L'HISTOIRE DE LA CARTE DE FRANCE DE CASSINI

Un P.A.E. interdisciplinaire d'histoire des mathématiques en classe de seconde

Xavier LEFORT
IUT de Saint-Nazaire

C'est un des paradoxes de notre enseignement et de notre société de mettre l'accent sur la formation scientifique, sur la prédominance des technologies, des mathématiques... et d'ignorer presque totalement la "culture scientifique".

Au lycée, les élèves des classes non scientifiques se croient incapables d'écouter tout discours mathématique, ou en ont été déjà dégoûtés depuis longtemps. Ceux des classes scientifiques sont trop souvent absorbés par "le programme" pour vraiment réfléchir sur leur matière.

Un Projet d'Action Educative en histoire des mathématiques permet de sortir du cadre scolaire pur, représente une occasion privilégiée de travailler en interdisciplinarité, et est peut-être un de ces moments si rares où on peut montrer que la culture mathématique aussi est communicable.

Par le biais de l'interdisciplinarité, les élèves peuvent concevoir que les mathématiques sont indissociables de l'histoire des hommes ; en décloisonnant les matières, le visage des différents enseignement est renouvelé et les professeurs forment vraiment une équipe.

Par ailleurs, les élèves ont, dans ce cadre l'occasion de s'initier à la recherche de documents, à la lecture de textes anciens (même scientifiques !), de découvrir différentes revues, enfin d'apprendre à présenter leur travail [1].

Au lycée de la Baule, nous avons choisi de travailler avec la classe de seconde [2],

(1) Un tel travail pourrait fort bien prendre place dans le nouveau cadre des modules de seconde.

(2) Nous avons commencé au lycée de la Baule en 1984.

d'une part en raison de l'absence d'examen à ce niveau, d'autre part et surtout parce qu'il est encore possible de jouer un peu sur les goûts et les orientations futurs, de réunir des élèves aux motivations très différentes.

Comment procéder ?

La première difficulté en général est de constituer une équipe d'enseignants ; il n'est pas si facile d'embarquer des collègues littéraires dans une aventure scientifique. L'expérience montre qu'ils y prennent goût. Notre première équipe comptait un collègue de physique qui s'est désisté ; il n'a pas été remplacé (les programmes de physique semblent trop lourds). Il reste donc un professeur d'histoire, un professeur de lettres, la documentaliste, et le professeur de mathématiques.

Il faut ensuite choisir un sujet à la portée de tous, ni trop démesuré, ni trop pointu ; ce n'est pas si simple. Nous avions choisi, par exemple, la première année, tout naïfs et pleins de fougue : "quelques grandes étapes de la mécanique, d'Aristote à Newton". Ce fut passionnant et enrichissant pour tous, mais un peu trop vaste. Une autre année, nous nous sommes arrêtés à : "Leibniz et son temps", ce qui, cette fois, était un peu trop pointu et délicat du point de vue des mathématiques.

Le P.A.E. sur la carte de Cassini a permis une activité pluridisciplinaire fructueuse, des ouvertures s'offraient à tout moment ; il suffisait de choisir.

Il faut enfin organiser le travail. Les conditions matérielles se sont dégradées au fil des années. Au départ, un après midi était banalisé, environ toutes les trois semaines, l'horaire étant majoritairement pris sur les heures de cours (la participation au P.A.E. étant obligatoire, on ne peut trop être exigeant vis à vis des élèves, il s'agit de leur apporter un plus, non de les pénaliser). D'années en années, les difficultés d'emploi du temps et le manque de salles, ont rendu cette organisation impossible. Chacun donc prépare le travail, donne les directives pendant son cours ; nous avons en quelque sorte un thème commun d'étude.

Pour "la carte de Cassini", la classe était séparée en trois groupes : un groupe "scientifique" (pas forcément composé de bons élèves en mathématiques), un groupe "littéraire", un groupe "historique". Chaque groupe a concrétisé son travail, par la réalisation de panneaux, qui ont constitué une exposition ; celle-ci a été non seulement montée au lycée, mais a été également présentée lors de différentes manifestations [3].

Le P.A.E. sur "la carte de Cassini"

Il s'agissait donc d'étudier l'histoire de la première carte topographique à l'échelle d'un pays, histoire qui débute à peu près au moment de la création de l'Académie des sciences à Paris en 1666 et qui ne prend vraiment fin que vers 1815.

L'équipe d'enseignants ne s'était jamais penchée particulièrement sur les problèmes de cartographie ; nous étions donc en état de recherche en même temps que les élèves, ce qui fut un aspect très formateur du projet.

(3) En particulier à l'Université d'Eté de La Rochelle, organisée par la Commission Inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques en 1988, aux journées de l'APMEP à Rouen en Novembre 88...

Carte de la région de Guérande (1792)

Nous avons travaillé essentiellement à partir de documents de l'Observatoire de Paris, de l'IGN, de cartes anciennes, et surtout sur les textes des auteurs eux-mêmes. La règle imposée était de remonter à la source, d'essayer non pas d'avoir un regard "moderne", mais de se replacer dans la réalité historique ou scientifique de l'époque étudiée : pourquoi, à ce moment, s'est-on lancé dans cette aventure ? Quelles raisons ont poussé à traiter le problème de cette manière ? En mathématiques, par exemple, il faut s'efforcer de retrouver les techniques de l'époque ; les élèves ont alors un regard neuf sur de nombreuses notions.

Signalons cependant que nous avons découvert une somme assez importante d'articles de journaux ou revues et livres sur le sujet [4]. Nous présentons ici quelques aspects historiques et mathématiques du travail effectué. Ceci n'est pas sans difficultés puisque (et c'est toujours ce que nous essayons de faire ressortir) les aspects historiques, littéraires, philosophiques, scientifiques, sont éminemment liés.

ASPECT HISTORIQUE

Une histoire d'un siècle et demi

Le fil conducteur était d'étudier l'histoire de la première carte topographique de la France. Les comptes rendus des premières séances de l'Académie des sciences témoignent de ce que le ministre Colbert avait l'intention de charger cette nouvelle Académie de l'établissement de cartes précises du royaume, la cartographie de l'époque restant assez sommaire.

Les préoccupations scientifiques vont trouver un terrain d'entente avec les désirs de Colbert. Il s'agit alors pour les milieux savants de déterminer la forme et les dimensions de la terre, en particulier pour vérifier les hypothèses de Newton. En 1669, l'Abbé Picard entreprend dans ce sens, aux environs de Paris, la mesure de la distance séparant deux points de même longitude et de latitudes connues ; ceci permet d'en déduire la longueur du degré de méridien, et, dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre, de calculer le rayon terrestre. Cette mesure permet aussi de lever tous les points remarquables de la région et d'en dresser la carte précise. En 1671, Picard rend compte devant l'Académie de sa mesure du méridien, et la carte réalisée d'après ses relevés, puis complétée sur toute la région parisienne paraît en 1678.

Par ailleurs, Colbert a remarqué en 1668 l'ouvrage de Jean-Dominique Cassini (1625-1712) sur l'utilisation des occultations des satellites de Jupiter pour calculer les longitudes. Ayant pris contact avec l'auteur, le ministre lui propose une place importante à l'Observatoire de Paris, nouvellement créé sous la direction de Picard. Cassini accepte et sitôt arrivé à Paris, participe à la mesure du méridien, puis au levé de la première carte. A la mort de Picard, en 1682, il prend la direction des opérations, prolongeant, en particulier avec La Hire le calcul du méridien vers Dunkerque et Bourges, et poursuivant par ailleurs la cartographie des côtes de France, travail entrepris également par Picard.

La mort de Colbert en 1683 ralentit les travaux, son successeur, Louvois, ayant

(4) Ce travail s'est fait avec la collaboration de la commission inter-IREM d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques, ce qui a grandement facilité l'accession aux documents originaux.

Jean Dominique CASSINI. Au fond, l'Observatoire.

d'autres objectifs à proposer tant à l'Académie qu'à l'Observatoire; de plus, la guerre réduisant les subsides, la survie de ces institutions devient précaire. Cassini meurt en 1712, mais son fils Jacques Cassini (1677-1756) reprend ses travaux, notamment en ce qui concerne la poursuite et la vérification du calcul du méridien. Cependant les résultats obtenus sur ce dernier point semblent en faveur de l'hypothèse suivant laquelle la terre serait un ellipsoïde allongé vers les pôles (degré du méridien plus court vers le nord).

Tous ces problèmes n'avancent pas, ou très peu, jusqu'en 1733, date à laquelle les travaux destinés à dresser la carte de France furent repris par l'Académie. Le calcul de la "méridienne" permettant une bonne description des régions de même longitude que Paris, Jacques Cassini commence le repérage des régions à l'Est et à l'Ouest par rapport à des perpendiculaires au méridien de Paris. Par ailleurs, le problème de la forme de la terre restant posé, l'Académie envoie deux expéditions, l'une en Laponie (Maupertuis, Clairaut, en 1735-1736), l'autre au Pérou (Bouguer, La Condamine en 1735-1746), lesquelles confirment l'hypothèse de Newton, selon laquelle la terre est un ellipsoïde aplati aux pôles.

L'avènement de la carte

Jacques Cassini vieillissant, son fils, César-François Cassini de Thury reprend le flambeau et achève en 1744 une première carte de France au 1/878.000.

Deux années plus tard, alors qu'il suit l'armée en campagne dans les Flandres, il est chargé de dresser la carte des différents champs de bataille. Au vu des travaux réalisés, ayant pris connaissance de la carte de 1744, et soumis à la pression tant des membres de l'Académie que de certains nobles et politiques, Louis XV ordonne la réalisation d'une carte de France plus précise encore (1/86.400) nécessitant la mise en œuvre d'un matériel important et la formation d'un plus large personnel ; l'échelle souhaitée permet en effet la reproduction de nombreux détails. Quant aux problèmes financiers que pose une telle entreprise, Louis XV s'en remet à son contrôleur général des finances, en qui Cassini rencontre alors plus qu'un allié.

Les premières mesures commencent en 1750, mais l'époque faste est de courte durée. La guerre de sept ans, en 1756, absorbe énergie et subsides et les crédits sont coupés. Cassini a l'idée alors de financer la poursuite des travaux par la constitution, en 1758, d'une association et l'ouverture d'une souscription. Le roi laisse à cette société tout le matériel et les souscripteurs toucheront à la fois les tirages des premiers feuillets lors de leur parution et des dividendes sur la vente au public. Par ailleurs, les provinces sont mises à contribution, lorsqu'elles sont concernées par l'avance des travaux.

Dix ans après le début des premiers relevés, en 1760, 50 feuillets sur les 182 prévus sont déjà imprimés. Cependant, les difficultés se multiplient, tant sur le plan financier, certaines provinces rechignant à payer, que sur le plan matériel, le personnel voyant son activité contrariée par les notables locaux, souvent désireux de le faire travailler à leur propre service. Il faut attendre 1789 pour que la totalité des travaux sur le terrain soit terminée ; la Bretagne, en particulier, a tergiversé jusqu'en 1781 pour verser sa contribution et permettre la réalisation des mesures sur son territoire.

L'histoire de la carte ne s'arrête pas là. Jacques-Dominique Cassini, fils de Cassini de Thury (1748-1845) prend la suite de son père en 1784, et assure en particulier la direction de la société patronnant la réalisation de la carte. (Il s'agit donc de la quatrième génération des Cassini). Les travaux sur le terrain, à cette époque, s'achèvent, et il ne reste que quelques feuillets (17 sur 182) à graver (concernant la Guyenne et la Bretagne) lorsqu'arrive l'année 1789. L'époque révolutionnaire ne va pas favoriser l'achèvement de la carte, puisqu'en 1793 le gouvernement donne au "Dépot de la Guerre" la charge de terminer les impressions en cours, d'entretenir le matériel et d'actualiser les mesures. La Société fondée en 1758 est sans doute spoliée, mais, surtout, la carte, appartenant au domaine militaire, ne peut plus être librement publiée. Il faut attendre 1815 pour qu'elle soit entièrement imprimée, avec divulgation des compléments et des corrections.

En 1818, Jacques-Dominique Cassini entreprend une action judiciaire pour récupérer le matériel et obtenir un dédommagement convenable. S'il est confirmé comme directeur de l'Observatoire, le dernier des Cassini n'obtient qu'une indemnisation bien inférieure à ce qu'il souhaite. Il faut dire cependant qu'une grande partie des souscripteurs de 1758 avait disparu lors de la révolution. Il demeurait une œuvre remarquable, la première à avoir réalisé l'ambition de dresser la carte topographique d'un pays.

En classe

Cet aspect historique a été abordé par le professeur d'histoire avec les élèves. Ceux-ci, ont eu accès aux textes de l'Abbé Picard, des Cassini et autres. Il a été nécessaire de les replacer dans le contexte historique : l'étendue de l'époque concernée (1667-1815) permet d'aborder une partie importante de l'histoire de France.

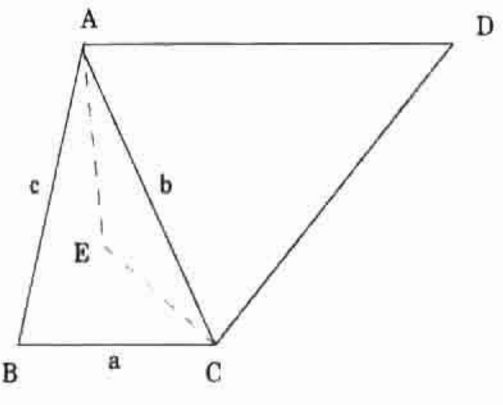
ASPECT MATHEMATIQUE

La formule de triangulation

Le principe de base de la carte topographique est la formule

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

dans un triangle ABC quelconque de côtés a, b, c



On mesure sur le terrain un des côtés du triangle, par exemple a, qui sera appelé la base ; puis par des procédés de visée, les angles

$$\widehat{BCA} \;,\; \widehat{BAC} \;,\; \widehat{ACB} \quad [5]$$

On peut alors, par le calcul, déduire b et c. Le procédé pourra alors se poursuivre pour le triangle ACD, ou ACE ; finalement, par une seule mesure "terrestre" et des mesures d'angles uniquement, un pays entier peût-être couvert par ce qu'on appelle des chaînes de triangles. Ce procédé avait déjà été utilisé pour de petites étendues, par exemple, par le Hollandais Snellius [6]. Son intérêt réside avant tout dans le fait, qu'il est beaucoup plus facile, techniquement, de mesurer des angles avec précision qu'une longueur sur le terrain. Nous avons pu tout au long du P.A.E. suivre l'histoire du perfectionnement des quarts de cercle et des théodolites, pour atteindre de très grandes précisions.

La formule de triangulation n'est pas connue, a priori, de l'élève moyen de seconde. Son utilisation étant fondamentale, comment la démontrait-on au XVII^{e} ou XVIII^{e} siècle ?

Voici ce que les élèves ont pu lire par exemple dans l'ouvrage de Bernard Lamy : *Eléments de géométrie ou de la mesure du corps* (pages 64, 66, 90, 91, édition de 1695) :

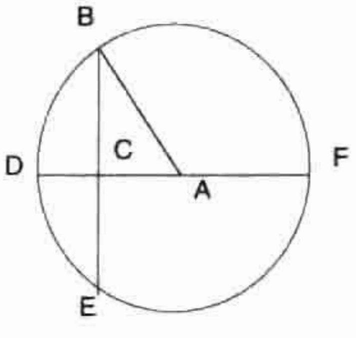
(5) Il suffit en théorie de mesurer deux angles, le troisième étant leur supplémentaire ; en fait ce troisième angle est systématiquement mesuré pour rectifier les erreurs éventuelles.

(6) Snellius (1580-1626).

Neuvième définition

Le sinus d'un arc, c'est la moitié de la corde du double de cet arc.

L'arc BDE est le double de l'arc BD; la ligne BC, moitié de BE corde de BDE est sinus tant de l'arc BD que de l'arc BF, son complément au demi cercle ; ainsi les arcs DB et BF égaux ensemble au demi cercle ont un même sinus, et sont réciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.



Dixième définition.

Le sinus d'un angle c'est le sinus de l'arc qui le mesure.

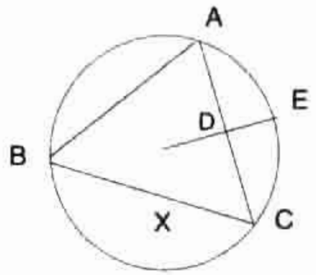
Ainsi BC qui est sinus de l'arc BD mesure de l'angle BAD, est le sinus de cet angle.

Théorème huitième.

Dans un triangle, la moitié de chaque côté est le sinus de l'angle opposé.

Le triangle ABC soit inscrit dans le cercle X, il faut démontrer que AD moitié de AC est le sinus de l'angle ABC.

L'arc AE moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle ABC. Ainsi l'arc AC est double de l'arc qui est la mesure de l'angle ABC : donc AD moitié de la corde de l'arc AC est le sinus de l'arc AE et celui de l'angle ABC.



On démontre par la même voie que la moitié de BA est le sinus de ABC, et la moitié de BC celui de BAC.

Donc le sinus d'un angle est au côté opposé de cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au côté de cet angle; ou les sinus sont entre eux comme les côtés opposés , puisque les moitiés sont comme les touts.

A partir de ce petit extrait, vient se placer une réflexion sur la définition du sinus : la définition de l'époque est-elle équivalente à la définition moderne ? Quel est le statut des angles inscrits, des angles au centre, des arcs ?... La trigonométrie s'aborde alors de façon tout à fait différente.

Certains élèves se sont penchés, à ce moment sur la définition des angles, l'origine des unités (degrés, minutes, secondes).

LA PRATIQUE

Sur le terrain

Nous avons pu remarquer à la lecture des textes, combien l'opération qui consistait à placer des perches identiques bout à bout pour mesurer des longueurs, pouvait être délicate. La première mesure effectuée par l'Abbé Picard entre Sourdon et Malvoisine causa d'ailleurs, par son imprécision relative, bien des soucis par la suite (7). Même aujourd'hui, les mesures de longueurs ont plus de risque d'être entachées d'erreur que les mesures angulaires.

Les élèves l'ont constaté sur le terrain en manipulant des instruments de topographie prêtés par l'IUT de Saint-Nazaire. Il est d'abord nécessaire de prendre beaucoup de précaution pour mettre les appareils en station, la qualité des mesures en dépend. Se pose ensuite la question de l'utilisation des mesures dans les calculs : leur ordre de grandeur et le traitement des imprécisions.

Comment calculer ?

Comment, sans calculatrice, arriver au bout des calculs ? Ce fut l'occasion de parler un peu de l'invention des logarithmes, qui fut décisive pour ce genre de problèmes ou pour l'astronomie.

Il ne s'agissait pas de rentrer dans le détail mais de s'en faire une idée en lisant quelques textes, examinant avant tout, bien sûr, l'aspect calculatoire du logarithme. Par exemple, les élèves ont eu en main le texte suivant de Philippe de la Hire (*l'Ecole des Arpenteurs* - 1679).

Soit dans le triangle ABC l'angle donné de 85 degrés et la cote AC opposé à cet angle soit aussi donné de 345 toises ; enfin soit donné l'angle BAC de 30 degrés, on demande la cote BC.

Ayant disposé les termes de cette proportion dans l'ordre qui leur convient, comme on voit ici,

l'angle ABC donné 85 degrés
la cote AC donné 345 toises
l'angle BAC donné 30 degrés
la cote demandée ou cherchée BC

soit donc

le nombre logarithme de 345:	2 53782
le sinus logarithme de 30 degrés :	9 69897
somme des logarithmes des termes du milieu de la règle	12 23679
sinus logarithme de 95 degrés	9 99834
Reste logarithmique	2 23845

qu'il faut chercher dans les logarithmes des nombres naturels, et l'on trouve qu'il répond au nombre naturel 173 et $\frac{3}{20}$ à peu près ; on aura donc pour ce coste cherché 173 toises et $\frac{3}{20}$ de toise, qui valent à peu près 10 pouces.

(7) Elle fut à l'origine de la controverse sur la forme de la terre, aplatie aux pôles suivant Newton, aplatie à l'équateur suivant Cassini.

Les calculs d'erreurs

Tout au long de leurs mémoires, l'Abbé Picard, puis les Cassini, expliquent longuement comment ils minimisent les erreurs inévitables. Il faut d'abord que la base puis les côtés des triangles soient les plus grands possibles (occasion d'évoquer erreurs absolues et erreurs relatives) ; ensuite il faut faire le plus grand nombre de mesures possibles et... tout simplement, on prendra la moyenne, en écartant toutefois celles qui s'en éloignent trop, comme le fait Cassini de Thury en 1783, dans la *Description géométrique de la France* :

Description géométrique de la France (1783) par CASSINI DE THURY

Sur la latitude & la longitude de l'observatoire Royal

Il était nécessaire, pour faire usage des distances à la méridienne & à la perpendiculaire de l'Observatoire, pour déterminer la latitude & la longitude des principales Villes du Royaume, de connaître exactement la latitude du lieu ou l'on devait rapporter la position de tous les autres compris dans l'étendue du Royaume : cet élément le plus important de l'Astronomie, a été l'objet des recherches des plus célèbres Astronomes. Je rapporterai ici les résultats de leurs observations, & j'exposerai les raisons qui m'ont déterminé à adopter celle que j'ai employée dans le calcul.

J.D. Cassini avait déterminé en 1672, la hauteur du pole apparente de 48° 51' o", c'est la plus petite ; car il a remarqué des variations très singulieres, qu'on pourrait attribuer à des irrégularités dans les réfractions, causées par les feux & la fumée d'une grande Ville, au Midi de laquelle l'Observatoire est placé. M. de la Hire en était si persuadé, qu'il n'a jamais fait usage des observations de l'Etoile polaire, pour en déduire la latitude de l'Observatoire, & qu'il a préféré les observations faites au Midi, où il ne pouvait soupçonner aucunes irrégularités dans les réfractions.

M. Lemonnier, en 1737, a trouvé la hauteur du pole de	48° 51' 4"
M. Maraldy, en 1733	48° 51' 1"
Mr. Legentil, en 1744	48° 51' 2"
Je l'ai trouvée en 1744	48° 51'1'
Les observations faites à la porte Montmartre, par M. Picard, refaites à l'Observatoire Royal, donnent la hauteur du pole de	48° 51' 0".
Celles faites à S. Jacques de la Boucherie, donnent	48° 51' 2".
Les observations du Chevalier de Louville, faites à l'hôtel Taranne,	48°50' 58"

Par les observations faites à Orléans, il a trouvé quelques secondes de plus.
Voilà donc sept déterminations, dont la plus éloignée ne differe de la mienne que de trois secondes ; & comme il n'est guere possible de porter la précision plus loin, j'ai regardé le résultat de mes observations, qui tient un milieu entre tous les autres, comme le plus approchant du vrai, & je m'y suis arrêté, pour fixer la latitude apparente de l'Observatoire de 48° 51'1".

Ce procédé un peu élémentaire mais très bien accepté par les élèves a permis de discuter des calculs d'erreurs et mettre en relief les recherches qui ont pu être faites sur ce sujet et les inventions mathématiques qui en ont découlé à la fin du XVIII^e siècle et au XIX^e siècle.

D'autres erreurs peuvent être dues aux principes de mesures ou de calculs eux-mêmes ; la formule de triangulation s'applique en principe à des triangles plans ; la terre est cependant sphérique. Les Cassini estiment que si les distances ne dépassent pas 45.000 toises, l'erreur commise est minime (8). Ce n'est pas très difficile de faire ces calculs avec les élèves pour estimer justement cette erreur.

D'autres rectifications peuvent être dûes aux accidents du terrain, et les mesures des niveaux sont des plus difficiles (9) ; les erreurs peuvent de plus être accentuées par la réfraction qui est en général évaluée à l'aide de tables.

Enfin, une grande source d'erreur est, comme nous l'avons signalé plus haut, le choix de la toise (10).

(8) Sur la sphère le triangle sphérique étant de côtés a, b, c, arcs de grands cercles, la formule s'écrit :

$$\frac{\sin A}{\sin b} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin b}$$

Pour un arc de 45000 toises, l'angle au centre vaut 1,37 10-2 radians, et dans ce cas le sinus est équivalent à l'arc.

(9) Dans La mesure de la terre de l'Abbé Picard (1671), pp. 88-89-90 l'auteur donne une table de correction et décrit minutieusement un appareil destiné à mesurer les différences de niveau.

(10) On a pu comparer historiquement la toise de l'Abbé Picard et celle de Jacques Cassini, et établir que : toise de Picard = toise de Cassini x 0,99887.

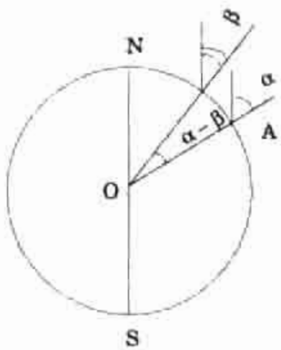
Les systèmes de projection en cartographie

La terre étant non plane, pour la représenter à plat, il faut établir ce que l'on nomme un système (11) de projection. Nous avons donc inventorié un certain nombre de ces systèmes et étudié plus particulièrement celui de J.D. Cassini qui porte son nom. Il prend en quelque sorte comme axes de coordonnées le méridien de l'Observatoire de Paris et la "perpendiculaire" à ce méridien qui est le grand cercle orthogonal au méridien passant par l'Observatoire (voir encadré page suivante).

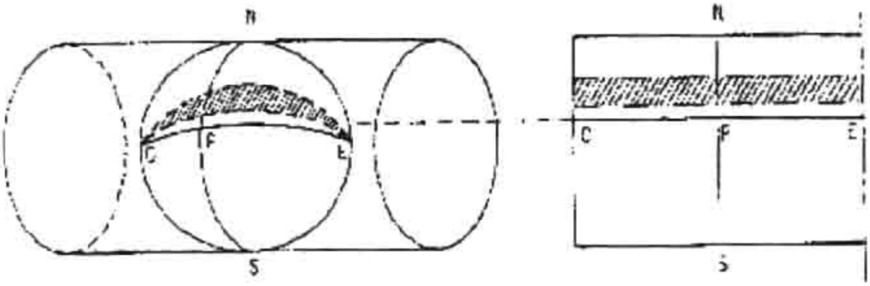
Ce procédé convenait à l'échelle de la France, mais déjà aux frontières, les déformations étaient non négligeables. Les élèves ont pu le remarquer en comparant la même région sous différentes cartographies.

La mesure de la "méridienne" de l'Observatoire

Deux opérations se sont effectuées parallèlement : la triangulation pour la Carte de France et la mesure d'un degré de méridien pour connaître le diamètre de la terre.



(11) *Cf. Repères* n° 6 de Janvier 92, article de M. Bourguet : "Cartographie et Mathématiques".



Si P est l'Observatoire de Paris :
NPS est le méridien passant par l'Observatoire
OPE est le grand cercle coupant le méridien passant en P.

Ce grand cercle sera projeté sur une perpendiculaire à la projection du méridien.

Le fuseau hachuré est projeté selon la zone hachurée ci-dessus.
On constate aisément que les distances à l'intérieur d'un fuseau, suivant les parallèles, sont dilatées lorsqu'on s'éloigne du méridien de Paris, mais conservées le long des perpendiculaires.

Connaissant la latitude de A et celle de B, on obtient la valeur de AB en degrés. Si l'on a par ailleurs mesuré sur terre la longueur de AB en toises, on connaît la circonférence terrestre, puis son diamètre (en supposant celle-ci sphérique).

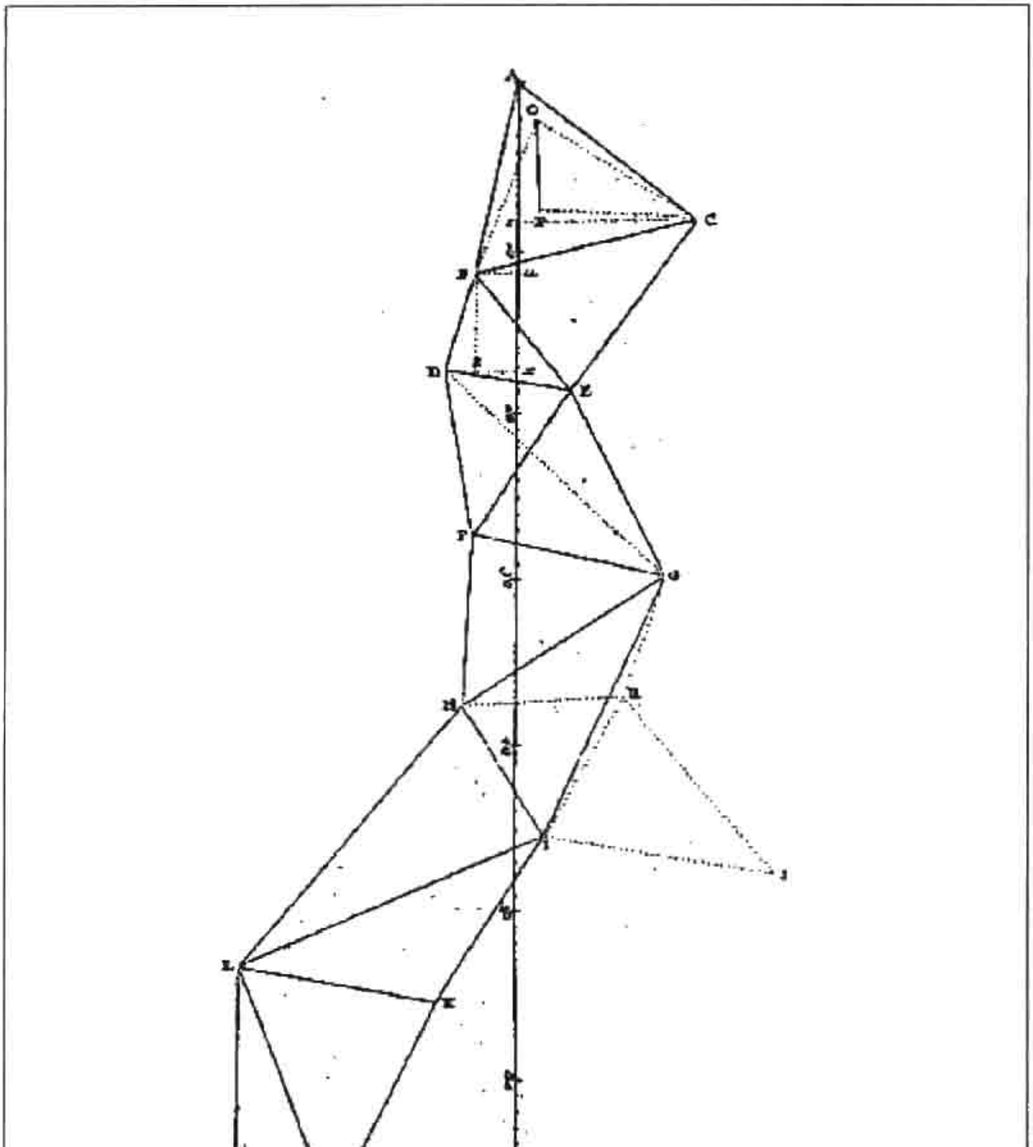
Pour toutes ces raisons, la position exacte de la "méridienne" (qui devint peu après le "méridien") et sa mesure sont primordiales.

Dans le texte suivant, extrait d'un mémoire de Jacques Cassini présenté à l'Académie en 1718, ce travail est décrit ; il est tout à fait à la portée d'un élève de seconde.

Méthode que l'on a pratiquée pour déterminer la grandeur des côtés des Triangles de la Meridienne.

Pour déterminer en Toises la longueur des côtés des Triangles de la Meridienne, on s'est servi de la distance OP (PL.3), entre le milieu du Moulin de Villejuive & le plus proche coin du Pavillon de Juvisy, que M. Picard avait mesurée actuellement avec beaucoup de soin, de 5663 toises du Châtelet de Paris. Il observa de l'extremité O de cette base, l'angle COP entre le gros Clocher de Brie-Comte-Robert & le Pavillon de Juvisy, & de l'autre extrémité P, l'angle entre le même Clocher de Brie-Compte-Robert & le Moulin de Villejuive. Ayant ensuite observé de Brie-Compte-Robert l'angle OCP

Mesure de la Terre (3ème Planche)



entre les extremités de la base, il eut les trois angles du Triangle OPC, ce qui joint au coté OP connu, fait connaitre la valeur des côtés OC & PC.

Il observa pareillement des points O & C & du point B qui représente la Tour de Montl'hery, les angles BOC, BCO & CBO du Triangle OBC, dont le côté OC était connu, & il eut la longueur du côté BO, distance de la Tour de Montl'hery au terme Septemtrional de la base, & du côté BC, distance de la Tour de Montl'hery au Clocher de Brie-Comte-Robert.

C'est cette distance BC, dont l'on s'est servi pour calculer les côtés du premier Triangle de la meridienne, & les autres successivement sans interruption jusqu'à l'extremité Meridionale de la France, où l'on a terminé les Triangles par une nouvelle base mesurée actuellement dans la plaine du Roussilon.

Méthode dont l'on s'est servi pour décrire la situation de la Ligne Meridienne de l'Observatoire, par rapport aux lieux differents compris dans les Triangles.

Pour décrire la situation de la Ligne meridienne de l'Observatoire par rapport aux Triangles, on a d'abord observé du milieu de la face Meridionale de l'Observatoire, l'angle BAt, que la Tour de Montl'hery faisait avec le point horizontal du Midi, qu'on a trouvé dans le chap. 5. de 11° 57' 50". On a retranché cet angle de l'angle BAC, que la Tour de Montl'hery fait avec le gros Clocher de Brie-Comte-Robert, qui a été observé de 63° 0' 15", & on a eu l'angle CAt de 51° 2' 25", dont le complément ACt est de 38° 57' 35" ; & par consequent au Triangle rectangle AtC ; dont le côté AC a été déterminé par le premier Triangle de L:3, 38 toises, 4 pieds, & les angles CAt & ACt sont connus, on aura le côté Ct, distance Orientale du gros Clocher de Brie-Comte-Robert à la Méridienne de1029 toises 1 pied ; & At, distance de l'Observatoire à la perpendiculaire tirée de Brie-Compte-Robert fut la meridienne, de 8324 toises 2 pieds.

On trouvera de la même manière, la distance Bt de la Tour de Montl'hery à la Meridienne, & la distance Au, de l'Observatoire à la perpendiculaire Bu, tirée de la Tour de Montl'hery sur la Meridienne, car dans le Triangle rectangle, AuB, dont le côté AB a été déterminé par le premier Triangle de 11756 toises 2 pieds ; l'angle BAu, que la Tour de Montl'hery fait avec la meridienne de l'Observatoire étant connu de 11° 57' 50", & sont complement ABu de 78° 2' 10", on aura le côté Bu, distance Occidentale de la Tour de Montl'hery à la Meridienne, de 2437 toises, & Au, distance de l'Observatoire à la perpendiculaire tirée de la Tour de Montl'hery sur la meridienne de 11501 toises.

Pour trouver presentement la situation de Torfou & des autres lieux successivement à l'égard de la Meridienne, il faut tirer du point B, Bt parallele à Ax, & perpendiculaire àBu. On prendra ensuite la somme des angles ABC, CBE & DBE, qui est de 184° 26' 55", dont on retranchera l'angle ABu de 78° 2' 10" plus l'angle droit uBt, & l'on aura l'angle DBt de 16° 24' 45" ; & dans le Triangle rectangle BtD dont l'angle DBt est connu & le côté BD de 6220 toises 3 pieds, on trouvera le côté Dt de 1757 toises 4 pieds, & le côté Bt de 5967 toises 2 pieds. Ajoutant Dt à Bu qui a été trouvé ci-devant de 2437 toises, on aura Dx, distance Occidentale de Torfou à la Meridienne de 4194 toifes

4 pieds. Ajoutant pareillement Bt ou ux à Au qui a été trouvé ci-devant de 11501 toises, on aura Ax, distance de l'observatoire à la perpendiculaire tirée de Torfou sur la Meridienne, de 17468 toises 2 pieds.

C'est de cette maniere dont on s'est servi, pour décrire la Meridienne de l'Observatoire par rapport aux Triangles, & déterminer sa longueur en toises. L'on s'est contenté d'en rapporter ici quelques exemples pour faire connoitre la methode que l'on a pratiquée, pour trouver successivement la position de chaque lieu à l'égard de cette Meridienne.

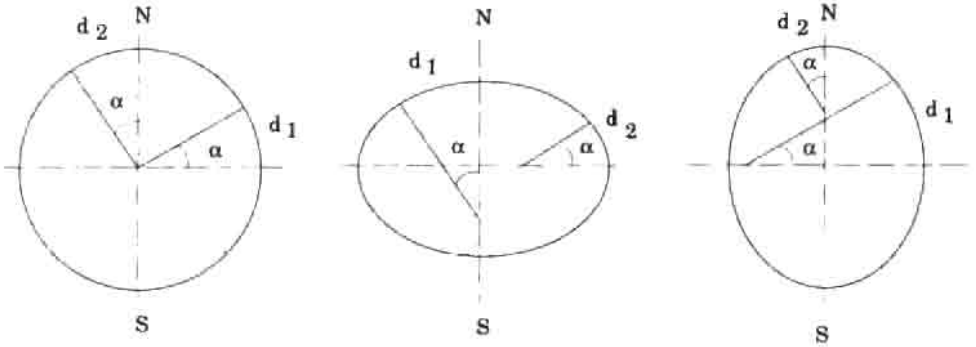
La forme de la terre

La mesure de la méridienne devait aboutir à de grandes controverses scientifiques au 18e siècle.

On se doutait dès la fin du 17e siècle que la terre n'était pas exactement sphérique. Newton avait déduit de sa théorie de la gravitation universelle qu'elle devait être aplatie aux pôles ; Huyghens appuyait cette théorie. Pendant ce temps, la mesure du méridien par les Cassini montrait qu'elle devait être aplatie à l'équateur car le degré de méridien comptait plus de toises vers le Sud que vers le Nord.

C'est une histoire passionnante tant du point de vue historique, philosophique que scientifique. Ce fut l'occasion pour les mathématiciens ou physiciens comme Clairaut, D'Alembert, Laplace... d'élaborer des théories qui allaient bien au-delà du simple problème de la forme de la terre.

Ces théories bien sûr ne sont pas à la portée d'élèves de seconde, mais le simple fait de les évoquer, a permis d'approcher les rapports entre mathématiques appliquées



d1 = d2
terre sphérique

d1 > d2
terre aplatie aux pôles
(Newton)

d1 < d2
terre aplatie à l'équateur
(Cassini)

et théoriques, ce que peuvent être des "batailles" philosophico-mathématiques, enfin de parler de problèmes de mesure, puisqu'au départ c'était un peu le nœud de l'affaire.

On ne peut faire une liste exhaustive des sujets abordés. On pourrait ajouter : comment mesurer la distance de deux points sur la terre quand on connaît leurs longitudes et latitudes ? ou bien si l'on connaît leur distance à la "méridienne" et à la "perpendiculaire" ?

Dès 1669, l'Abbé Picard avait pressenti toutes les questions qui pouvaient naître de l'établissement de la carte. Ce dernier extrait ouvre de plus la porte à l'établissement d'une mesure universelle. Distribué aux élèves au début de leurs travaux, il a été leur fil conducteur.

Extrait du rapport de PICARD à l'Académie du 31 juillet 1669

Outre que par ce moyen on aurait une Carte la plus exacte qui ait encore été faite on en tirerait cet avantage de pouvoir déterminer la grandeur de la Terre avec plus de certitude que tous ceux qui y ont travaillé jusque ici tant à cause de la grande commodité des lieux que par la facilité qu'on a maintenant de bien prendre les angles de lieux les plus éloignés par l'aide des Lunettes d'approche jointes à un grand instrument bien gradué, tel que celui dont on se servirait, lequel donne assez distinctement jusqu' à un tiers de minute et se peut vérifier à tous moments d'une façon très aisée. Nous fîmes dès l'année passée quelques avances pour le même dessin de la mesure de la Terre : nous prîmes au juste quelques grands triangles et nous mesurâmes exactement une longueur de chemin de près de 6000 toises, droit et situé selon la ligne méridienne avec deux extrémités assez remarquables pour être vues de divers lieux éloignés et si bien placés que par peu de triangles on pourra continuer cette base jusque en plus de 60 000 toises, dont on sera presque autant assuré que si on les avait toutes actuellement mesurées. Après avoir ainsi déterminé une longueur sur Terre il en faudrait trouver le rapport avec le Ciel par la différence des hauteurs de pôle des deux extrémités seulement, ou plutôt par la différence des hauteurs méridiennes d'une même étoile proche du zénith pour cet effet on pourrait préparer un instrument de neuf à dix pieds de rayon avec un bout de limbe qui ne contiendrait pas plus de 8 ou 10 degrés de sa circonférence et qui par conséquent serait très facile à transporter.

On pourrait ainsi déterminer sur terre la grandeur d'un grand degré, laquelle on exprimerait ou par toises à l'ordinaire ou par pas Géométriques : mais pour donner une mesure qui demeurât à la postérité et qui ne dépendit point de la nôtre particulière je voudrais me servir de la longueur qui est nécessaire pour un pendule à secondes de temps déterminant combien de fois cette longueur serait contenue dans un grand degré sur terre, et conséquemment à la circonférence et au Diamètre. De sorte que la mesure de la grandeur de la terre premièrement trouvée par la différence des hauteurs de pôle, et par rapport au Ciel, serait attachée au mouvement journalier comme à un original commode et exposé à toutes les nations.

(Registres de l'Académie p. 127).

Au total de tels travaux, on peut l'espérer, laissent des traces dans l'histoire scolaire des élèves. Ils ont le souvenir du travail en groupe, de l'échange d'informations, du dynamisme que cela apporte. Des élèves dits "littéraires" ont fait des mathématiques, pourtant un peu ardues, avec plaisir. Enfin, la présentation de l'exposition formée par les panneaux réalisés par les différents groupes est évidemment pour tous un moment de fierté. C'est aussi une occasion de parler "sciences" au lycée, ce qui n'est peut-être pas si habituel.

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES:

Outre les mémoires des Cassini, on peut consulter:

La cartographie, collection "histoire de périscope", éditions CEL.

L'élaboration d'une carte topographique, L'école moderne française, B.T.2, n° 197.

Total information, n° 92, publication de Total, 1982

Le document et son histoire, la carte, Textes et documents pour la classe, n° 1275

Cartes et figures de la terre, catalogue de l'exposition, centre Georges Pompidou, 1980

"Dossier sur les atlas", in *Le monde de l'éducation*, juin 1980

"IGN, les arpenteurs du globe", *in* revue *GEO*, n° 99

La figure de la terre, compte-rendus de l'académie des sciences, La vie des sciences, tome 3 n° 3, Gauthier Villars

FERNAND JOLY, *La cartographie,* P.U.F., Que sais je? n° 937,.1985

FLORENCE TRYSTRAM, *Le procès des étoiles, récit de la prestigieuse expédition de trois savants français en Amérique du Sud et des mésaventures qui s'ensuivirent (1735-1771)*, Seghers, 1979

VOLTAIRE, *Micromégas,* Nouveaux classiques, Larousse.

VOLTAIRE, *Les lettres philosophiques,* G.F. Texte intégral, n° 15, Flammarion

PELLETIER, *La carte de Cassini,* Presse de l'école des ponts et chaussées, 1990

BOYE, LEFORT, *Mesurer aussi bien la terre que le ciel,* IREM des Pays de Loire, 1991