# DE LA REPRODUCTION EXPONENTIELLE AU LOGARITHME NEPERIEN

Hugues REZARD

Irem de Lille

A la lecture des programmes le mode d'introduction des fonctions *ln* et *exp* n'est pas imposé. La plupart des livres définissent le logarithme népérien par

$$ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

et l'exponentielle comme la fonction réciproque du logarithme.

On peut justifier une telle définition de deux façons, l'une s'appuyant sur l'analyse, l'autre étant purement algébrique.

Si l'on admet le théorème qui énonce que toute fonction $f$ continue sur un intervalle I admet des primitives (ce qui est raisonnable dans un cours de terminale), on montre qu'il n'en existe qu'une seule $F$ vérifiant $F(x_0) = y_0$ pour un $x_0$ élément de I et un $y_0$ réel et alors la fonction $1/x$ admet une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x_0 = 1$, ce qui justifie l'introduction citée ci-dessus. L'existence de l'exponentielle résulte alors de l'existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle. Si cette introduction paraît raisonnable du point de vue de l'analyse, elle ne met pas en valeur la problématique propre du logarithme et de l'exponentielle, c'est-à-dire la relation entre addition et multiplication ; elle se situe plus dans une problématique de recherche de primitive des fractions rationnelles, une fois observé le fait que la fonction $1/x$ ne peut être la dérivée d'une fraction rationnelle (sur $\boldsymbol{R}^{*}$- la fonction $x^{n-1}$, avec n élément de $\boldsymbol{Z}$ admet pour primitive $x^n/x$ , sauf si $n = 0$ !).

C'est ce problème de recherche des primitives qui est à l'origine du second mode d'introduction indiqué ci-dessus, à savoir l'introduction formelle d'une primitive de $1/x$; cette conception qui relève d'un point de vue galoisien ne saurait être enseignée à un niveau élémentaire, la notion d'adjonction de solutions formelles étant trop difficile, même si le calcul des primitives, en tant que calcul formel, relève d'une telle théorie.

Le mode d'introduction que nous présentons se situe dans une problématique de calcul, à savoir, comme nous l'avons dit, la relation entre addition et multiplication. Si cette introduction qui prenait sa pleine valeur à l'époque de la règle à calcul semble bien éloigné de l'usage des calculatrices, elle garde son intérêt dans la mesure où elle met l'accent autant sur une pratique de calcul qui a joué un rôle important dans l'histoire des mathématiques comme nous le rappelons ci-dessous que sur une propriété théorique de l'ensemble des nombres réels, à savoir l'isomorphisme du groupe additif des réels sur le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs.

$$\varphi : (\boldsymbol{R}, +) \rightarrow (\boldsymbol{R}^{*+}, \times)$$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$$

Certains auteurs de livres scolaires en travaux pratiques d'approche font rechercher les fonctions $f : \boldsymbol{R}^{*+} \rightarrow \boldsymbol{R}$ telles que

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

$x = y = 1$ nous donne $f(1) = 2f(1)$
d'où $f(1) = 0$.

Si $x$ est fixé et $g(y) = f(xy)$
alors $g'(y) = x f'(xy)$

or $g(y) = f(x) + f(y)$
donc $g'(y) = f'(y)$

on obtient $x f'(xy) = f'(y)$.

Pour $y = 1 : f'(x) = f'(1) \times \dfrac{1}{x}$

et $f(1) = 0 \qquad (2)$

En conclusion, si $f$ existe (2) est vérifié et réciproquement on a (1), mais l'existence d'une primitive de $1/x$ n'est pas prouvée contrairement à ce que des élèves risquent de croire.

Dans cet article, je rappelle brièvement l'histoire des logarithmes afin de donner des réponses aux questions soulevées par les élèves (cette découverte : quand ? comment ? pourquoi ? par qui ?) et de justifier l'introduction des logarithmes que je propose.

Je décris une expérience pédagogique réalisée plusieurs fois en TC avec mes élèves. C'est une démarche heuristique qui consiste à mathématiser un phénomène naturel et qui leur permet de mieux saisir la notion de continuité et le concept de nombre réel. De plus, ils ont utilisé les calculettes comme outils efficaces et... indispensables à la réalisation de notre objectif.

## I. - Quelques rappels historiques

1) John Napier (1550-1617) qui est un contemporain de Kepler (1571-1630) a voulu réaliser plus rapidement des calculs numériques longs et pénibles. L'astronomie qui est en plein essor doit réaliser plus promptement la multiplication et la division des "grands nombres" [1].

***Exemple***

On mesure la distance $AB$ et les angles $A$ et $B$ par visées :

On trouve $AC = AB \times \dfrac{\sin B}{\sin(180° - A - B)}$

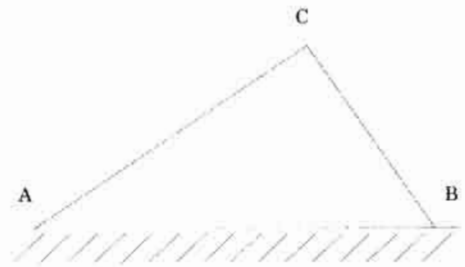


**Fig. 1**

Napier qui a été francisé en Néper, a observé que

$$2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

c'est-à-dire qu'un produit pouvait être obtenu à l'aide d'une différence.

A l'aide de bâtonnets, il abrège les calculs et permet de ne faire que des additions pour calculer un produit :

A titre d'exemple, effectuons la multiplication 2 085 x 543 au moyen de ces réglettes.
Choisissions quatre réglettes dont la première ligne comprend respectivement les nombres 2, 0, 8, 5 et une cinquième réglette qui marque les unités de 1 à 9. La multiplication procède comme suit : additionner tous les termes sur la 3e rangée, en effectuant les sommes suivant les diagonales. D'où le résultat
6 + 0, 0 + 2, 4 + 1, 5

donc :3 × 2 085 = 6 255.

De façon similaire, les rangées 4 et 5 donnent 8 340 et 10 425 et on a :

$4 \times 2\,085 = 8\,340$
$5 \times 2\,085 = 10\,425$ .

Il suffit maintenant d'effectuer l'addition des trois produits partiels en tenant compte de la position des produits. Ainsi le résultat final sera :

| 1re | 2e | 3e | 4e | 5e |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 8 | 5 | 1 |
| /4 | 0/0 | 1/6 | 1/0 | 2 |
| /6 | 0/0 | 2/4 | 1/5 | 3 |
| /8 | 0/0 | 3/2 | 2/0 | 4 |
| 1/0 | 0/0 | 4/0 | 2/5 | 5 |
| 1/2 | 0/0 | 4/8 | 3/0 | 6 |
| 1/4 | 0/0 | 5/6 | 3/5 | 7 |
| 1/6 | 0/0 | 6/4 | 4/0 | 8 |
| 1/8 | 0/0 | 7/2 | 4/5 | 9 |

6 255
83 40
1 042 5

1 132 155

**Fig. 2**

page 191 — *Histoire des Mathématiques*
J.-P. Collette Tome 1 [10]

2) C'est en 1614, après vingt ans de travail, que Néper publie son traité intitulé "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" dans lequel il expose son système de logarithme. Un autre traité sera publié en 1619.

Néper a calculé une table de logarithme de *sinx* où *x* varie de minute en minute de 0°

à 90°. Le sinus suivant l'usage de l'époque est compris entre $0$ et $10^7$ (cercle de rayon $R = 10^7$).

La table ne donne en fait que les résultats pour x compris entre 30° et 90° , il est nécessaire d'utiliser la formule

$$\sin 2a = 2 \sin a \,.\, \sin (90 - a)$$

pour les plus petites mesures de x. Exemple :

pour $a = 20$ , $\sin 20 = \dfrac{\sin 40}{2 \sin 70}$ [9].

3) Les deux considérations qui ont conduit Néper à créer ses logarithmes sont :

— les relations qui existent entre les progressions géométriques et arithmétiques,
— et la cinématique

3a — La première considération n'est pas nouvelle puisqu'en 1484, en comparant une progression géométrique avec la suite des entiers naturels

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & c^5 & c^6 & \ldots & cn \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \end{array}$$

Chuquet a énoncé "Le produit de deux nombres de la première suite figure dans cette suite et a pour associé, dans la deuxième suite, la somme des associés des deux nombres de départ".
Plus généralement

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & \ldots & cn \\ 0 & p & 2p & 3p & 4p & \ldots & np \end{array}$$

Stifel en 1544 a étendu cette propriété aux exposants fractionnaires et aux exposants négatifs.

La notation utilisée n'est pas celle de Chuquet qui notait $x^3$ par $1^3$ ou encore $x^4$ par $1^4$ etc. [11].

Examinons le procédé du calcul d'un logarithme exposé par d'Alembert dans l'*Encyclopédie* [5] et qui peut se pratiquer dans nos classes.

Il y est écrit : "*logarithme, s.m., nombre d'une progression arithmétique, lequel répond à un autre nombre dans une progression géométrique*".

Il y développe quatre propositions, avec pour notation $l_9$ pour le logarithme de 9 par exemple
soit

$$l_{32} = l_4 + l_8 \quad \text{car} \quad 2^5 = 2^2 \times 2^3$$
$$\text{vu que} \quad 5 = 2 + 3$$

$$1 \times 32 = 4 \times 8 \ \text{donne} \ l_1 + l_{32} = l_4 + l_8$$
$$\text{d'où} \ l_1 = 0$$

$$l_{16} = l_{64} - l_4 \ ; \ l_8 = \frac{1}{2} l_{64} \ ; \ l_2 = \frac{1}{3} l_8$$

l'encyclopédie méthodique nous expose le calcul de *log 9*

* Etape 1

$$1 < 9 < 10$$
$$l_1 < l_9 < l_{10} \ ; \ l_1 = 0 \ ; \ l_{10} = 1 .$$

La moyenne géométrique de *1* et *10* c'est $A_1 = \sqrt{1 \times 10}$ .

$$l \sqrt{10} = \frac{1}{2}(l_1 + l_{10}) = 0,5 \ ,$$

moyenne arithmétique de $l_1$ et $l_{10}$.

$\sqrt{10}$ # *3, 1622777*, on est loin de *9*.

* Etape 2

$\sqrt{10} < 9 < 10$
$0,5 < l_9 < 1$

$A_2 = \sqrt{10 \times A_1} = \sqrt{10 \times \sqrt{10}}$ ;

$l_{A2} = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75$

$A_2 \# 5,6234133$ encore loin de $9$.

* Etape 3

$A_2 < 9 < 10$
$0,75 < l_9 < 1$

$A_3 = \sqrt{10 \times A_2}$ ; $l_{A3} = \frac{1}{2}(0,75 + 1) = 0,875$

$A_3 \# 7,4989421$

* Etape 4

$A_3 < 9 < 10$
$0,875 < l_9 < 1$

$A_4 = \sqrt{10 \times A_3}$ ; $l_{A4} = \frac{1}{2}(0,875 + 1) = 0,9375$

$A_4 \# 8,6596432$

* Etape 5

$A_4 < 9 < 10$
$0,9375 < l_9 < 1$

$A_5 = \sqrt{10 \times A_4}$ ; $l_{A5} = \frac{1}{2}(0,9375 + 1) = 0,96875$

$A_5 \# 9,3057204$, c'est plus que $9$.

* Etape 6

$A_4 < 9 < A_5$
$0,9375 < l_9 < 0,96875$

$A_6 = \sqrt{A_4 \times A_5}$ ;

$l_{A6} = \frac{1}{2}(0,9375 + 0,96875) = 0,953125$

$A_6 \# 8,9768713$ *soit* $A_6 < 9 < A_5$

* Etc... jusqu'à un rang n que vous pouvez calculer. L'*Encyclopédie* trouve

$l_{A_n} \# 0,9542425$ soit $A_n \# 8,9999998$.

NB : C'est la méthode de J. Ozanam-1685.

3b - La seconde considération est plus inattendue

Néper pose comme définition

*"Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne, qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse"* [2].

La notion de mouvement c'est la continuité, on ne travaille plus pour $x$ variant de minute en minute mais pour $x$ variant continûment de $0°$ à $90°$.

J.-P. Lubet du groupe "Histoire de l'Analyse" de l'IREM de Lille nous traduit la définition de Néper de la manière suivante : [4]

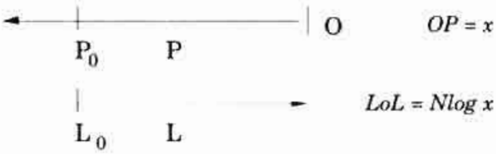


**Fig. 3**

De cette définition un peu obscure, il faut extraire $v(p) = -\overline{OP}$ , $v(L) = cste$ = vitesse de $P$ à l'instant $t = 0$. Mais Néper a une pratique de la cinématique qui lui permet de mêler cette définition aux progressions géométriques qu'il vise :

"la vitesse d'un point $P$ s'approchant géométriquement d'un point fini $O$ est proportionnelle à la distance de celui-ci"

En utilisant une incrémentation finie $\Delta t = 10^7$, le point P part avec une vitesse égale à $10^7$, au bout d'un temps $\Delta t$, il a parcouru un espace $10^7.\Delta t = 1$ ; il se trouve en $P_1$ tel que $P_0P_1 = 1$.

Il repart alors de $P_1$ avec une vitesse égale à $OP_1 = 10^7 - 1$.

Après une durée Δt, il se trouve en $P_2$ tel que $P_1P_2 = 10^7 \ (1 - 10^7).10^{-7}$ donc $OP_2 = 10^7 - 1 - (1 - 10^{-7}) = 10^7 \ (1 - 10^{-7})^2$ ; et ainsi de suite : $OP_n = 10^7 \ (1 - 10^{-7})^n$.

*En langage moderne*, et en quittant ce raisonnement sur des intervalles $\Delta t$, on traduirait $v(P) = -\overline{OP}$ et $\overline{OL} = y$ par :

$$\frac{dx}{dt} = -x \qquad \frac{dy}{dt} = R$$

d'où l'on tire :

$$ln\frac{x}{k} = -t \qquad y = Rt$$

soit :

$$x = k\,e^{-t} \qquad y = Rt$$

En tenant compte de $x = R$ pour $t = 0$, on obtient :

$$x = R\,e^{-t} \qquad y = Rt$$

On en déduit

$$y = R\,ln\frac{R}{x} = -R\,ln\frac{x}{R}$$

Rappel : $R = 10^7$ pour Néper — toujours en langage moderne :

observons que $\frac{y}{10^7} = -ln(\frac{x}{10^7})$ ;

sachant que $-1 = ln\frac{1}{e}$ , on obtient

$$\frac{y}{10^7} = \frac{ln(\frac{x}{10^7})}{ln(\frac{1}{e})} \ .$$

Néper avait donc défini un système de logarithme de base $\frac{1}{e}$ et c'est pour $x = 10^7$ qu'on obtient $y = 0$. Mais la propriété fondamentale des logarithmes n'est pas vérifiée (ce qui est curieux vis à vis de sa première considération).

$$N\,log\,x = 10^7\,ln\frac{10^7}{x}$$

Nlog c'est la "fonction" log de Néper.

$$N\,log(ab) = -10^7\,ln\frac{ab}{10^7}$$

$$= -10^7\,ln(\frac{a}{10^7} \times \frac{b}{10^7} \times 10^7)$$

$$N\,log(ab) = -10^7(ln\frac{a}{10^7} + ln\frac{b}{10^7} + ln\,10^7)$$

$$\text{Nlog}\,(ab) = \text{Nlog}\,a + \text{Nlog}\,b - 10^7\,\ln 10^7$$

Briggs (1561-1630), après discussion avec Néper, améliore la découverte et publie en 1624 la première table de logarithme en base 10 pour laquelle les propriétés suivantes sont vérifiées

$log\ ab = log\ a + log\ b$

$log\ 1 = 0$ et $log\ 10 = 1$ .

$$log\ x = \frac{N\ log(1) - N\ log(x)}{N\ log(1) - N\ log(10)} \quad .$$

3c - Rapportons à ce propos la réponse de Laplace lors d'une séance des écoles normales le 11 Pluviôse an III

Un élève — Quelle est la raison pour laquelle dans la formation des logarithmes, on a fait correspondre le zéro de la progression arithmétique à l'unité dans la progression géométrique ?

Laplace — Quel est l'objet des logarithmes ? c'est de réduire la multiplication à des additions, la division à des soustractions et dans ces opérations, il a fallu simplifier la chose, le plus qu'il a été possible ; c'est ce qu'on a fait, en faisant correspondre le zéro de la progression arithmétique, à l'unité de la progression géométrique ; vous avez toujours cette proportion géométrique ; l'unité est au multiplicateur, comme le multiplicande est au produit ; et à cette proportion géométrique, répond la proportion arithmétique : zéro est au logarithme du multiplicateur comme le multiplicande est au logarithme du produit : de cette manière, vous voyez que l'on a le logarithme du produit, en ajoutant le logarithme du multiplicateur au logarithme du multiplicande. Si l'on n'avait pas fait correspondre à l'unité de la progression géométrique, le zéro de la progression arithmétique, on aurait eu : le logarithme de l'unité est au logarithme du multiplicande, comme le logarithme du multiplicateur est au logarithme du produit ; ainsi, dans cette proportion arithmétique, pour avoir le logarithme du produit, il eût fallu ajouter les deux termes moyens, le logarithme du multiplicateur et celui du multiplicande ; et en retrancher le logarithme de l'unité, c'eût été une soustraction continuelle à faire, si le logarithme de l'unité n'eût pas été zéro. C'est pour épargner cette soustraction, que, dans les tables, on a fait le logarithme de l'unité égal à zéro, ou ce qui revient au même, on a fait correspondre à l'unité de la progression géométrique, le zéro de la progression arithmétique [11].

4) Avant de rappeler brièvement ce qu'il est advenu de cette découverte, il ne faut pas oublier Jobst Bürgi (1552-1632) qui a peut-être conçu le premier l'idée de logarithme, mais dont les travaux ne furent publiés qu'en 1620 à Prague.

Bürgi a utilisé les propriétés des progressions arithmétiques et géométriques. Il a choisi log $10^8 = 0$ et a obtenu une fonction croissante alors que celle de Néper est décroissante.

Bürgi était suisse et c'est lui qui a fabriqué les horloges utilisées par Kepler pour établir sa théorie du système solaire.

5) C'est dès 1647 que Grégoire de St Vincent montrait que "dans l'hyperbole, à des abscisses en progression géométrique, correspond des aires en progression arithmétique" [6].

Par la suite vint l'apparition du calcul par les séries ln(1+u) est proportionnel à l' "aire de l'hyperbole équilatère" d'équation

$$y = \frac{1}{1+u} \quad .$$

Mercator, Newton, Lubniz remplacent $\frac{1}{1+u}$ par : $1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ en "intégrant" terme à terme $ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \ \ldots$

On retrouve les approximations de Néper [7].

6) Pour résoudre son problème, trouver *AC* (*cf.* I.1), Néper a besoin de trouver un nombre $x$ connaissant son logarithme $y$. Voyons la "méthode du retour des suites" mise en œuvre ultérieurement par Newton.

Cherchons les coefficients $a_i$ tels que $x = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$

$$x = 1 + u \qquad\qquad ln\, x = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \ \ldots$$

soit

$$y = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \ \ldots$$

Donc

$$y = (a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots)$$

$$-\frac{1}{2}(a_1 y + a^2 y^2 + \ldots)^2$$

$$+\frac{1}{3}(a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)^3 \ldots$$

$$y = a_1 y + (a_2 - \frac{1}{2}a_1)y^2$$

$$+ (a_3 - a_1 a_2 + \frac{1}{3}a_1)y^3 + \ldots$$

Ce qui donne

$$a_1 = 1 \ ; \ a_2 - \frac{1}{2}a_1 = 0 \ \text{ soit } \ a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_1 a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{6} \quad \text{etc.}$$

$$x = 1 + y + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3!}y_3 + \frac{1}{4!}y_4 + \ldots$$

En notation actuelle, $x = f(y)$ correspond à $y = ln\, x$ avec pour propriété

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) \times f(y_2)$$

car si

$$x_1 = f(y_1) \ \ et \ \ x_2 = f(y_2):$$

$$ln(x_1 \times x_2) = ln\, x_1 + ln\, x_2$$

$$ln(x_1\, x_2) = y_1 + y_2$$

$$x_1 x_2 = f(y_1 + y_2)$$

$f$ "fonction" du type puissance

$$(s^{n+m} = s^n \times s^m).$$

On retrouve la démarche initiale avec des exposants irrationnels.

7) Jean Bernouilli a introduit ces fonctions et Leibniz l'expression courbes exponentielles (1694) — le mot fonction va suivre.

Euler introduit e pour désigner la base des logarithmes naturels en 1748 (John Speidell a réajusté les logarithmes de Néper en introduisant les logarithmes naturels à partir des fonctions trigonométriques — publication à Londres en 1619. Dès 1616 Edward Wright a déjà calculé des logarithmes naturels).

8) "La fonction exponentielle, dernière venue, prend désormais le pas sur la fonction logarithme qui n'apparaît plus que comme fonction inverse" [8].

C'est ce dernier point de vue que j'adopte dans la démarche que je propose. Les élèves seront amenés à découvrir une fonction exponentielle puis la fonction logarithme.

Ils vont d'abord découvrir pour la plupart la notion de moyenne géométrique en comparant une suite géométrique et la suite des entiers naturels. Ils auront à envisager des exposants fractionnaires, des exposants négatifs et grâce à la continuité "convenue" des exposants réels.

A l'aide de l'analyse, nous poursuivrons vers une fonction logarithme et enfin le logarithme népérien, tout cela à l'aide des calculettes utilisées comme moyen de calcul permettant un gain de temps considérable.

Ces rappels historiques peuvent être exploités dans nos classes - selon le niveau des élèves - et c'est ce qui peut motiver nos interlocuteurs.

## II. - Exposé de l'activité réalisée depuis plusieurs années en Terminale C

A - Le projet

On constate que des bactéries se reproduisent en doublant leur nombre chaque heure.

Comment à partir de ce constat "naturel" introduire la fonction logarithmique népérien avec nos élèves de terminale et leurs calculettes ?

C'est l'occasion de passer du discret au continu et de mieux comprendre la notion de fonction puisque nous allons en "créer" d'autres afin de formaliser l'expérience considérée.

B - La progression des élèves

1) Les travaux commencent par quelques questions posées aux élèves :

Ce jour à 0h00, on avait $10^6$ bactéries, combien sont-elles à 1h, à 2h, à 1h30, à 3h, à 4h, à n heures ($n \in \mathbf{N}$), à 23h la veille, à 23h30 la veille ?

2) Examinons la majorité des réponses :

à 1h on a $b_1 = 2 \times 10^6$ ;

à 2h on a $b_2 = 2 \times b_1 = 4 \times 10^6$,

à 1h30 on a $b_{1,5} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ !

une erreur "intéressante" qui est souvent commise.

La majorité des élèves, quand ce n'est pas la totalité, n'envisage que la moyenne arithmétique — savent-ils qu'il en existe d'autres ?

Une difficulté : leur démontrer que

$$b_{1,5} \neq \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$$

Montrons qu'ils se trompent à l'aide de $b_3 = 2b_2 = 8 \times 10^6$ : on a

$$b_2 \neq \frac{1}{2}(b_1 + b_3)$$

Mais alors que vaut $b_{1,5}$ ?

Les élèves découvrent aisément $b_n = 2^n \times 10^6$.

$$b_1 = 2^1 \times 10^6$$

On observe $b_2 = 2^2 \times 10^6 \rightarrow 2 = \frac{1}{2}(1+3)$

$$b_3 = 2^3 \times 10^6$$

Or $(2^2)^2 = 2^1 \times 2^3$ soit $2^2 = \sqrt{2^1 \times 2^3}$
d'où $b^2 = \sqrt{b^1 \times b^3}$ .

3) Plus généralement : Soient $b_{n1}$ , $b_{n2}$ , $b_{n3}$ avec $n_2 = n_1 + r$, $n_3 = n_2 + r = n_1 + 2r$ ; $r$, $n_1$, $n_2$ et $n_3$ entiers naturels.

$$b_{n1} = 2^{n_1} \times 10^6$$

$$b_{n2} = 2^{n_2} \times 10^6$$

$$b_{n3} = 2^{n_3} \times 10^6$$

$$n_1 + n_3 = 2_{n_2}$$

On a donc $2^{\,2n_2} = 2^{\,n_1+n_3}$ soit
$(2^{n_2})^2 = 2^{n_1} \times 2^{n_3}$ d'où $(b_{n_2})^2 = b_{n_1} \times b_{n_3}$

A la moyenne arithmétique
$n_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_3)$ correspond la moyenne géométrique $b_{n_2} = \sqrt{b_{n_1} \times b_{n_3}}$ . Nous retrouvons le processus historique vers les logarithmes.

Remarque :
$b_{n_2} = 2^{\,n_2} \times 10^6 = 2^{\,1/2(n_1+n_3)} \times 10^6$
apparition d'un exposant exprimé par une fraction.

4) Combien de bactéries à 0h20 minutes ? On suppose que le phénomène est continu. Observation intéressante et qui n'est envisageable que parce qu'il y a 106 bactéries, on peut mener une réflexion avec nos élèves sur la continuité.

Si $t' =$ 0h20' que vaut $b_{t'}$ ; $t' = 1/3$ d'heure ?

Des élèves répondent $b_{t'} = 1/3\,(2 \times 10^6)$, ce qui suppose que toutes les 20' leur nombre est multiplié par 2/3, si c'est correct, en deux heures, on obtient, vu ce qui a été fait au 2) :

$$b_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times 10^6 \text{ ou } b_2 = 4 \times 10^6$$

Il est commode de prouver aux élèves qu'ils se trompent.

Soit $q$, le coefficient multiplicateur en 20' ; il faut $q^6 = 4$ soit $q = \sqrt[6]{4}$ . La définition de $\sqrt[q]{\ }$ , réciproque de $(x \mapsto x^n)$ s'impose. $q^6 = 2^2$, soit $q^3 = 2$, $q = \sqrt[3]{2}$ . Pour 1/3 d'heure coefficient multiplicateur $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$, comme pour $n$ heures on avait $2^n$ (quand $n \in \mathbb{N}$).

Remarque : $2^{1/3}$, c'est une notation à justifier en démontrant sa compatibilité avec la notation puissance entière et ses propriétés.

5) Mais avec $t'' = 40'$ ? (ce qui vient d'être envisagé peut-il se vérifier ?). $t'' = 2/3$ d'heure. A-t-on $b_{t''} = 2^{2/3} \times 10^6$ ? Oui car $b_{t''} = 2^{1/3} \times 2^{1/3} \times 10^6 = 2^{1/3} \times b_{t'}$. On aboutit à $b_r = 2^r \times 10^6$, $r \in \mathbb{Q}$.

6) Mais à 23h la veille ? Il y avait $\frac{1}{2} \times 10^6 = 2^{-1} \times 10^6$ bactéries. Et à 23h30 la veille ? $b_{-1/2} = 2^{-1/2} \times 10^6$.

D'ailleurs 0h30, c'est

$b_{1/2} = 2 \times b_{-1/2} = 2 \times 2^{-1/2} \times 10^6$.

On retrouve $b_{1/2} = 2^{1/2} \times 10^6$.

On a l'occasion de travailler les exposants rationnels.

7) Au passage se pose une question existentielle : quand n'y avait-il qu'une bactérie ? et avant ? Nous n'envisageons pas de répondre à cette question !

C -1) On a découvert une fonction $F$

$$\begin{array}{llll} F: & Q & \to & R^+ \\ & t & \mapsto & b_t = 2^t \times 10^6 \\ & D_F & = & \{ t \mid b_t \geq 1 \} \end{array}$$

2) On peut rechercher la borne inférieure $i$ de $D_F$... avec notre calculette, ce qui nous évite des calculs pénibles (on peut les faire, à la main... avec du temps).

Le i cherché en B.7) est négatif

$$2^i \times 10^6 = 1$$
$$10^6 = 2^{-i}$$

Approche par encadrement d'un réel :

$$2^{10} = 1\,024 \,;\, 2^{20} = 1\,048\,576 \,;\, 2^{19} = 524\,288$$
$$-20 \leq i \leq -19$$

Note :

$$2^{19,9} = 2^{199/10} = 978\,376{,}0021$$

soit

$$-20 \leq i \leq -19{,}9$$
$$2^{19,93} \;\#\; 998\,913{,}341\,4$$

*et*

$$2^{19,94} \;\#\; 1\,005\,861{,}333$$
$$-19{,}94 \leq i \leq -19{,}93$$

On pouvait aussi faire les calculs à la main ! $2^{19,94} = 2^{1994/100} = x \;\; soit \;\; 2^{1994} = x^{100}$.

$2^{1994}$ peut se calculer, reste à trouver x par encadrement à la main avec la précision que le temps nous permet ! Heureusement il y a la machine.

NB 1 : La réponse est à moins de 24 h ! c'est la veille vers 4 heures du matin... mais un peu après, qu'y avait-il à 4 h ?

On a déjà dit que ce n'était pas notre problème. La notion d'ensemble de définition est indispensable pour formaliser et correspond au fait qu'en deçà de $i$ on ne peut pas définir $F$.

NB 2 : Nous approchons un réel à l'aide de suites adjacentes. Pour les élèves, c'est une occasion de mieux saisir ce qu'est $\mathbf{R}$. Ils en ont besoin.

NB 3 :

$$i = -6\frac{\ln 10}{\ln 2} \cong -19{,}931\,568\,57\ldots \;;\; i \in Q$$

Une conclusion : Cette fonction $F : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}^+$ définie par $F(t) = 2^t \times 10^6$ n'est pas satisfaisante pour décrire le phénomène, entre les minutes, il y a les secondes, on peut le faire ! Mais entre les secondes, etc.! Il y a d'autres instants tels que $t \notin \mathbf{Q}$ !

3) La fonction $F$ suivante ne permettrait-elle pas de mieux mathématiser notre expérience ? $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ définie par $F(t) = b = 2^t \times 10^6$. Mais cette fonction qu'est-elle ? Qu'est-ce-que $2^{\sqrt{59}}$ ?

4) Suite à cette interrogation, nous imaginons avec nos élèves que cela est possible — ils n'ont aucune difficulté pour l'admettre.

Nous envisageons les propriétés de la fonction numérique $f$ (si elle existe) :

$$f : \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+}, \quad t \mapsto 2^{t}$$

La continuité est admise, sa croissance est observée, sa réciproque est envisagée.

$$f^{-1} : \mathbf{R}^{+} \to \mathbf{R}, \quad b \mapsto t = f^{-1}(b) \text{ tel que } 2^{t} = b .$$

La fonction $f$ est-elle dérivable ? Question habituelle pour les élèves, ils connaissent la croissance stricte et depuis la première, ce phénomène est associé à une dérivée strictement positive.

Si $f$ est dérivable, en $t_0$, on a :

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

On admet que $f$ est une fonction telle que $2^{u} \times 2^{v} = 2^{u+v}$. Vu le travail préparatoire dans $\mathbf{Q}$, ils ne font pas d'objection.

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = 2^{t_0} \times \frac{2^{h}-1}{h}$$

la question devient indépendante de $t_0$ ! et devient

« Que vaut $\lim_{h \to 0} \frac{2^{h}-1}{h} = ?$ »

Nous ne démontrons pas, mais la calculette intervient pour faire des calculs fastidieux que nous avons définis.

Exemple : si $h = 10^{-4}$, $x = 2h$ équivaut à $2 = x^{10\,000}$ ; avec de la patience, on arrive à l'encadrement voulu !

$$(1{,}000\,06)^{10\,000} = 1{,}8220...$$
$$(1{,}000\,07)^{10\,000} = 2{,}0137...$$

Rassurez-vous, c'est déjà à la calculette que je l'ai fait. D'où le tableau de la figure 4 (affichage obtenu avec la TI81).

$h = 0{,}000\,001$ nous donne

$$\frac{2^{h}-1}{h} \cong 0{,}693\,147 \,;$$

h = 0,000 000 1 nous donne

$$\frac{2^{h}-1}{h} \cong 0{,}693\,15 \,;$$

on perd des chiffres significatifs, la machine a atteint ses limites avec $h = 10^{-6}$ et $\frac{2^{h}-1}{h}$ la sienne au voisinage de $0{,}693\,147 = K$.

En résumé, il semble que $f'(t) = K \times f(t)$ autrement dit $(2^{t})' = K \times 2^{t}$. L'élève est surpris et intéressé, (espérons-le !).

5) Posons-nous les mêmes questions pour $g = f^{-1}$ : quand avons-nous $b$ bactéries ?

$g$ est continu, croissante strictement, $g$ est-elle dérivable ?

Nous n'avons pas au programme $(f^{-1})'$ mais $(g \circ f)'$.

| h | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,000 01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2^{h}-1}{h}$ | 1 | 0,717... | 0,695... | 0,693 3... | 0,693 171 2 | 0,693 149 6 |

**Fig. 4**

Si $u = f(t)$, on sait que $(g(u))' = u' \times g'(u)$ d'où $u' \times g'(u) = 1$, $u' = f'(t)$ ou $f'(t) \neq 0$

d'où $g'(f(t)) = \dfrac{1}{f'(t)}$ ;

enfin $g'(b) = \dfrac{1}{K \times f(t)} = \dfrac{1}{Kb}$ .

Nous ne créons pas $g$ telle que $g'(b) = \dfrac{1}{K} \times \dfrac{1}{b}$ , nous découvrons qu'il est intéressant de l'envisager.

NB : on a vu que

$f(t_1 + t_2) = 2^{t_1 \cdot t_2} = f(t_1) \times f(t_2) = b_1 \times b_2$

d'où $g(b_1 \times b_2) = t_1 + t_2 = g(b_1) + g(b_2)$ .

De plus, $g(1) = 0$ car $2^0 = 1$.

6) Observons que la valeur de $K$ dépend du fait que le nombre de bactéries se multiplierait par 2 toutes les heures ; n'existe-t-il pas un coefficient multiplicateur $c$ tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{c^h - 1}{h} = 1 \quad ?$$

Vu qu'une valeur approchée de $K$ est "obtenue" avec la précision de la machine pour $h = 10^{-6}$, cherchons $c$ tel que $\dfrac{c^{10^{-6}} - 1}{10^{-6}} \cong 1$ .

$\varphi(c) = 10^6\ (\ c^{10^{-6}} - 1)$ ; $\varphi$ continue, strictement croissante (si $y = c^{10^{-6}}$ , $y^{10^{-6}} = c$) donc $\varphi\ ([2,3]) = [\varphi(2)\ ;\ \varphi(3)]$, on applique la propriété des valeurs intermédiaires (*cf.* figure 5) avec c = 2,71828 la calculette nous donne 1 !

7) Appelons par exemple "$e$" ce coefficient multiplicateur : il est tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 ,$$

alors $f_e : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ définie par $f_e(t) = e^t$ et $g_e : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $g_e(b) = t$, vérifient $(f_e(t))' = f_e(t)$ soit $(e^t)' = e^t$.

| c | 2 | 3 | 2,5 | 2,7 | 2,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{c^{10^{-6}} - 1}{10^{-6}}$ | 0,693147 | 1,098613 | 0,916291 | 0,993252 | 1,029620 |
| c | 2,72 | 2,71 | 2,718 | 2,719 | etc. |
| $\dfrac{c^{10^{-6}} - 1}{10^{-6}}$ | 1,000632 | 0,996949 | 0,999897 | 1,000265 | |
| c | 2,7182 | 2,7183 | 2,71827 | 2,71829 | |
| $\dfrac{c^{10^{-6}} - 1}{10^{-6}}$ | 0,999970 | 1,000007 | 0,999996 | 1,000004 | |

**Fig. 5**

La fonction $g_e$ est telle que $g'_e(b) = \frac{1}{b}$ (car le nouveau K vaut 1), $g_e(1) = 0$ car $e^0 = 1$, d'où $f_e(0) = 1$, et enfin $g_e(b_1 \times b2) = g_e(b_1) + g_e(b_2)$.

Il devient envisageable de définir une nouvelle fonction notée par exemple ln, $ln : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ telle que $(ln\ x)' = \frac{1}{x}$ et $ln\ (1) = 0$.

Elle a pour propriété $ln(x_1 \times x_2) = ln\ x_1 + ln\ x_2$ car $ln^{-1}$ existe et si $y = ln\ x$ alors $x = e^y$; et si $x_1 = e^{y_1}$ et $x_2 = e^{y_2}$ $x_1 \times x_2 = e^{y_1+y_2}$.

Remarque 1 : au 4), $f(t) = 2^t = (e^{ln\ 2})^t = e^{t\ ln\ 2}$, d'où $f'(t) = ln\ 2 \times f(t)$, le nombre K trouvé vaut $ln\ 2$.

Remarque 2 : Les élèves proposent toujours de poser $c = e$ parce que les plus curieux ont exploré leur calculette et il y a la touche $\mathbf{e^x}$ qu'ils ont testée pour $x = 1$.

## III - Conclusion

Au cours de ce travail, les élèves rencontrent des notions qu'ils n'ont pas toujours bien comprises ou peu utilisées, il suffit de questionner nos collègues qui enseignent après le baccalauréat.

J'ai amené les élèves à établir une relation entre les termes d'une progression géométrique et ceux d'une progression arithmétique, c'est la considération première pour aller vers les logarithmes. Il est apparu indispensable d'utiliser des exposants fractionnaires, puis des exposants réels pour mathématiser pleinement la situation.

On n'emporte pas la conviction immédiate de tous les élèves, c'est pourquoi la recherche de i au C.1) m'est apparue utile pour cerner "à la main" des réels "nouveaux" pour eux. Pour la plupart des élèves il y a $\pi$, $\sqrt{2}$, des radicaux comme irrationnels oubliant ou n'ayant pas pris conscience qu'ils en avaient déjà rencontrés d'autres grâce aux lignes trigonométriques.

Le rôle de la calculette est déjà très important, lors de cette étape, afin d'éviter des calculs longs et pénibles faisables à la main - certes la machine donne $2^{1994/100}$ directement mais si on ne donne pas de sens à ce nombre, c'est peu intéressant.

La démarche nous conduit naturellement à privilégier une fonction exponentielle qui apparaît aisément et ce point de vue l'emporte dans la mise en évidence d'une fonction nouvelle pour les élèves (*cf.* I-8).

Dans la recherche de la dérivée de la fonction $f$ (C.4) les calculettes vont jouer un rôle indispensable pour formuler une conjecture quant à l'expression de la dérivée de $f$ puis pour celle de $f^{-1}$.

L'activité ne démontre rien, il faut le dire aux élèves. Sans les calculettes, notre démarche est impossible, mais dans la mesure où on a déjà expliqué que ces calculs sont "faisables" à la main avec la précision souhaitée, on emporte la conviction des élèves quant à l'existence de la fonction logarithme, ce qui est de toute façon plus intéressant que la définition souvent rencontrée avec une primitive "introuvable" de $\frac{1}{x}$.

En fait j'ai entrepris une démarche voisine de celle d'Euler (introduction à l'analyse des infiniments petits 1748). Les élèves ont découvert qu'il était légitime de poser

$$F: \quad D_F \rightarrow R^{*+},$$

si $b \in N$, b est le nombre de bactéries

$$t \mapsto b = 2^t \times 10^6$$

à l'instant t qui le permet, quand elles se multiplient globalement par deux toutes les heures. On aurait pu définir

$$F^{-1}: \quad R^{*+} \rightarrow R$$
$$b \mapsto t$$

pour répondre à la question : "à quel instant a-t-on b bactéries ?"

Avec le nombre "$e$" découvert grâce aux calculettes on peut définir

$$G: \quad D_G \rightarrow R^{*+}$$
$$t \mapsto b = e^t \times 10^6$$

si $b \in \boldsymbol{N}$, $b$ est le nombre de bactéries à l'instant qui le permet quand elles se multiplient globalement par e toutes les heures. On a alors $G^{-1}(b) = t$, $G^{-1}$ la fonction qui nous donne l'instant t auquel on a un nombre donné de bactéries.

$$G^{-1}(b) = ln\ \frac{b}{10^6} \quad ; \ G^{-1}(e \times 10^6) = 1$$

c'est-à-dire il faut une heure pour la multiplication par e, $G^{-1}(e \times e \times 10^6) = 2$, etc.

Remarquons que $G^{-1}(1) = ln\ 10^{-6}$, $ln\ 10^{-6} \equiv -13{,}81$, à rapprocher du "$i$" du (II-C.2).

Le problème c'est que $G^{-1}$ ne possède pas la propriété fondamentale des logarithmes puisque $G^{-1}(ab) = G^{-1}(a) + G^{-1}(b) + ln\ 10^6$, on a une difficulté du même type que celle de Néper (*cf.* I-3b). C'est pourquoi avec les élèves, j'ai travaillé $f(t) = 2^t$, puis $f_e(t) = e^t$ afin d'obtenir $f_e^{-1} = g_e = ln$ .

Pour les élèves $ln$, c'est-à-dire $g_e$ est la fonction qui nous donne l'instant $t$ auquel on a un nombre donné $b$ de bactéries sachant qu'il y en avait une au départ $(t = 0)$ et qu'elles se multiplient globalement par $e$ toutes les heures. Cette interprétation de la mitose n'est pas réaliste, elle est tout à fait théorique et ne peut avoir de sens qu'à partir de l'instant où nous avons un nombre suffisant de bactéries pour envisager un coefficient multiplicateur.

En résumé, beaucoup de parties des programmes de terminale sont abordées : dérivation, continuité, propriété fondamentale des logarithmes, suites, etc. ce qui prouve aux élèves que les mathématiques constituent un tout et qu'elles ne se "découpent" en chapitres que pour la clarté des exposés.

Quant au temps nécessaire pour réaliser cette activité, il est très variable selon les années, si elle est réalisable en 2 heures, c'est curieusement quand il y a d'excellents élèves qu'il faut plus de temps, car les questions sont nombreuses et c'est l'occasion d'aborder toutes les parties du programme qui apparaissent.

Si le scénario vous plaît, essayez-le et faites-moi part de vos remarques.

## BIBLIOGRAPHIE

[1];[5] D'ALEMBERT : *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques* - Tome second, Réédition du Bicentenaire ACL - Editions, Paris 1987.

[2];[6];[8] Jean ITARD : *Essais d'histoire des mathématiques* réunis par Roshdi Rashed, Librairie Scientifique et Technique A Blanchard, Paris, 1984.

[4] Bulletin IREM de Lille n° 22, 1991.

[7] Gilbert ARSAC : *Histoire de la découverte des logarithmes*, dans un bulletin de l'association des Professeurs de Mathématiques.

[9] A consulter : Charles NAUX : *Histoire des logarithmes de Néper à Euler*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris, 1966.

[10] *Histoire des Mathématiques - tome 1.* J.-P. COLETTE, édition du Renouveau pédagogique, Montréal (Québec), 1973.

[11] P. DEDRON et J. ITARD : *Mathématiques et Mathématiciens*, Editions Magnard, Paris, 1972.

[12] A consulter : *Mathématiques au fil des âges*, IREM groupe épistémologie et histoire, chez Gauthier-Villars, 1987.