités, mais aussi les limites.

De façon peut être paradoxale, je concluerai en disant que l'essentiel de l'essentiel, c'est de distinguer le réel de ses simulacres, le territoire de la carte qui le représente, la fonction des graphiques qui l'illustrent.

(12) On pourra utilement se reporter à la brochure Calculatrices graphiques et analyse : nouveaux outils, nouveaux problèmes, parue en Septembre 1993 à l'IREM de Montpellier, dans laquelle on trouvera les exemples développés dans cet article, entre autres...

"Lutter pour l'invisible, c'est simplement lutter pour les valeurs, lutter pour redonner un peu de profondeur de temps à l'instant immédiat, de profondeur de sens aux surfaces visibles. Pour redonner de la saveur aux images, il faut que nous retrouvions tout ce dont il ne peut pas y avoir d'image, et que la littérature ou la langage sont mieux à même d'exprimer. On peut tout dire, on ne peut pas tout montrer" (13).

Redonner de la saveur aux images... Tout un programme pour qui veut prendre en compte les calculatrices graphiques dans sa classe...

Luc TROUCHE
Groupe analyse
Irem de Montpellier

(13) Régis Debray, Vie et Mort de l'image, une histoire du regard en Occident, Gallimard 1992