RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ PAR DES PAYSANS CHILIENS

Isabel SOTO
Nicolas ROUCHE (*)

Les paysans chiliens mis en scène dans la présente étude résolvent leurs problèmes avec une grande sûreté, par des voies assez éloignées des méthodes précises que nous enseignons à nos élèves. Celles-ci, pour des raisons qui peuvent être variées, ne réussissent pas toujours (voir entre autres la communication de G. Kuntz dans Repères-Irem *N° 7). Les enseignants qui liront cet article — moins exotique qu'il ne paraît — y trouveront sans doute, en scrutant la pensée des paysans, des pistes pour comprendre les élèves et éventuellement renouveler leur enseignement. En particulier, ce qui suit pourrait inspirer l'une ou l'autre alternative à l'exploitation mécanique de la règle de trois.*

1. Introduction

Le présent article reprend une partie (celle relative à la proportionnalité) d'une étude antérieure [Soto, 1992] dans laquelle nous nous sommes posé la question des stratégies et procédures de résolution de problèmes et d'opérations utilisées par certains paysans du Chili.

Lorsque, même d'une manière rapide et sommaire, on passe en revue les problèmes ou situations mathématiques — attachés généralement aux mathématiques élémentaires — que nous trouvons quotidiennement dans notre vie professionnelle, familiale, politique ou sociale, on constate que le concept de proportionnalité joue un rôle fondamental, "ses applications sont innombrables et présentes dans tous les secteurs d'activité humaine". [Dupuis et Pluvinage, 1981, p. 167].

L'apprentissage scolaire de ce concept a changé plusieurs fois, passant de la "règle de trois" des "mathématiques traditionnelles" aux fonctions linéaires des "mathématiques modernes" puis aux tableaux de proportionnalité des "mathématiques concrètes" [Dupuis et Pluvinage, 1981, p. 167]. Telles sont les données "pour parties implicites, que l'on peut dégager des programmes scolaires français et des manuels scolaires. Une consultation rapide montre d'ailleurs que le mouvement pourrait avoir été similaire dans de nombreux pays". [*op. cit.* p. 167]. D'autre part. il n'est pas certain que l'apprentissage du concept de proportionnalité et ses applications tel qu'il est généralement

(*) Isabel SOTO est chercheur au Centre de Recherche et Développement de l'Education (CIDE), Chili. Nicolas ROUCHE est Professeur à l'Université Catholique de Louvain.

pratiqué soit efficace dans la population scolaire.

Nous voulons donc montrer et analyser ce que nous avons trouvé en dehors de l'école, par rapport à cette notion, dans l'espoir de dégager quelques pistes pour mieux comprendre nos problèmes d'enseignants et ceux de nos élèves.

En effet, et nous le verrons tout au long de cet article, on a constaté chez les paysans une très grande maîtrise de la proportionnalité et l'utilisation de procédures de résolution de problèmes assez éloignées des procédures scolaires habituelles.

Dans cette étude nous avons travaillé avec 18 paysans, hommes et femmes, peu scolarisés ou analphabètes, appartenant à deux communautés situées l'une à 90 km de Santiago du Chili (Melipilla) et l'autre à 850 km au sud de cette ville (Cunco Mocún, près de la ville d'Osorno). En termes généraux — âge, scolarité, étendu de leur propriété agricole — ces deux groupes de paysans étaient assez semblables. Cependant, le groupe de Melipilla est constitué par des paysans travaillant pour la commercialisation de leurs produits en grandes quantités (vente de blé au moulin, par exemple). Par contre, les paysans de Cunco produisent tout juste pour la consommation familiale et ils ne réalisent des activités de vente que dans un petit marché de la ville la plus proche. Ce fait explique que, par exemple, la grandeur des nombres concernés dans les opérations arithmétiques est beaucoup plus petite dans le cas des paysans de Cunco. Néanmoins, les types de situations problèmes qu'ils proposent et résolvent sont semblables.

Il s'agit donc d'une étude de cas où l'on a demandé à des paysans peu scolarisés ou analphabètes de décrire, de raconter leurs activités réelles et, dans ce contexte, on a enregistré tant les situations mathématiques que les manières de les résoudre.

Pour l'analyse des problèmes de proportionnalité, nous avons considéré les situations proposées et résolues par quatre sujets :

MANUEL, 59 ans, sans scolarité, analphabète ;

LUIS, 53 ans, études jusqu'à la 2e primaire, lit et écrit ;

JOEL, 56 ans, études jusqu'à la 6e primaire, lit et écrit avec difficulté ;

NELSON, 49 ans, études jusqu'à la 4e primaire, lit et écrit avec difficulté.

Devant la difficulté d'interpréter la masse touffue des données enregistrées et d'y discerner les lignes de pensée essentielles, nous avons d'abord réalisé une analyse approfondie d'un des quatre cas dans le but de générer une sorte de modèle permettant l'analyse des autres. C'est ainsi que nous avons travaillé sur l'ensemble de situations résolues par MANUEL, ce qui nous a permis d'établir d'une part une méthodologie générale d'analyse et, d'autre part, une caractérisation des premières situations rencontrées.

Dans l'analyse de chaque situation, nous avons parcouru les étapes suivantes :

- transcription du problème tel qu'il a été énoncé par le sujet, contenant les données explicitées par lui. On a ajouté les données implicites (par exemple, 1 sac fait 80 kilos) ;

- transcription de la procédure orale en respectant sa chronologie et l'orientation des opérations, c'est-à-dire en respectant l'ordre dans lequel les opérations furent exécutées et l'ordre dans chaque opération (si le sujet avait dit et fait, par exemple, 5 fois 10, ne pas enregistrer 10 fois 5). Cette distinction nous a permis, comme on le verra plus tard, de bien relever l'utilisation soit des rapports internes, soit des rapports externes ;

- chaque procédure a été mise sous la forme d'un schéma où on a indiqué les éventuelles décompositions du problème en sous-problèmes, les résultats intermédiaires, la direction de la procédure et le résultat final.

- après avoir fait des observations sur chaque situation, nous les avons mises en relation afin d'établir tant les points communs que les différences ou particularités relatives aux procédures, aux opérateurs, aux décompositions du problème, aux rapports établis et utilisés ;

- finalement, à la suite d'un processus semblable sur chaque sujet, nous avons fait l'analyse globale des quatre cas et de toutes les situations.

2. Quatre types de situations de proportionnalité

Nous avons considéré en tout 58 situations-problèmes de proportionnalité. Elles ont pu été regroupées en quatre types :

S1 ***Problèmes de changement d'unités.*** Exemple d'une telle situation : calculer le poids en kilos de 50 quintaux, sachant implicitement que un quintal fait 100 kg.

S2 ***Problèmes simples sur des grandeurs de deux sortes***. Ce sont des situations où il s'agit de calculer — à partir de la valeur d'une unité ou d'une quantité différente de l'unité — soit le prix d'une quantité d'un produit, soit le rendement d'une surface déterminée de terrain, etc. Par problème simple nous entendons un problème dont l'énoncé ne comporte pas de sous-problèmes. Par exemple :
calculer le coût de 3 sacs d'engrais si un sac coûte $6.764.

S3 ***Problèmes composés sur des grandeurs de deux ou trois sortes.*** Il s'agit de problèmes variés de calculs de prix, de rendement de la production, de paiement de la main d'œuvre, etc. Par problème composé nous entendons un problème dont l'énoncé comporte implicitement ou explicitement un sous-problème. Par exemple :
calculer le coût de la moisson de 1 1/2 ha de maïs étant donné que pour 1 ha on paye 2 1/2 quintaux et que le prix de 1 quintal est $4.500.

S4 ***Problèmes de calcul de pourcentage.*** Il s'agit soit du calcul direct d'un pourcentage d'un nombre (15% de $624, par exemple), soit du calcul d'un prix final, étant donné tant le pourcentage à ajouter au prix brut que le prix brut (par exemple, calcul d'un prix "TVA comprise" à partir du prix hors TVA).

3. Exposé détaillé

Pour des raisons de concision, nous n'exposerons ci-après que deux ou trois situations-problèmes par type (on en trouvera d'autres dans [Soto, 1992]).

3.1. Situations de changement d'unité (S1)

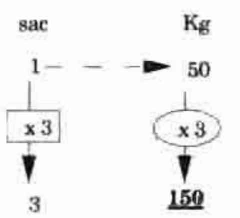
Première constatation, on observe deux procédures : l'une *sans décomposition du problème*, et une autre où *les sujets décomposent le problème en sous-problèmes.*

Exemple sans décomposition du problème :

MANUEL

Problème : calculer le poids en kilos de 3 sacs, sachant implicitement que 1 sac fait 50 kg.

Schéma de la Procédure (1) *:*



MANUEL établit un *rapport interne* (entre les sacs), puis il applique ce rapport comme un opérateur sur les kilos. On observe donc ici la *conservation des rapports internes* dans le passage d'une unité à une autre.

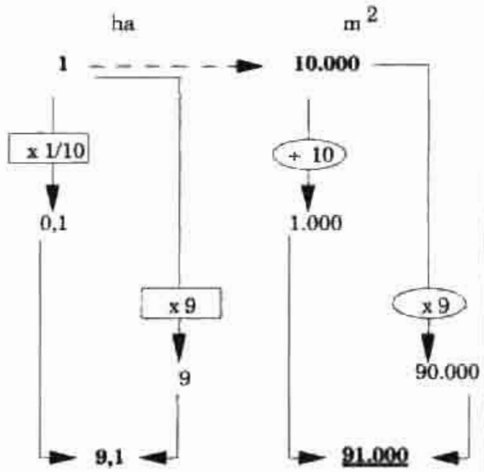
Il est à remarquer que dans ce cas il ne suit pas la procédure habituelle de changement d'unité, qui utilise le rapport externe (la nouvelle unité est 50 fois plus petite, donc le nouveau poids s'exprime par un nombre 50 fois plus grand). En termes d'opérations, il dit "3 fois 50" et non pas "50 fois 3".

Exemple avec décomposition :

LUIS

Problème : calculer l'équivalent en mètres carrés de 9,1 ha, sachant implicitement que 1 ha fait 10.000 m²

Schéma de la Procédure :



Observons que les *rapports* que l'on peut établir entre les données sont, l'un *entier* (le rapport externe d'un hectare à un mètre carré : 10.000) et l'autre, *non entier* (le rapport interne entre les aires : 9 et un dixième). LUIS passe par des rapports

(1) Signification des symboles utilisés dans ce schéma et les suivants :
: relation entre les données
: direction de la procédure de traitement
: rapport établi
: opérateur
: addition

internes et contourne la difficulté du rapport non entier 9 et un dixième en décomposant le problème.

La *procédure* utilisée peut se caractériser comme suit : on décompose le nombre dont on doit trouver l'équivalent dans la seconde unité (dans notre cas 9,1) pour établir des rapports internes simples ; puis on compose la donnée. Ceci se passe dans la colonne de la première unité (les hectares). Ensuite, on utilise la même décomposition dans la colonne de l'autre unité (les mètres carrés) et on y applique les mêmes opérateurs et on compose la réponse finale du problème. On aperçoit nettement l'isomorphisme entre les deux colonnes.

Dans son premier calcul (d'un dixième d'hectare) LUIS utilise un rapport non entier mais qui est un sous-multiple de 10. Effectivement, la division par dix et ses multiples, ainsi que la multiplication, ne lui posent aucune difficulté. Puis le calcul des 9 ha restant se fait en utilisant le rapport entier 9. Remarquons que LUIS utilise dans les sous-problèmes le diviseur 10 et le multiplicateur 9, ce qui est évidemment beaucoup plus simple pour lui que d'appliquer directement un opérateur tel que 9,1.

D'autre part, bien qu'il ait pu effectuer le calcul en utilisant le passage par le rapport externe (10.000), cela aurait peut-être affecté le *sens* du problème. Le passage par une proposition telle que "si j'ai 1 ha j'ai 10.000 mètres carrés, alors pour 9,1 hectares j'ai 10.000 fois..." fait problème. Qu'obtient-on ? Des mètres carrés ? Comment fais-je pour obtenir des mètres carrés lorsque j'agrandis 9,1 hectares 10.000 fois ? Alors qu'un raisonnement du type "si j'ai 1 ha, j'ai 10.000 mètres carrés, alors, si j'ai 2 hectares (ou 9,1) hectares j'ai 2 (ou 9,1) fois plus de mètres carrés" semble être beaucoup plus proche de ce que l'on peut imaginer ou même voir naturellement dans le comportement des phénomènes.

Sur les 10 problèmes de changement d'unité que nous avons analysés (I. Soto, 1992), 8 ont été résolus en utilisant uniquement des rapports internes, et 2 (résolus par MANUEL dans des cas où le rapport externe valait 100) sont passés par le rapport externe.

Ainsi, le plus souvent les rapports internes sont utilisés spontanément, même lorsque le rapport proposé dans les données et non entier. Le sens, la réalité du problème déterminant la procédure, même lorsque le rapport envisagé est difficile. Les difficultés opératoires sont contournées par des procédures variées de décomposition en sous-problèmes.

3.2. Problèmes simples sur des grandeurs de deux sortes (S2)

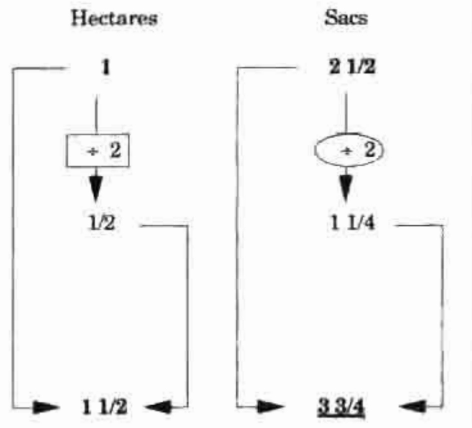
Les situations-problèmes du type S2 (en tout, 24 situations) proposées et résolues par les quatre sujets, présentent, comme dans le cas de S1, deux types de procédures ; celle où le sujet ne décompose pas le problème en sous-problèmes, et celle où il décompose.

Les procédures sans décomposition sont quasiment identiques dans les problèmes des types S1 et S2. C'est pourquoi nous ne retenons dans cette section que trois exemples avec décomposition. Voici un premier cas. Il s'agit d'un problème posé en termes de fractions.

JOEL

Problème : calculer les sacs de semences nécessaires pour 1 1/2 hectare, si pour chaque hectare il faut avoir 2 1/2 sacs

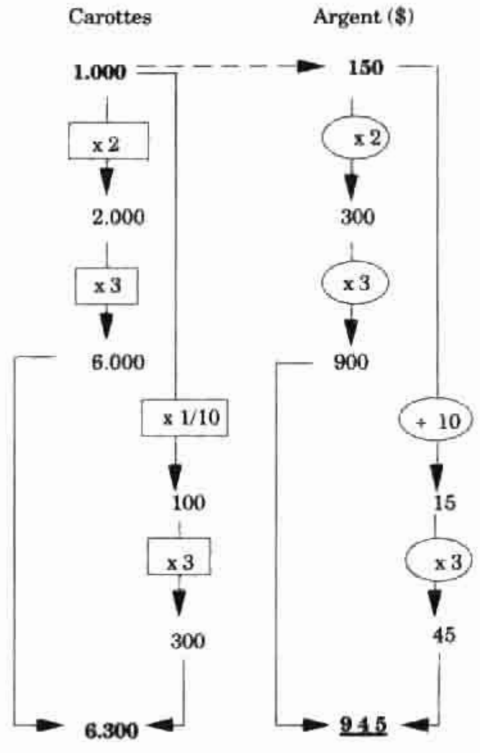
Schéma de la Procédure :



MANUEL

Problème : calculer la valeur de la récolte de **6.300** carottes, si la récolte de **1.000** carottes vaut **$150**

Schéma de la Procédure :



Que l'on passe par le rapport interne ou par le rapport externe, on ne peut éviter des opérations avec des fractions. JOEL choisit le passage par des rapports internes et utilise la décomposition naturelle de $1\frac{1}{2}$ en 1 et $\frac{1}{2}$, évitant ainsi la fraction $\frac{3}{2}$. L'addition finale (2) est alors réalisée sans peine sur les parties entières puis sur les parties fractionnaires $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$.

Voici un deuxième problème. On y voit MANUEL recourir à une décomposition assez complexe.

(2) Nous analyserons, dans un article à paraître, les procédures utilisées par les paysans pour les opérations.

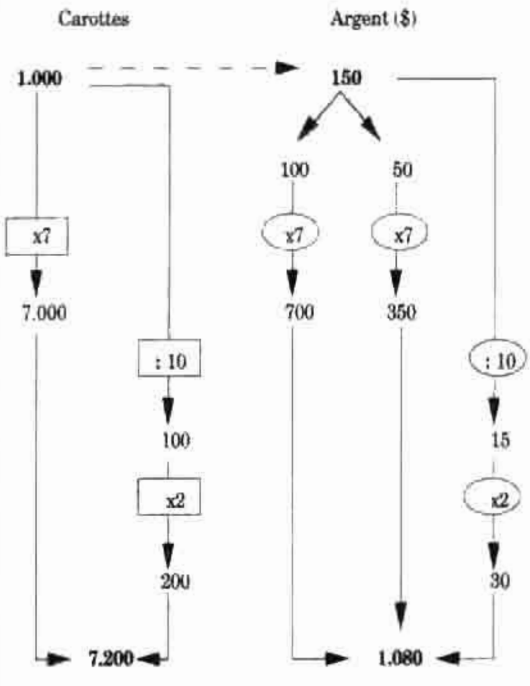
On remarque ici que tant le rapport externe $\frac{150}{1000}$ que le rapport interne initial $\frac{6300}{1000}$ sont non entiers. Si on procède directement sue les données, on doit calculer soit 6.300 $\times \frac{15}{100}$, soit 150 $\times \frac{63}{10}$. MANUEL, au contraire "reconstruit", si l'on peut dire, 6.300 à partir de 1.000 à l'aide de l'application successive des rapports très simples (2 ; 3 ; $\frac{1}{10}$ et 3). Ensuite, il reproduit dans l'ensemble de prix tout ce qu'il a fait dans le domaine des carottes. Des décompositions si nombreuses permettent à MANUEL de rester à tout moment au niveau du sens, ce qui aurait été impossible s'il avait exécuté des opérations sur des nombres compliqués et avait ainsi recouru forcément à des règles formelles.

Voici (ci-contre) une troisième situation analogue à la précédente (rapports interne et externe non entiers) et qui fait voir une grande souplesse de procédure.

MANUEL

Problème : calculer la valeur de la récolte de **7.200** carottes, si la récolte de **1.000** carottes coûte **$150**

Schéma de la Procédure :



Dans ce cas, MANUEL n'établit pas directement le rapport entre 1.000 et 7.200 ; il le contourne et procède comme on l'a déjà décrit (reconstitution de 7.200 à l'aide des rapports très simples établis à partir de 1.000). Mais il éprouve aussi, semble-t-il, des difficultés avec le produit de 150 et 7. Et il fait encore une décomposition du problème en calculant le prix de 7.000 carottes en supposant que le prix est $100 et puis $50 (c'est comme cela qu'il l'exprime). La décomposition des problèmes en sous-problèmes pour les simplifier atteint dans le cas présent un degré de souplesse étonnant. Il est frappant de constater la capacité de MANUEL à mémoriser les résultats intermédiaires.

3.3. Problèmes composés sur des grandeurs de deux ou trois sortes (S3)

Dans ce type de situations, le schéma comporte trois colonnes, deux d'entre elles pouvant correspondre à une même sorte de grandeur. Un sous-problème consiste à mettre en relation les deux premières colonnes, le problème lui-même impliquant le passage de la deuxième à la troisième.

Nous constatons, comme dans les situations précédentes (S1 et S2), que le passage par des rapports internes est privilégié par les sujets, et qu'ils utilisent des procédures avec et sans décompositions (quoique pour ces dernières dans deux cas sur sept).

L'analyse détaillée nous a permis d'observer une grande souplesse des procédures. En effet, dans la majorité des cas, les sujets ont utilisé des procédures différentes lors du passage de la première à la deuxième colonne, et du passage de la deuxième à la troisième. Ils ont donc travaillé en réalisant des schémas de même structure dans la première et la deuxième et *ensuite* dans la deuxième et la troisième.

Une des situations typiques est celle où, pour calculer le prix total d'un produit il faut changer l'unité dans laquelle ce produit a été mesuré.

Voici (ci-dessous) un exemple avec décomposition et où les trois colonnes sont de même structure.

Dans ce cas, MANUEL a choisi le *passage* par les *rapports internes*. Observons qu'il n'établit pas le rapport entre 120 et 80. Ce qu'il fait, c'est décomposer 120 a partir de 80 (le poids en kilos d'un sac) et trouver ce qu'il lui manque pour avoir 120. Alors, il conclut que 120 = 80 + 40. Et ce n'est que à ce moment-là qu'il cherche un rapport, cette fois entre 80 et 40 (ce qui est beaucoup plus simple : 80 étant le double de 40). Alors cette décomposition lui permet de contourner d'abord la difficulté d'établir un rapport non entier (3/2) et puis d'interpréter cela comme "un sac et demi".

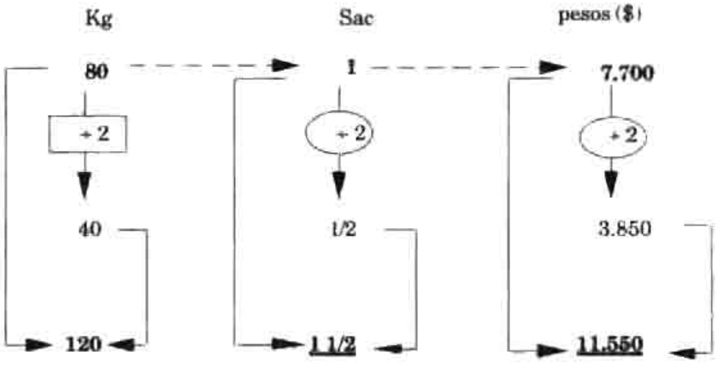
La *deuxième partie* du problème est *résolue* en appliquant exactement la *même procédure*. Cette fois MANUEL interprète de manière additive $1\frac{1}{2}$ comme $1+\frac{1}{2}$. Dans le schéma, on peut observer l'identité des structures dans les trois colonnes.

Voyons un problème où le sujet à procédé sans décomposition, mais néanmoins a utilisé deux procédures différentes.

MANUEL

Problème :
calculer le prix de 120 kg de sulfate, si 1 sac coûte $7.700 (sachant implicitement que 1 sac fait 80 kg.)

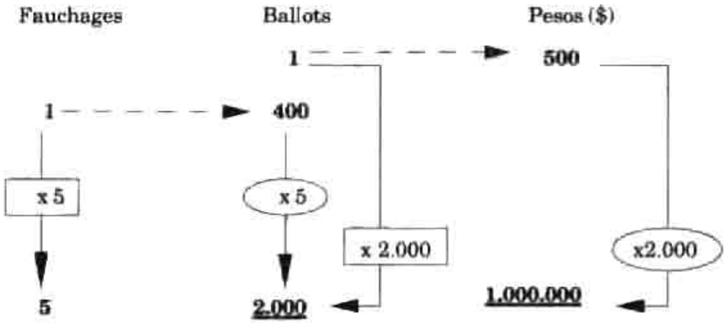
Schéma de la procédure :



JOEL

Problème : Calculer les rentrées que l'on peut obtenir de la vente de fourrage, si on fauche 5 fois le même pré, sachant que à chaque fois on obtient 400 ballots, et que le prix d'un ballot est $500

Schéma de la Procédure



JOEL appuie ses procédures sur la conservation des rapport internes et passe par un sous-problème correspondant aux deux premières colonnes. Il calcule d'abord la production totale, puis le prix total à partir de ce résultat. Il aurait pu calculer le prix d'un fauchage (à partir du prix d'un ballot) et puis le prix de 5 fauchages. Mais, s'il avait utilisé cette procédure, il aurait dû effectuer deux multiplication (500 x 400 et 2.000 x 5) et non une seule (500 x 2.000). D'autre part, la question à laquelle il voulait répondre — et qui n'apparaît pas dans le problème — c'était les rentrées de toute l'année, c'est-à-dire que, dans la réalité JOEL n'était pas intéressé au prix de chaque fauchage. C'est peut-être aussi un élément qui détermine sa procédure.

Dans les situations résolues suivant des procédures de décomposition nous avons aussi observé — sauf pour un cas — l'utilisation de décompositions différentes, c'est-à-dire que les sujets ont utilisé une décomposition pour le passage de la première à la deuxième colonne, et une autre pour le passage de la deuxième à la troisième. On observe à nouveau que le choix des procédures est influencé par les difficultés opératoires, d'une part, et par la réalité, le sens du problème, d'autre part.

Voici maintenant une situation-problème illustrant cette analyse. Il s'agit d'un problème où le passage se fait entre domaines de grandeurs d'espèces différentes : de surfaces à poids, puis à l'argent.

LUIS

Problème : Calculer le coût de la moisson de 1 1/2 hectare de maïs, étant donné que pour 1 hectare, on paie 2 1/2 quintaux et que le prix de 1 quintal est $4.500

Schéma de la procédure (1^er sous-problème) :

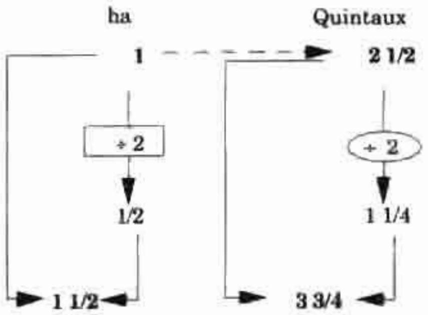
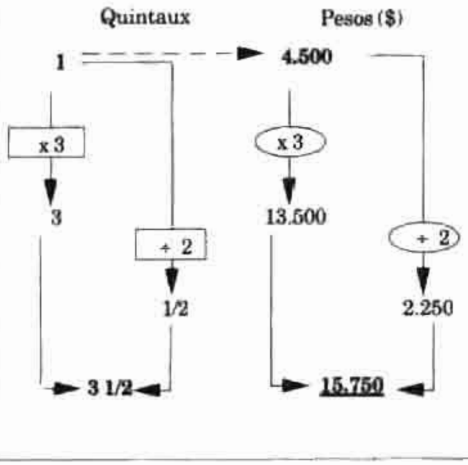


Schéma de la procédure (2^e sous-problème) :



Signalons que dans la première partie (calcul du paiement en quintaux, Schéma 1) le rapport interne n'est pas entier (c'est $\frac{3}{2}$), et que LUIS l'exprime comme $1+\frac{1}{2}$. Le rapport externe n'est pas entier non plus (c'est $\frac{5}{2}$). On observe que LUIS utilise le rapport interne et fait une décomposition qui suit l'interprétation naturelle un sac plus un demi sac. Cette décomposition est la même qu'il avait déjà utilisée dans un problème antérieur.

Lorsque LUIS arrive au calcul du paiement en argent ($) il ne prend pas comme point de départ le rapport interne entre $2\frac{1}{2}$ quintaux et $3\frac{3}{4}$. Il transforme d'abord cette solution en une solution réelle ("on ne paye pas le quart, c'est trop peu et en plus si le travailleur avait mangé chez moi..."), et il va prendre par la suite alors 3 quintaux et demi.

Ensuite LUIS revient sur la relation initiale entre les données (1 quintal coûte $4.500, deuxième schéma) et effectue le calcul à ce moment en établissant cette fois deux rapports successifs à l'unité. Ces rapports sont récupérés comme opérateurs dans l'ensemble d'arrivée et on peut observer la symétrie des structures dans les deux ensembles. Par contre, les trois colonnes ne sont pas du tout de même structure.

Nous pouvons déjà esquisser une conclusion : les paysans interviewés éprouvent quelques difficultés à l'égard de la notation formelle des fractions et dans les opérations formelles avec des fractions. Mais il font des "lectures" correctes des fractions et il créent des procédures opératoires adéquates. Par exemple, lorsque LUIS divise $2\frac{1}{2}$ par 2 ; il divise d'abord l'entier 2 et puis la fraction $\frac{1}{2}$. Pour l'addition il fait de même : addition des entiers, puis addition des fractions. Chez d'autres sujets, nous avons observé cette même procédure d'exécution des opérations avec des fractions.

3.4. Problèmes de calcul de pourcentage

Il nous a paru intéressant d'observer dans les calculs de pourcentages, d'une part, comme ci-dessous la flexibilité des procédures et, d'autre part, l'expression de la notion de pourcentage. Etant donné qu'une des caractéristiques fondamentales de ce type de problème est la référence à une norme (à savoir 100), nous nous sommes demandé si les sujets utilisent des procédures semblables à celles décrites précédemment (S1, S2 et S3) ou si leurs procédures sont plus proches des procédés scolaires traditionnels.

Une première constatation : des quatre sujets repris dans cette analyse, l'un applique, dans 5 des 6 problèmes, directement une formule apprise.

Voici un exemple.

> JOEL.
>
> *Problème :* calculer le prix d'un article plus TVA étant donné que le prix brut est de \$450 et la TVA de 18%
>
> *Procédure :* on multiplie par 18 et divise par 100
>
> 450 x 18 = 8.100
> 8.100 ÷ 100 = 81
> Addition : 450 + 81 = 531 (faite mentalement de même que la multiplication par 18 où il a utilisé une décomposition en facteurs)

Effectivement, JOEL multiplie par 18 et divise par 100 tout en expliquant qu'il procède ainsi parce que le rapport "est difficile donc on le fait comme dans la calculette". Par contre, dans un problème où il devait calculer 8% de 700, il trouve le rapport entre 100 et 700 (7) et l'applique comme opérateur sur 8. Cette procédure montre que JOEL comprend bien la notion de pourcentage.

Dans tous les autres cas, les sujets utilisent le rapport interne que l'on peut établir dans les colonnes. Voici un exemple (cf. page suivante).

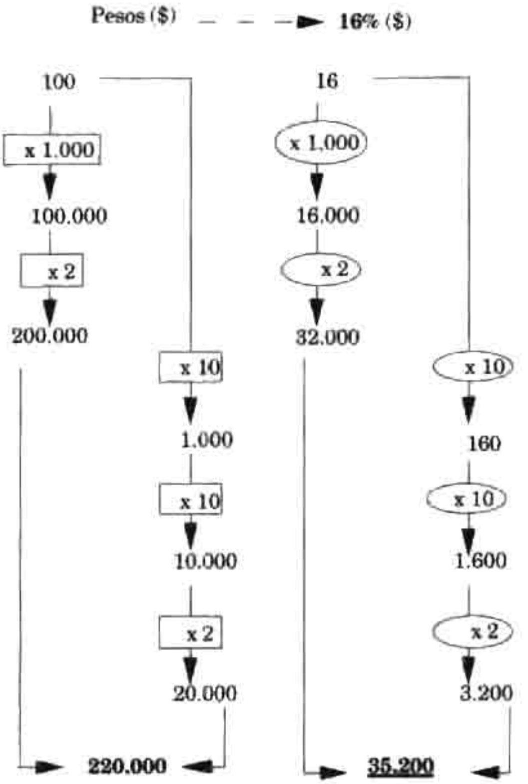
Comme on l'observe dans le schéma, NELSON procède à une très longue décomposition du nombre sur lequel il doit calculer 16% tout en disant qu'il faut calculer d'abord 16% de 100.000, puis de 200.000 et ainsi de suite.

Dans ce problème il est clair que les décompositions déterminant la procédure dépendent de la complexité du rapport. En effet, NELSON éprouve quelques difficultés pour établir certains rapports. Lorsqu'il établit le rapport entre 100 et 100.000, il le fait directement. Mais, le rapport entre 100 et 10.000 passe par une décomposition de ce dernier nombre. En effet, il établit d'abord

NELSON

Problème : Calculer la TVA (16%) correspondant à une vente de $220.000 (TVA non comprise)

Schéma de la procédure :



le rapport entre 100 et 1.000, puis entre 1.000 et 10.000. On peut penser qu'il y a pour NELSON des rapports en quelque sorte "plus naturels", qui découlent directement du langage.

NELSON, comme tous les sujets repris dans cette analyse, prend comme point de départ la notion de pourcentage, puis il établit des rapports internes dans la première colonne et les applique comme des opérateurs sur les données de la deuxième colonne. Nous n'avons trouvé qu'un cas exceptionnel où MANUEL résout une des situations en passant tant par des rapports internes qu'externes. Il s'agit d'une décomposition tout-à-fait semblable à celle analysée dans la Section 3.2. On peut penser que MANUEL utilise des rapports externes pour contourner la difficulté présente dans les deux cas d'opérer avec le nombre 15 (calcul du prix de 7.200 carottes si le prix de 1.000 carottes est $150 ; ici il s'agissait de calculer 15% de 30).

A notre avis, il est clair que la flexibilité des procédures et de leur application est en relation avec la complexité des opérations. On constate que dans la majorité des situations-problèmes proposées par les quatre sujets repris dans cette analyse, ils utilisent une procédure qui prend comme *point de départ la notion de pourcentage*. En effet, ils expriment avant tout ce que veut dire "x%" par rapport à la norme 100, tout en démontrant clairement sa signification. Dès lors, c'est à partir de ce premier résultat que les *rapports* qu'ils établissent *dans l'ensemble de départ* entre 100 et le nombre sur lequel on doit calculer un certain pourcentage vont avoir du sens et vont pouvoir se transformer en *opérateurs* qui agissent *sur des éléments de l'ensemble d'arrivée* (ensemble des résultats).

C'est ainsi que cette notion — si mystérieuse pour tant des nos élèves à l'école — trouve chez ces sujets une signification assez concrète et réelle, tout-à-fait compréhensible et utile.

4. Conclusion

Nous avons décrit et analysé un très large ensemble de problèmes de proportions proposés et résolus par quatre paysans, dans le but de mettre en évidence leurs procédures. Une analyse détaillée des procédures a montré qu'elles sont assez éloignées des algorithmes scolaires formels. En effet, nous avons constaté dans les quatre types de situations que les sujets utilisent notamment deux procédures :

- le passage par des *rapports internes*, c'est-à-dire qu'ils opèrent sur un domaine de grandeurs — le domaine de départ — et qu'ils reproduisent ces rapports dans le domaine d'arrivée, construisant ainsi des structures de calcul identiques ;

- et la *décomposition du problème* en sous-problèmes.

Les problèmes de linéarité peuvent être résolus de diverses façons en passant par des rapports internes ou externes. Les paysans interrogés saisissent la structure complexe de ces problèmes et trouvent une voie inspirée par la recherche du moindre effort opératoire et passant le plus souvent par des rapports internes.

Dans le cas des procédures de décomposition, nous observons que les sujets cherchent à simplifier tant les rapports que les opérations. On voit en effet que, dans toutes les procédures de décomposition, il y avait un rapport non entier et/ou des opérations complexes (avec des opérateurs de plus d'un chiffre, par exemple).

L'utilisation des rapports internes permet de constater que les sujets comprennent et maîtrisent très bien la linéarité, dont une des lois est la conservation des rapport internes entre grandeurs. D'autre part, elle nous renvoie aux questions sur le sens du problème. Si l'on suit le raisonnement oral, on voit que les sujets restent toujours attachés au sens original du problème. On "voit" tout le temps les hectares, les sacs, les kilos, etc. En d'autres termes, même en passant par la décomposition des problèmes, le fait d'établir des rapports internes dans le domaine de grandeurs de départ, permet aux sujets d'arriver à des résultats intermédiaires qui ont du sens et de conserver le sens général du problème d'origine.

Au delà des constatations et conclusions relatives aux procédures particulières répétons que, même s'ils éprouvent des difficultés opératoires, ils n'ont pas de difficultés au niveau de la proportionnalité en tant que structure mathématique complexe. Cela nous semble une constatation très importante pour la formulation des programmes d'enseignement des mathématiques, en particulier ceux orientés vers les adultes des secteurs populaires. Elle met en question les manières traditionnelles de sélectionner les contenus mathématiques et les séquences où on va habituellement des contenus simples aux plus complexes. Mais les définitions de "simple" et "plus complexe" répondent à des analyses internes à la discipline mathématique, qui ne prennent pas en compte les expériences et les acquis des sujets qui vont "subir" ces programmes.

Traditionnellement, on commence par les nombres, ensuite on introduit les opérations, et beaucoup plus tard on arrive à la résolution de problèmes de linéarité.

Dans le cas des paysans, tout au moins de ceux qui ont participé à cette étude, il ne serait pas exclu de travailler, par exemple, l'apprentissage et la formalisation des opérations élémentaires à partir des problèmes de proportionnalité. Ce qui est "le plus complexe" du point de vue d'une analyse strictement mathématique des contenus, n'est pas nécessairement le plus complexe ou le plus mal connu pour les sujets adultes ayant une pratique mathématique quotidienne.

En s'appuyant sur les processus formels dégagés de la pratique quotidienne des paysans, on pourrait tenter, par un enseignement approprié, de les amener, d'une part à résoudre des problèmes plus compliqués que ceux qu'ils savent résoudre aujourd'hui, et d'autre part leur ouvrir un accès aux mathématiques telles qu'on les enseigne dans les écoles.

D'autre part, il nous semble que ces procédures orales décrites et analysées, qui montrent que les individus ont une grande compréhension de la structure sous-jacente aux problèmes, et qui permettent de garder toujours présent à l'esprit le sens du problème, peuvent être fort utiles non seulement dans l'enseignement en dehors de l'école, mais aussi dans des situations scolaires formelles chez les enfants.

En effet habituellement on apprend un seul algorithme. On fait suivre l'écriture des données "d'un calcul routinier qui ne tient pas compte du sens" [Nunés, 1991, p. 120]. On pourrait proposer des situations où les étudiants cherchent, inventent leurs propres chemins variés de résolution, et dans une analyse postérieure chercher des pistes pour la formalisation mathématique.

L'analyse que nous avons faite des procédures de résolution utilisées par les paysans nous a permis de constater, par exemple, le passage privilégié par des rapports internes. De même, on pourrait imaginer qu'une analyse de ce type portant sur les procédures utilisées par les élèves (il faut tout d'abord leur avoir donné la liberté d'essayer, de se tromper...) et réalisée par eux-mêmes sous la direction de l'enseignant, pourrait les conduire à une meilleure compréhension des notions de rapport, rapport interne, rapport externe, etc. En bref, une telle démarche pourrait permettre aux élèves de *construire* quelques notions de base liées à la linéarité.

Faire des mathématiques, nous l'avons déjà remarqué, n'est pas trouver l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode. Il va de soi, cependant, que les procédés variés utilisés par les paysans ne donnent pas un modèle complet et définitif pour l'enseignement des problèmes de la proportionnalité. Et que rien ne pourra remplacer, lorsque les problèmes deviennent plus variés et les données plus complexes, l'acquisition de routines efficaces, dûment justifiées, d'algébrisation et d'algorithmisation.

BIBLIOGRAPHIE

DEPUIS, C. et PLUVINAGE, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2, n° 2, pp. 165-212.

NUNES, T. (1991). "Systèmes alternatifs de connaissances selon différents environnements", *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (eds) : *Après Vygotski et Piaget : Perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentale* (pp. 117-128). Bruxelles : De Boeck Université.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure : des grandeurs au nombres rationnels*, Bruxelles : Didier Hatier.

SOTO, I. (1992). *Mathématiques dans la vie quotidienne de paysans chiliens*, Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain. Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Louvain-la-Neuve.