

MODELISATION GEOMETRIQUE

Modèle de Bézier et modèle B. Spline

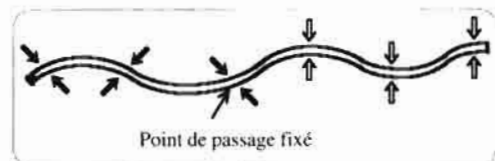
(Deuxième partie)

Jean-Pierre POUGET
Irem Paris Nord

4. 2. Modèle de B. Spline.

Les *splines*, mot d'origine anglaise sont des lattes flexibles de bois ou de métal, utilisées pour fabriquer la forme d'une carène de bateau, ou d'un fuselage d'avion.

Ces lattes prenaient des formes qui ont la propriété de nécessiter le minimum d'énergie pour la déformation de la latte entre les points de passage obligés de cette latte.



Erratum. Un problème technique est à l'origine d'une présentation erronée d'une partie du texte de J.-P. Pouget dans le numéro précédent de *Repères*. Page 111, il fallait lire :

$$\begin{cases} x = f(\eta) = 0 \times (1 - \eta)^3 + 1 \times 3t(1 - \eta)^2 + 2 \times 3t^2(1 - \eta) + 3 \times t^3 \\ y = g(\eta) = 0 \times (1 - \eta)^3 + 0 \times 3t(1 - \eta)^2 + 1 \times 3t^2(1 - \eta) + 0 \times t^3 \end{cases}$$

Nous présentons nos excuses à nos lecteurs.

Par extension, Schoenberg (1940) construit des "splines mathématiques" pour faire du lissage dans des applications mathématiques.

Des splines mathématiques ont été utilisées ensuite par Ferguson (Boeing - 1964), puis une catégorie particulière de spline, appelée *B. Spline* (Basis Spline) a été proposée par De Boor (1972) et a été, pour la première fois utilisée par Riesenfeld dans des applications en CAO (1973). [8,9].

A. Présentation récursive du modèle B. Spline

Les courbes B. Splines sont définies à partir des *fonctions polynomiales B. Splines*.

D'une manière analogue, les courbes de Bézier ont été définies à partir des fonctions polynomiales de Bernstein.

Soient $n+1$ points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$.

Soit le point $M(t)$ défini par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \cdot \vec{OP}_i$$

où les fonctions $N_{0,m}, N_{1,m}, \dots, N_{n,m}$ sont appelées fonctions B. Splines, polynômes de degré m que nous allons définir.

A. 1) Fonctions B. Splines.

Définition

Soit $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ une suite de $k+1$ entiers naturels, telle que cette suite soit croissante ($t_{i-1} \leq t_i$). Ces valeurs sont appelées nœuds et l'élément $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ est appelé un *vecteur nœud*.

- Ces nœuds sont *simples* si tous les t_i sont différents.

- Ils sont *multiples* d'ordre p si par exemple pour t_i , on a :

$$t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+p-1} < t_{i+p}$$

La définition récursive des fonctions B. Splines, donnée par De Boor est :

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

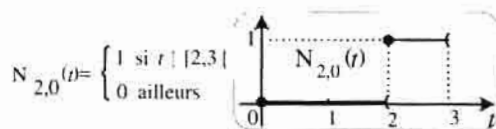
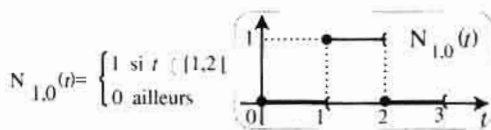
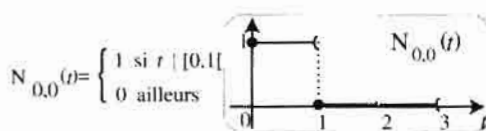
$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} \cdot N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1,m-1}(t)$$

On convient, dans cette définition, que si le numérateur et le dénominateur sont nuls ensemble, alors l'expression $N_{i,m}(t)$ est nulle.

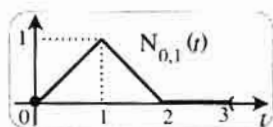
Exemple 1 : Nœud simple.

Soit le vecteur nœud : $(t_0=0, t_1=1, t_2=2, t_3=3)$.

On obtient :



$$N_{0,1}(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \cdot N_{0,0}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot N_{1,0}(t) = t N_{0,0}(t) + (2 - t) N_{1,0}(t)$$

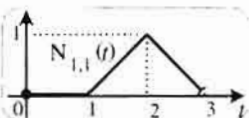


Soit en utilisant l'initialisation de la récursivité :

t	0	1	2	3
$tN_{0,0}(t)$	t	0	0	
$(2-t)N_{1,0}(t)$	0	$(2-t)$	0	
$N_{0,1}(t)$	t	$(2-t)$	0	

De même :

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ t-1 & \text{si } t \in [1,2[\\ 3-t & \text{si } t \in [2,3[\\ 0 & \text{si } t \in [3,4[\end{cases}$$



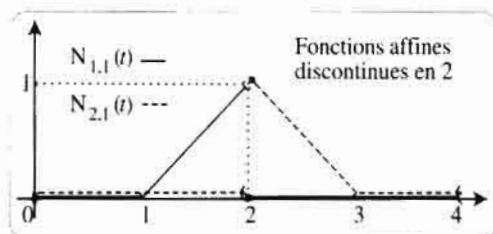
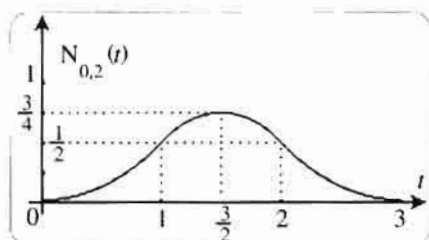
$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } t \in [0,1[\\ \frac{1}{2}(2-t)(3t-2) & \text{si } t \in [1,2[\\ 0 & \text{si } t \in [2,4[\end{cases}$$

$$\text{Et } N_{0,2}(t) = \frac{t}{2} N_{0,1}(t) + \frac{3-t}{2} N_{1,1}(t)$$

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } t \in [0,1[\\ \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2} & \text{si } t \in [1,2[\\ \frac{(3-t)^2}{2} & \text{si } t \in [2,3[\\ 0 & \text{si } t \in [3,4[\end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ (t-1)^2 & \text{si } t \in [1,2[\\ (3-t)^2 & \text{si } t \in [2,3[\\ 0 & \text{si } t \in [3,4[\end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,2[\\ \frac{1}{2}(t-2)(10-3t) & \text{si } t \in [2,3[\\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & \text{si } t \in [3,4[\end{cases}$$



Exemple 2 : Nœud multiple.

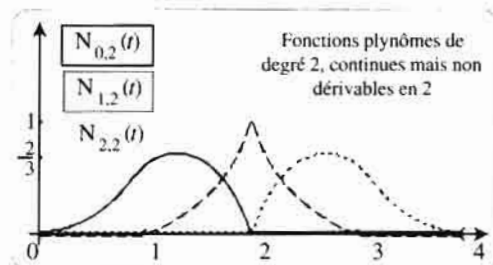
Soit le vecteur nœud :

$$(t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 2, t_4 = 3, t_5 = 4).$$

Les fonctions B. Splines sont alors les suivantes :

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ t-1 & \text{si } t \in [1,2[\\ 0 & \text{si } t \in [2,4[\end{cases}$$

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,2[\\ 3-t & \text{si } t \in [2,3[\\ 0 & \text{si } t \in [3,4[\end{cases}$$



Propriétés

Si dans $[t_i, t_{i+m+1}]$ tous les nœuds sont simples, la fonction $N_{i,m}$ est continûment dérivable jusqu'à l'ordre $m-1$.

Par contre, s'il existe un nœud t_i multiple d'ordre p dans cet intervalle, $N_{i,m}$ est $m \cdot p$ fois continûment dérivable en ce nœud multiple t_i .

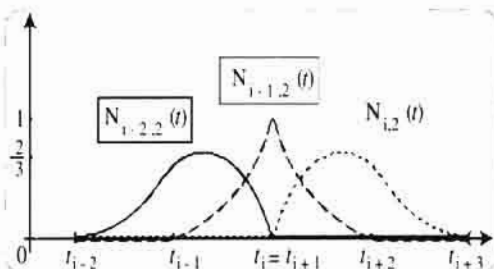
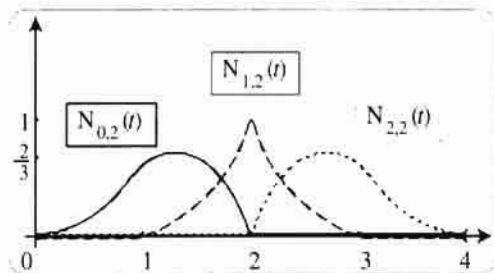
Pour tout t appartenant à $]t_i, t_{i+1}[$ la somme des fonctions B. Splines, pour m fixé, est égale à 1 :

$$\sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) = 1$$

Les formes des courbes représentant les fonctions B. Splines, sont identiques (translation) pour des vecteurs nœuds se déduisant l'un de l'autre par la transformation de la variable t en $t + p$ (où p appartient à \mathbb{N}).

Exemple :

Les vecteurs nœuds $(0, 1, 2, 2, 3, 4)$ et $(t_{i-2}, t_{i-1}, t_i = t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3})$ donnent les mêmes formes de courbes (exemple degré 2).



A. 2) Courbes B. Spline

Définition

Les fonctions B. Splines vont maintenant servir à définir les courbes B. Splines. La nullité des fonctions B. Splines sur \mathbb{R} , sauf sur un intervalle précis va permettre d'agir localement sur la forme de la courbe B. Spline.

Le choix du vecteur nœud (simple, multiple) va permettre d'introduire des éléments de discontinuité agissant sur la forme de la courbe.

On définit une courbe B. Spline à partir de $n+1$ points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ par :

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \cdot \vec{OP}_i$$

Exemple.

Soit $m = 2$. La courbe B. Spline est de degré 2.

On choisit un vecteur nœud où les valeurs extrêmes ont un ordre de multiplicité égal à $m + 1 = 3$;

$$(0, 0, 0, 2, 3, 3, 3)$$

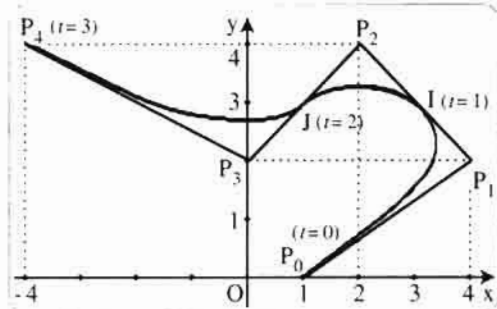
— Les fonctions B. Splines associées sont définies par le tableau (T).

t	0	1	2	3
$N_{0,2}(t)$	$(1-t)^2$	*	0	0
$N_{1,2}(t)$	$\frac{t(4-3t)}{2}$	*	$\frac{(t-2)^2}{2}$	0
$N_{2,2}(t)$	$\frac{t^2}{2}$	*	$-2 \frac{t^2+6t-3}{2}$	$\frac{(t-3)^2}{2}$
$N_{3,2}(t)$	0	*	$\frac{(t-1)^2}{2}$	$\frac{(3-t)(3-5)}{2}$
$N_{4,2}(t)$	0	*	0	$\frac{(t-2)^2}{2}$

Deux remarques :

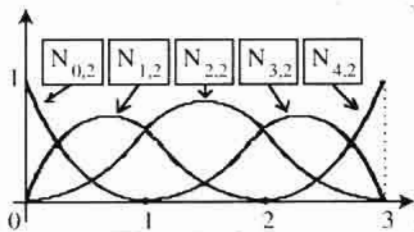
(R1)* Trois fonctions B. Splines ont des valeurs non nulles sur chacun des intervalles. Notez le "glissement" de l'influence en examinant les colonnes du tableau T.

(R2)• Chaque fonction B. Spline a une influence (non nulle) sur des intervalles consécutifs (examiner les lignes du tableau T). Par exemple, $N_{0,2}$ sur $[0,1]$, $N_{1,2}$ sur $[0,1]$ et $[1,2]$ etc.



On note que l'influence **locale** des points de contrôle est due à la double propriété des fonctions B.Splines mise en évidence par les remarques (R1) et (R2).

P_0 agit sur l'arc $P_0 I$, pour t appartenant à $[0,1[$;
 P_1 sur l'arc $P_0 J$, pour t appartenant à $[0,2[$;
 P_2 sur l'arc $P_0 P_1$ pour t appartenant à $[0,3[$;
 et P_4 sur l'arc $J P_1$ pour t appartenant à $[2,3[$.



— Soient les cinq points de contrôles : **n = 4**

$P_0(1,0), P_1(4,2), P_2(2,4), P_3(0,2), P_4(-4,4)$.

Propriétés

La définition de la courbe B. Spline *ne dépend pas de O*

(c'est une conséquence de $\sum_{k=0}^n N_{k,m}(t) = 1$) .

— La courbe B. Spline est définie par

$$\sum_{i=0}^4 N_{i,2}(t) \cdot \vec{OP}_i$$

Les courbes B. Splines *ne passent pas*, sauf pour des vecteurs nœuds particuliers, par P_0 et P_n .

— Cependant, souvent on souhaite faire une *jonction* entre un point de départ P_0 et un point d'arrivée P_n . Si de plus, on souhaite conserver une propriété de *tangence* analogue à celle existant sur le modèle de Bézier ($(P_0 P_1)$ tangente en P_0 et $(P_{n-1} P_n)$ tangente en P_n), ceci est possible en choisissant *des ordres de multiplicité égaux à m+1 pour les nœuds extrêmes*.

t	0	1	2	3
x = f(t)	$-4t^2+6t+1$	$-2t+5$	$-3t^2+10t-7$	
y = f(t)	$-t^2+4t$	$-2t^2+6t-1$	$3t^2-14t+19$	

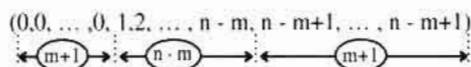
Exemple.

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \cdot \vec{OP}_i$$

Si l'on prend les $n+1$ fonctions B. Splines bâties à partir du vecteur nœud

$$(t_0 = t_1 = \dots = t_m, t_{m+1}, \dots, t_n, t_{n+1} = \dots = t_{n+m+1})$$

ou du vecteur nœud particulier

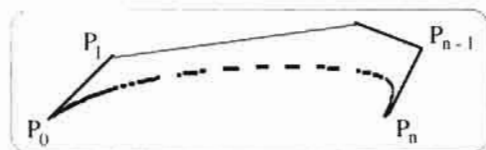


$N_{0,m}$ est non nulle sur $[t_0, t_{m+1}[$, nulle ailleurs ;

$N_{1,m}$ est non nulle sur $[t_1, t_{m+2}[$, nulle ailleurs ;

•
•
•

$N_{n,m}$ est non nulle sur $[t_n, t_{n+m+1}[$, nulle ailleurs.



Lien avec le modèle de Bézier

En reprenant l'exemple précédent avec $m = n$, les fonctions B. Splines deviennent alors les polynômes de Bernstein.

Exemple.

Le vecteur nœud $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$ conduit à :

$$N_{0,2}(t) = B_{0,2}(t) = (1-t)^2$$

$$N_{1,2}(t) = B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$$

$$N_{2,2}(t) = B_{2,2}(t) = t^2$$

La courbe B. Spline est alors une courbe de Bézier.

Un algorithme défini par une suite (Algorithme de Cox et de De Boor), analogue à celui vu sur le modèle de Bézier, fournit un moyen géométrique et un moyen numérique de détermination des points d'une courbe B. Spline.

Les fonctions t et $1-t$ sont remplacées par des fonctions, plus élaborées, dépendant de l'intervalle ; l'interprétation barycentrique est conservée.

En introduisant

$$u_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i}$$

la définition récursive des fonctions B. Splines devient :

$$N_{i,m}(t) = u_{i,m}(t) \cdot N_{i,m-1}(t) + (1 - u_{i+1,m}(t)) \cdot N_{i+1,m-1}(t) \quad \textcircled{1}$$

Cette suite définit l'algorithme de Cox et De Boor, que nous n'expliciterons que dans le cas $m = 2$, à titre d'exemple [3].

Exemple. $m = 2$.

La courbe B. Spline est définie par

$$\vec{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot \vec{OP}_i^0$$

en notant $P_0^0, P_1^0, \dots, P_n^0$ les $n+1$ points de contrôle.

Pour t appartenant à $[t_i, t_{i+1}[$, en utilisant $\textcircled{1}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= N_{i-2,2}(t) \vec{OP}_{i-2}^0 \\ &\quad + N_{i-1,2}(t) \vec{OP}_{i-1}^0 + N_{i,2}(t) \vec{OP}_i^0 \\ &= N_{i-1,1}(t) (u_{i-1,2}(t) \vec{OP}_{i-1}^0 + (1-u_{i-1,2}(t)) \vec{OP}_{i-2}^0) \\ &\quad + N_{i,1}(t) (u_{i,2}(t) \vec{OP}_i^0 + (1-u_{i,2}(t)) \vec{OP}_{i-1}^0) \end{aligned}$$

Définissons deux points intermédiaires :

P_{i-1}^1 barycentre de P_{i-1}^0 ($u_{i-1,2}(t)$) et

P_{i-2}^0 ($1-u_{i-1,2}(t)$)

et de même P_i^1

$$\vec{OM}(t) = N_{i-1,1}(t) \vec{OP}_{i-1}^1 + N_{i,1}(t) \vec{OP}_i^1$$

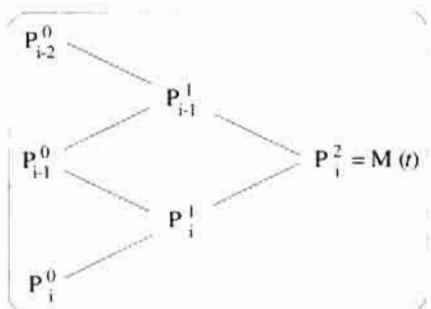
En itérant ce processus (utilisation de ①) et en calculant l'initialisation de la récursivité, $N_{i-1,0}(t) = N_{i+1,0}(t) = 0$ et $N_{i,0}(t) = 1$, on obtient finalement M noté P_i^2 .

$$\vec{OM}(t) = \vec{OP}_i^2 = u_{i,1}(t) \vec{OP}_i^1 + (1-u_{i,1}(t)) \vec{OP}_{i-1}^1$$

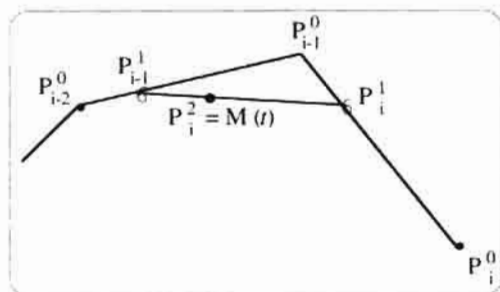
M est le barycentre de P_i^1 ($u_{i,1}(t)$)

et P_{i-1}^0 ($1-u_{i,1}(t)$).

L'algorithme est représenté par le graphe suivant :



L'exploitation barycentrique donne une construction de la B. Spline.

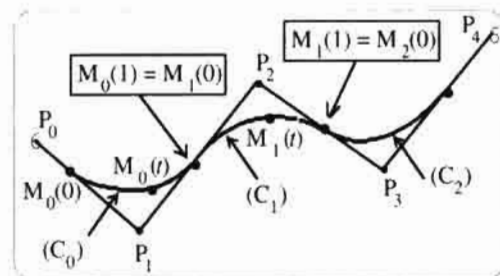


Pour la généralisation, voir [3] page 98.

Un exemple particulier de courbes B. Splines (contraintes)

D'une manière analogue au modèle de Bézier, il est possible de définir un modèle de courbe B. Spline à partir de **contraintes**.

Examinons, avant de généraliser, le cas de courbes de degré 2 :



Soient $n+1$ points P_0, P_1, \dots, P_n .

On définit une succession de $n - 1$ arcs de courbes C_0, C_1, \dots, C_{n-1} par :

$$\vec{OM}_k(t) = \sum_{i=0}^2 R_{i,2}(t) \cdot \vec{OP}_{k+i}$$

où $0 \leq k \leq n-2$ et où $R_{i,2}(t)$ est un polynôme de degré 2 (polynôme de Riesenfeld).

Ainsi P_0, P_1, P_2 permettent de définir (C_0) :

$$\begin{aligned} \vec{OM}_0(t) = & R_{i,0}(t) \vec{OP}_0 + R_{i,1}(t) \vec{OP}_1 \\ & + R_{i,2}(t) \vec{OP}_2 \end{aligned}$$

Ensuite on glisse d'un cran :

l'arc (C_1) est défini à partir de P_1, P_2, P_3 et (C_k) est défini par P_k, P_{k+1}, P_{k+2} .

On impose des contraintes permettant de raccorder les arcs le mieux possible, et d'assurer la définition indépendante de O :

$$\sum_{i=0}^2 R_{i,2}(t) = 1 \text{ pour tout } t \text{ de } [0,1]$$

Quels que soient les points de référence et quel que soit k de $[0, n-1]$

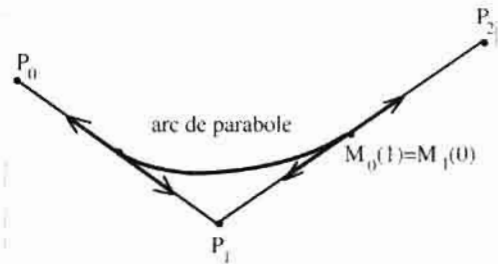
$$\vec{OM}_k(1) = \vec{OM}_{k+1} \quad (C : \text{raccord continu})$$

$$\vec{OM}'_k(1) = \vec{OM}'_{k+1} \quad (t : \text{conservation de la tangente au point de raccord.})$$

Le modèle est alors :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) = & \left(\frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2}\right) \vec{OP}_k + \left(\frac{1}{2} + t - t^2\right) \vec{OP}_{k+1} \\ & + \frac{t^2}{2} \vec{OP}_{k+2} \end{aligned}$$

On raccorde ainsi des arcs de parabole possédant de plus la propriété géométrique : $M_0(0)$ est milieu de $[P_0, P_1]$; $(P_0 P_1)$ est tangente à (C_0) en $M_0(0)$ (cette propriété s'étend à l'arc suivant).



On généralise cet exemple :

$$\vec{OM}_k(t) = \sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) \cdot \vec{OP}_{k+i}$$

$R_{i,m}(t)$ sont des polynômes de Riesenfeld de degré m vérifiant les contraintes :

$$\sum_{i=0}^m R_{i,m}(t) = 1 \text{ pour tout } t \text{ de } [0,1]$$

Pour tout k de \mathbb{N} tel que k appartienne à $[0, m-1]$ et tout k de \mathbb{N} tel que k appartienne à $[0, n-1]$:

$$\vec{OM}_k^{(n)}(1) = \vec{OM}_{k+1}^{(n)}(0)$$

Chaque arc est défini par $m+1$ points pris dans la suite des $n+1$ points de définition, en glissant d'un cran à chaque fois.

Les polynômes de Riesenfeld sont donnés par la formule :

$$R_{i,m}(t) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \frac{t^i (t+m-i-j)^m}{j! (m-j+1)}$$

On démontre [3] que, par exemple dans le cas $m=2$, le vecteur nœud définissant les fonctions B. Splines égales aux polynômes de Riesenfeld est constituée des entiers successifs

$$t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3} \dots$$

5. Une synthèse sur les modèles

On peut mettre en exergue quelques idées-force sur les modélisations qui viennent d'être présentées.

Local / Global

Le modèle de Bézier est un modèle global. Si on agit sur les éléments de paramétrage du modèle, toute la forme est modifiée.

Le modèle B. Spline est un modèle local. Par action sur le paramétrage, seule une partie de la forme est modifiée.

Cependant, il est possible de rendre le modèle de Bézier local, en utilisant des arcs de Bézier jointifs.

Capacité de paramétrage

La richesse du paramétrage de ces modèles a fait le succès de ces modèles, car on peut facilement modifier les formes.

Pour le modèle de Bézier, le paramétrage est celui du nombre de points de contrôle, lié au degré de la courbe, et celui de la position des points de contrôle.

Pour le modèle B. Spline, trois niveaux de paramétrage sont accessibles : choix du vecteur nœud, choix du degré des fonctions B. Splines, choix du nombre et de la position des points de contrôle.

Complexité

Les modèles de Bézier, B. Splines, NURBS sont en complexité ascendante. Cependant, pour de nombreux cas d'utilisation, cette montée en complexité n'est pas nécessaire. Par exemple, l'utilisation

de cubiques de Bézier, ou de cubiques B. Splines convient dans une grande majorité d'applications (il est inutile d'augmenter le degré).

Antagonisme des critères de choix et des modèles

L'utilisation des différents paramètres conduit souvent à des oppositions entre les effets recherchés sur la forme de la courbe. Précisons cette idée en donnant un exemple :

Les effets recherchés sont le raccord le meilleur possible entre deux arcs successifs, et la localisation la plus restreinte possible de la déformation de la courbe.

- Dans le modèle de Riesenfeld, si on augmente le degré, on augmente aussi le nombre de points de contrôle servant à la définition d'un arc ; on diminue donc la finesse de la localisation.

- Par contre, si on augmente le degré, on rend meilleure les conditions de raccord des arcs, en augmentant le nombre d'égalités entre les dérivées vectorielles successives, au point de raccord.

Antagonisme du raccord et de la localisation : "on ne peut gagner sur tous les tableaux !".

Lien entre ces modèles

Le modèle de Bézier est une B. Spline particulière. Les B. Spline sont, elles-mêmes, un cas particulier de NURBS.

Ces liens assurent d'un modèle à l'autre le maintien d'une analogie forte dans les propriétés.

6. Autres modèles

On trouve en modélisation géométrique de nombreux modèles, comme par exemple celui des Bêta-Splines [10].

Des modèles polynomiaux (Bézier, B. Spline) on passe aux *fractions rationnelles*.

Par ailleurs, on peut aussi resserrer ou écarter les nœuds en prenant des vecteurs nœuds non uniformes. Le modèle NURBS [11,12] est ainsi un modèle basé sur des fractions rationnelles, analogue au modèle B. Spline et avec des vecteurs nœuds *non uniformes*.

Dans le modèle NURBS, les coordonnées des points de contrôle sont les *coordonnées homogènes* :

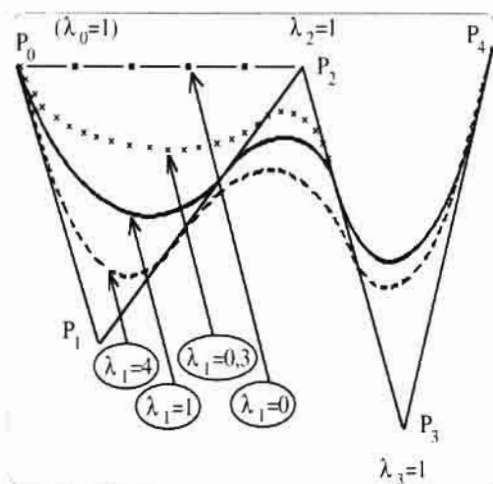
$\vec{OP}_i (\lambda_i x_i, \lambda_i y_i, \lambda_i z_i, \lambda_i)$ où λ_i appartient à \mathbb{R} et M est défini par :

$$\vec{OM}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_i(t) \lambda_i \vec{OP}_i}{\sum_{i=0}^n N_i(t) \lambda_i}$$

Un *degré de paramétrage supplémentaire* est introduit grâce aux nombres réels λ_i qui peuvent être choisis de manière à donner un poids plus ou moins fort pour certains points de contrôle.

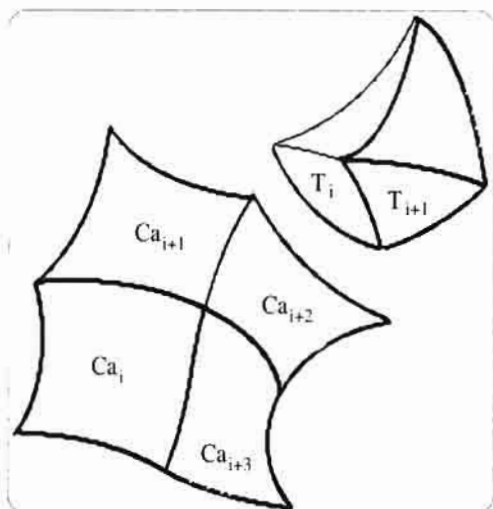
Exemple (figure suivante) [11] (jeu sur λ_1 , au point P_1).

Une *propriété* intéressante du modèle NURBS est de donner une modélisation *exacte* pour le *cercle* et les *coniques* ; les modèles polynomiaux de Bézier et B. Spline ne donnaient que des approximations de ces courbes.



7. Modélisation des surfaces

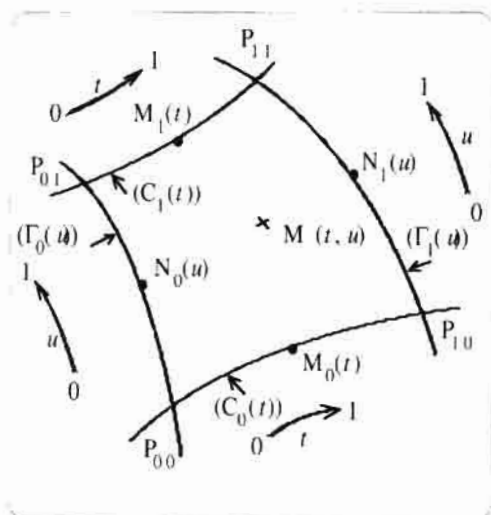
La modélisation des surfaces est faite le plus souvent par la définition de *carreaux* jointifs, limités par des courbes frontières. Dans certains modèles, on utilise aussi des *triangles* jointifs.



On distingue deux classes de modèles :

- Un premier modèle (COONS) définit les carreaux à partir de la définition des courbes frontières (7.1).
- Un deuxième modèle définit les points du carreau avec deux paramètres (7.2).

7.1. *Modèle de COONS* [13]



Un point $M(t,u)$ du carreau de Coons est défini à partir de la donnée :

des quatre points, coins du carreau

$$P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$$

- des courbes frontières

$$(C_0(t)), (C_1(t)), (\Gamma_0(u)), (\Gamma_1(u))$$

définissant en coordonnées paramétriques les points

$$M_0(t), M_1(t), N_0(u), N_1(u)$$

- de deux fonctions d'assemblage f et g telles que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 ; f(1) = 0 \\ g(0) &= 0 ; g(1) = 1 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [0,1] : f(x) &= g(1-x) \end{aligned}$$

par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t,u) &= f(u) \cdot \vec{OM}_0(t) + g(u) \cdot \vec{OM}_1(t) \\ &+ f(t) \cdot \vec{ON}_0(u) + g(t) \cdot \vec{ON}_1(u) \\ &- f(t) \cdot f(u) \cdot \vec{OP}_{00} - f(t) \cdot g(u) \cdot \vec{OP}_{01} \\ &- g(t) \cdot f(u) \cdot \vec{OP}_{10} - g(t) \cdot g(u) \cdot \vec{OP}_{11} \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(0,0) &= \vec{OP}_{00} ; \vec{OM}(0,1) = \vec{OP}_{01} \\ \vec{OM}(1,0) &= \vec{OP}_{10} ; \vec{OM}(1,1) = \vec{OP}_{11} \end{aligned}$$

et les courbes frontières sont décrites par un paramètre valant 0 ou 1, l'autre variant dans $[0,1]$. La forme de la surface est travaillée grâce au choix des fonctions d'assemblage qui agissent sur l'assemblage des carreaux. Les plus simples sont :

$$x \longmapsto f(x) = 1 - x ; x \longmapsto g(x) = x$$

En prenant des fonctions d'assemblage cubiques, comme par exemple celles définies par

$$f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3 \text{ et } g(x) = 3x^2 - 2x^3$$

on réalise une jonction "lisse" de deux carreaux, par le maintien de la continuité pour un vecteur normal aux deux carreaux le long de leur frontière commune.

7.2. Modèle avec définition paramétrique de la surface

Les modèles les plus utilisés sont des extensions à l'espace des modèles planaires de Bézier, ou B. Spline.

La forme du carreau est pilotée par le choix des points de contrôle et du degré (modèle de Bézier), et par le choix supplémentaire du vecteur nœud (modèle B. Spline).

— Un carreau de Bézier est défini pour t et u appartenant à $[0,1]$ par :

$$\vec{OM}(t,u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i t^i (1-t)^{m-i} C_n^j u^j (1-u)^{n-j} \vec{OP}_{ij}$$

Les points P_{ij} sont les points de contrôle.

— Un triangle de Bézier est défini par :

$$\vec{OM}(t,u) = \sum_{i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} t^i u^j (1-t-u)^{n-i-j} \vec{OP}_{ij}$$

où $t+u \leq 1$, $t \geq 0$, $u \geq 0$.

Un carreau B. Spline est défini par :

$$\vec{OM}(t,u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{ik}(t) \cdot N_{jl}(u) \cdot \vec{OP}_{ij}$$

où N_{ik} , N_{jl} sont des fonctions B. Splines.

8. Sur l'introduction d'une nouvelle notion

La formation relative à la modélisation géométrique est faite dans les disciplines où elle s'applique (mécanique, conception, informatique...) pour les techniciens et ingénieurs. Elle est surtout orientée "utilisateur".

Une action spécifique a été conduite au niveau technicien supérieur dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Elle a suivi une démarche, dont nous donnons les principales étapes :

- Elaboration d'un module de programme relatif à la modélisation géométrique, intégré dans le référentiel de mathématiques des sections de techniciens supérieurs.
- Formation des professeurs concernés.
- Sensibilisation et identification du domaine pour des professeurs de l'enseignement secondaire.
- Formation des inspecteurs pédagogiques régionaux.
- Proposition de sujets d'examen sur ce domaine (BTS informatique industrielle 85, 88, 90, 92, 93)
- Elaboration de document de formation adapté pour les professeurs [3].

Ainsi l'introduction de cette nouvelle notion dans le cadre d'une formation précise (techniciens supérieurs) s'est échelonnée à partir de 1985.

La démarche suivie montre combien est souhaitable d'accompagner l'introduction d'une partie nouvelle par des efforts d'informations et de formations.

En particulier les efforts de recherches pédagogiques portent surtout sur le transfert vers le domaine de l'enseignement, de modèles dédiés par leurs concepteurs à un autre domaine, celui de l'industrie et de la technique.

Ce transfert est d'autant plus difficile, lorsqu'on souhaite être en phase avec l'émergence d'un nouveau domaine. Ceci implique un travail de défrichage, de sélection de sources, conduisant à cette opération de transfert. Cette tâche très gratifiante s'inscrit bien dans la mission des IREM. De toute

évidence, le domaine de la modélisation géométrique n'est pas le seul à poser ce problème de transfert, pour des professeurs, enseignant en classes de techniciens supérieurs, attentifs aux liens entre mathématiques et disciplines applicatives scientifiques ou techniques ; citons d'autres domaines : la statistique inférentielle, la transformation de Laplace, les séries de Fourier, la fiabilité, l'analyse de données, etc.

Conclusion

Le domaine de la modélisation géométrique est *plus vaste* que le domaine de la *modélisation des formes*. Il contient aussi la modélisation relative à la *représentation* de formes à trois dimensions dans un plan à deux dimensions (différentiation de l'objet et de son image).

Les problèmes de perspective, de visualisation de déplacements, de vues cachées, d'intersection en liaison avec leurs solutions sur des systèmes informatiques, font aussi partie de la modélisation géométrique.

Ainsi on prend la suite de Pierro Della Francesca et de Vitruve, avec d'autres outils ! [18, Chap. 9]

En robotique, une modélisation particulière à base de matrices (4×4) permet la modélisation géométrique des trajectoires des bras manipulateurs.

Les modèles présentés dans ce document ne sont pas capables de modéliser toutes les formes : ils sont bien adaptés pour la modélisation de carrosserie, de fuselage, de carène, d'objets de tous les jours, comme une brosse à dents. Par contre, ils sont dans l'incapacité de modéliser des formes chaotiques, erratiques, soumises à des aléas. D'autres modèles viennent alors prendre le relais, comme celui de la

géométrie fractale où l'on modélise notamment des motifs récurrents vers l'infiniment petit ou vers l'infiniment grand [15, 16].

L'activité de modélisation donne aux mathématiciens l'opportunité d'exercer ses talents. Cependant, en retour, une éternelle question vient de la réalité qu'on souhaite modéliser : est-ce un bon modèle ?

Cette question renvoie toujours à l'ouvrage pour créer une meilleure modélisation. Elle amène le mathématicien dans un comportement proche de celui du physicien qui confronte expérimentation et modèle théorique.

L'ordinateur a remplacé le compas et la règle [18]. Le savoir géométrique des bâtisseurs de cathédrales, des peintres, des architectes, issu de l'antiquité [17], s'est enrichi d'autres savoirs. De nouveaux modèles, de nouveaux outils sont maintenant à notre disposition pour créer des formes plus complexes et plus élaborées que les formes ancestrales à base de triangles, de rectangles et de cercles. Saurons nous utiliser ces modèles pour créer des formes harmonieuses, face à des contraintes issues de la physique, de la technique et de l'économie ?

Une plus grande capacité dans la création de formes complexes, un plus grand pouvoir dans la création devraient nous amener à de plus grandes réflexions.

Une fois de plus, espérons que l'homme sera capable de maîtriser et l'outil, et l'objet créé par cet outil.

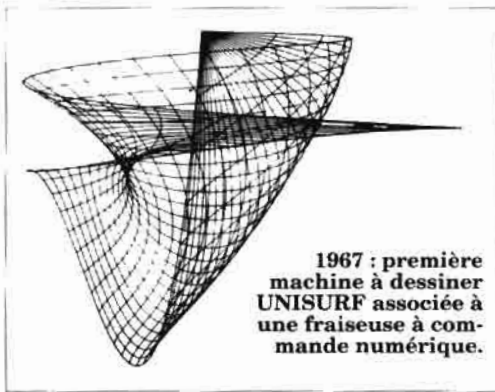
Je remercie Daniel Vernet pour sa contribution sur la CAO chez Renault, Jean-Claude Duperret (IREM de Reims) pour la qualité de ses remarques, Bernard Bigot (IREM de Reims) pour l'édition attentive de cet article.

ANNEXE : Modélisation géométrique chez Renault

Pour illustrer cet article et donner une connexion avec l'utilisation de ces modèles, il a semblé opportun de demander à Daniel Vernet une contribution sur l'introduction et l'évolution de la CAO, l'utilisation de modèles mathématiques, l'emploi de logiciels informatiques, chez Renault.

La CAO, outil stratégique des constructeurs d'automobiles

La CAO, lien entre l'idée du concepteur et la fabrication du produit, est l'un des plus puissants instruments permettant l'évolution du Process et la culture technique.



1967 : première machine à dessiner UNISURF associée à une fraiseuse à commande numérique.

La maturité de cette technique a fait sa preuve dans le fait qu'aujourd'hui les utilisateurs se préoccupent beaucoup plus de problèmes de gestion de données et de leurs échanges avec les différents partenaires plutôt que de souhaiter des nouvelles versions sophistiquées, entraînant des formations longues et coûteuses ainsi qu'une mise en service déstabilisante.

La CFAO, outil stratégique

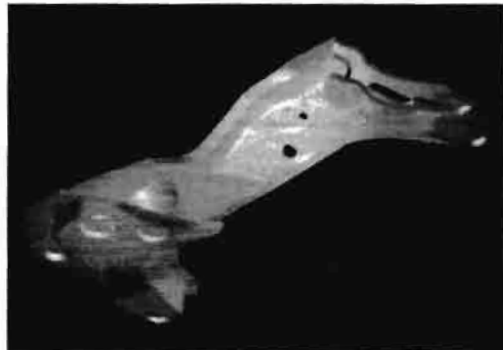
Il n'est plus nécessaire de prouver que la CFAO est un outil stratégique, mais il est bon de rappeler quand même quelques aspects fondamentaux.

Il ne serait plus possible aujourd'hui de concevoir un véhicule comme on le faisait du temps de la R 16, pour ne pas remonter jusqu'à la DS ou la 4 CV, véhicules ayant marqué leurs époques.

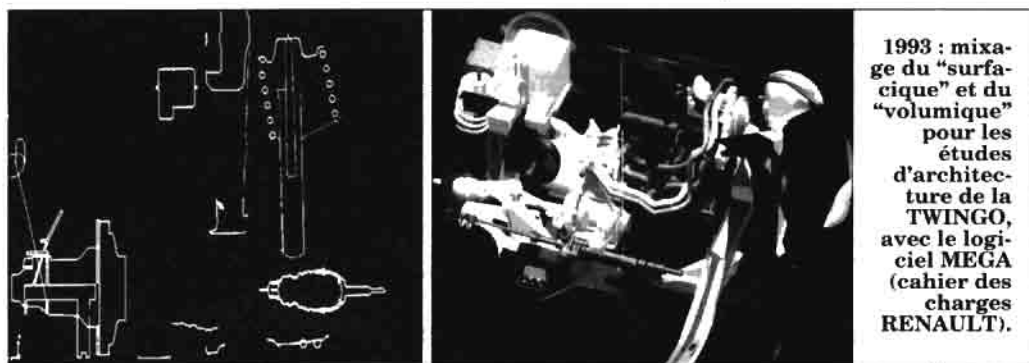
L'âge mûr

Un quart de siècle déjà depuis que la CFAO a fait ses premiers pas chez les constructeurs français d'automobiles ! Cela représente au moins trois générations de logiciels, dont le mode de relation avec l'utilisateur passa progressivement du batch au conversationnel puis à l'interactif.

Il y a, dans cette évolution, un fil conducteur : les courbes et surfaces paramétriques permettant d'obtenir des formes complexes allant de l'activité mécanique à celle de la réalisation de formes esthétiques.



1987 : utilisation intensive de la couleur et des rendus réalistes.



1993 : mixage du "surfacique" et du "volumique" pour les études d'architecture de la TWINGO, avec le logiciel MEGA (cahier des charges RENAULT).

En effet, les normes de sécurité actives et passives, la concurrence, les délais, la qualité, les coûts, nous ont obligé à révolutionner notre process de conception et de fabrication.

Un grand nombre de constructions sont maintenant devenues impossibles à réaliser à la main, même hors délais : feuillure, zones étanchéité, jeux d'aspect, packaging, cinématiques...

Dans ce process, la CAO a une part capitale, les données servant de référence indis-

cutable, inaltérable et transmissible.

Cela ne signifie pas pour autant que la CAO, en tant qu'outil, soit arrivé à son efficacité optimale, nous en sommes encore loin : il y a encore beaucoup à faire pour améliorer les performances globales afin de diminuer les délais, les coûts et augmenter la qualité (QCD), mais il est indispensable.

Les illustrations présentées ici, ponctuent les évolutions capitales de la CAO chez RENAULT.

BIBLIOGRAPHIE

Modélisation géométrique

- [1] *Geometric Modeling*, Mortenson J. Whiley, 1985.
- [2] *A survey of curve and surface methods in GAGD*. Boehm - Farin - Kahman, GAGD, Vol. 1, N° 1, North Holland 1985.
- [3] *Modélisation géométrique : une introduction aux courbes de Bézier et B. Spline*, Pannier - Pouget, Préface de P. Bézier, IREM Paris Nord, 2^e édition, 1993.

Modèle de Bézier

- [4] *Mathematical and practical possibilities of UNISURF*, P. Bézier, CAD, Academic Press, 1973.

- [5] *Essai de définition numérique de courbes et surfaces expérimentales*, P. Bézier, Thèse, Paris VI, 1977.
- [6] *Courbes et surfaces*, P. Bézier, Tome 4, Hermès, 1987.
- [7] *Contribution à l'étude des surfaces numériques UNISURF*, M. Véron, Thèse, Nancy, 1973.

Modèle B. Splines et Splines

- [8] *A practical guide to Splines*, C. de Boor, Springer - Verlag, 1978.
- [9] *Applications of B. Spline approximation to geometric problems of computer aided design*, R. Riesenfeld, Thèse, Syracuse, 1973.
- [10] *B. Splines*, Bartels - Beaty - Barsky, Hermès, 1988.

B. Splines rationnelles

- [11] *Rational B. Splines for curve and surface representation*, W. Tiller, IEEE Computer graphic, Vol. 3, N° 6, 1983.
- [12] *Computer aided design applications of the rational B. Spline approximation*, Versprille, Thèse, Syracuse, 1975.

Modèle de Coons

- [13] *Surface patches and B. Spline curve* Coons, CAD, Academic Press, 1973.

CAO

- [14] *Modélisation et construction de surfaces pour la CAO*, J.C. Léon, Hermès, 1991.

Fractals

- [15] "Fractals", G. Noel, *Maths et Pédagogie*, N° 77, 1990.
- [16] *Fractals* G. Cherbit, Masson, 1987.

Histoire

- [17] "L'art des bâtisseurs romans", *Boscodon*, Cahier n° 4, Boscodon, 1992.
- [18] *Histoire de problèmes - Histoire des mathématiques*, (Chapitre 9) : "Mais où est donc passée la troisième dimension ?", D. Bessot - J.P. Le Goff, IREM, Ellipses, 1993.