INGENIERIE DIDACTIQUE ET EVOLUTION DU RAPPORT AU SAVOIR

une chronique en calcul mental un projet en algèbre à l'articulation collège - seconde

Régine DOUADY
Irem Paris 7

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, je m'intéresse au rapport entre ce que le maître se propose d'enseigner en mathématiques et ce que les élèves auxquels il s'adresse en classe sont susceptibles d'apprendre effectivement. Les mots *enseigner, apprendre, savoir* peuvent recouvrir différents sens. Je préciserai le sens que je leur donne.

L'élaboration d'un problème est *un pas* d'une ingénierie didactique. Dans ce contexte, le terme d'*ingénierie didactique* désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un *maître-ingénieur* pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves. Au cours des échanges entre le maître et les élèves, le projet évolue sous les réactions des élèves et en fonction des choix et décisions du maître. Ainsi, l'ingénierie didactique est à la fois un *produit*, résultat d'une analyse a priori, et un *processus* au cours duquel le maître met en œuvre le produit en l'adaptant le cas échéant selon la dynamique de la classe. Je m'intéresse aux différents facteurs qui président à l'élaboration d'une ingéniérie didactique, et à leur interdépendance, chacun de ces facteurs étant soumis à des contraintes souvent contradictoires.

L'ingénierie didactique désigne aussi une méthodologie de la recherche particulièrement intéressante pour prendre en compte la complexité de la classe. Cette méthode est très développée dans les recherches françaises. Nous renvoyons le lecteur intéressé à M. Artigue (1989).

Dans le présent article, il ne s'agit pas de faire le compte rendu d'une recherche, il s'agit de décrire deux exemples de propositions d'enseignement qui correspondent à des choix didactiques analysés, argumentés, justifiés à partir de recherches. Tout le travail de construction, d'analyse et de prévision repose sur un questionnement didactique. Je dégagerai les concepts didactiques que j'utilise. J'espére que les exemples proposés ne seront pas perçus comme un modèle d'enseignement mais plutôt comme un support pour comprendre le sens et la fonctionnalité des outils didactiques proposés. J'espére ainsi pouvoir les mettre à disposition d'autres enseignants pour construire et gérer en classe d'autres ingénieries, pour les aider à mieux repérer et gérer leurs marges de manœuvre.

Un point important va nous occuper. Il s'agit des rapports entre la *construction du sens* et la *capitalisation du savoir* du côté des élèves, de leur importance pour le maître et du rôle qu'il entend leur faire jouer à travers les réalisations didactiques que les élèves vont vivre sous sa conduite.

Toutefois, en amont des analyses et propositions annoncées se pose une question cruciale, d'ordre sociologique mais qui conditionne le sens des actions didactiques envisageables :

Quelle est la place du savoir à l'école pour l'enseignant, pour les élèves ? Est-il un enjeu de la relation didactique ?

Dans la vie réelle, on sait bien que la réponse à ces questions est complexe et ne peut s'exprimer en "tout ou rien" ou en "oui, non". Toutefois, dans ce qui suit, j'ai choisi de repérer et présenter les différents cas selon la tendance principale.

Dans la première partie, j'envisage les effets sur les choix et décisions des enseignants suivant que le savoir mathématique est ou n'est pas le principal enjeu de la relation didactique. Dans la deuxième partie, je décris un exemple de réalisation didactique au cours de laquelle le rapport au savoir mathématique évolue, puis un exemple d'élaboration d'un problème d'algèbre portant sur factorisation et développement. En conclusion, je regroupe des éléments essentiels de la progression du savoir chez les élèves.

I. LE SAVOIR MATHEMATIQUE DANS LA RELATION DIDACTIQUE.

I.1 Qu'est ce que savoir des mathématiques ? Qu'est ce qu'apprendre ?

Lorsqu'un maître et des élèves se retrouvent dans une classe, la règle veut que le maître soit là pour enseigner un certain savoir et les élèves pour apprendre ce même savoir.

Je précise ci-dessous le sens que je donne aux mots "savoir, enseigner, apprendre".

Savoir des mathématiques revêt un double aspect. C'est d'une part avoir la disponibilité fonctionnelle de certaines notions et théorèmes mathématiques pour résoudre des problèmes, interpréter de nouvelles questions... Dans un tel fonctionnement scientifique, les notions et théorèmes mathématiques ont statut d'outil. Les outils sont inscrits dans un contexte, sous l'action et le contrôle de quelqu'un (ou d'un groupe) à un moment donné. Les situations ou les problèmes dans lesquels évoluent des notions mathématiques sont générateurs de sens pour ces notions d'un certain point de vue que nous appellerons sémantique.

Savoir des mathématiques, c'est aussi identifier des notions et des théorèmes comme éléments d'un corpus scientifiquement et socialement reconnu. C'est aussi formuler des définitions, énoncer des théorèmes du corpus et les démontrer. Je dis alors que les notions et théorèmes mathématiques concernés ont statut d'objet. Ils sont décontextualisés, dépersonnalisés (même s'ils sont désignés par un nom propre) et a-temporels.

Le travail de décontextualisation et dépersonnalisation participe à la **capitalisation du savoir**. Le travail de recontextualisation et le traitement des problèmes qui en découlent permettent d'en élargir le sens. Ceci n'empêche pas de capitaliser des pratiques ou des connaissances particulières, voire provisoires.

Les notions, tout comme les théorèmes, peuvent être travaillés, modifiés selon les situations où ils sont sollicités et déboucher sur de nouvelles notions, à leur tour matière à travail, interprétation, modification, généralisation... Pour les théorèmes, on peut explorer le domaine de validité : imaginer des variantes, les démontrer, ou au contraire construire des contre-exemples pour s'assurer que cela n'est pas possible... Dans tous les cas, on est amené à mettre en relation des notions différentes. Ces mises en relation sont aussi source de sens pour ceux qui les réalisent.

Ce travail mathématique peut se faire sur les outils dans le cadre d'un problème, comme sur les objets pour en élargir la portée sans finalité précise ou par souci esthétique. Il nécessite de respecter un ensemble de règles internes aux mathématiques et différents modes d'expression . Il s'agit là d'une autre composante du sens que nous appellerons syntaxique.

Enseigner, pour un maître, c'est créer les conditions qui produiront à terme du savoir chez ses élèves.

Apprendre, pour un élève, c'est s'impliquer dans une activité intellectuelle dont la conséquence est à terme la disponibilité d'un savoir avec son double statut outil et objet. Pour qu'il y ait enseignement et apprentissage, il faut donc que le savoir soit un objet important, voire essentiel d'échange entre le maître et ses élèves, que le savoir soit un enjeu important de l'école.

La réalité peut effectivement être celle-là, et le travail du maître est alors de choisir des mises en scène du savoir acceptables pour les élèves et efficaces par rapport à l'objectif d'apprentissage. Diverses modalités sont possibles.

Mais la réalité peut aussi être tout autre. Le savoir peut être un enjeu pour le maître, mais ne pas l'être du tout, pour un certain nombre d'élèves ou au contraire, être un enjeu pour certains élèves et ne pas pouvoir l'être pour le maître. Alors deux éléments vont influencer les décisions du maître et en tout cas, moduler ses attentes :

1) Que représente pour de tels élèves le fait d'aller à l'école, qu'est ce qu'ils attendent de l'école ? Qu'est ce qu'apprendre ?

2) Quelle est la proportion d'élèves de la classe pour laquelle le savoir n'est pas un enjeu de l'école (resp. est un enjeu) ?

Dans une même classe, il se peut que certains viennent à l'école pour acquérir des connaissances alors que d'autres cherchent à passer de classe en classe, aller le plus loin possible pour avoir un bon métier. D'autres viennent en classe pour apprendre à vivre, à se socialiser, à se débrouiller dans la vie. Peu importe qu'on y fasse des mathématiques ou quoi que ce soit d'autre. La discipline est le support de la communication avec le professeur pour répondre à sa demande, et d'ailleurs aux moindres frais (B. Charlot et E. Bautier, 1993).

Toutefois quelles que soient les intentions en arrivant à l'école, chaque élève va plus ou moins réussir ou échouer dans son projet. Par ailleurs, selon l'histoire personnelle de l'enseignant, sa propre représentation et sa propre connaissance des mathématiques, sa conception de l'apprentissage des mathématiques, sa volonté de convaincre et la force des contraintes auxquelles il est soumis, il tentera de défendre et faire valoir ses convictions ou au contraire, il essaiera seulement de survivre. Et parfois ce ne sera déjà pas si mal !

Ainsi, s'offrent à l'enseignant deux possibilités dont il pourra user effectivement ou qu'il pourra moduler, selon les circonstances :

— soit il maintient son exigence sur le savoir comme enjeu de sa relation avec les élèves
— soit il y renonce. C'est la situation que nous envisageons dans le paragraphe qui suit.

I.2 Le savoir mathématique n'est enjeu ni pour l'enseignant, ni pour les élèves

Dans ce cas, pour que l'enseignant puisse faire son métier d'enseignant et pour que les élèves fassent leur métier d'élèves, la classe est contrainte de vivre une *fiction didactique* : l'enseignant "enseignera" quelque chose et les élèves "apprendront" quelque chose. Ceux-ci seront évalués et auront des notes acceptables dans leur ensemble.

Mais où sont les mathématiques ? Que peut faire le maître ?

Une réponse usuelle est la suivante : proposer aux élèves d'exécuter des tâches, tâches qui sont parcellisées en sous tâches plus élémentaires algorithmisées selon les besoins des élèves, jusqu'à ce qu'un pourcentage acceptable d'élèves de la classe ait répondu de façon assez satisfaisante.

La conséquence d'un tel choix est que le sens de l'activité mathématique est sacrifié. Les élèves ne disposent d'aucun moyen de contrôler leur production autre que de refaire le travail dans les mêmes termes. L'expérience des enseignants est qu'un tel contrôle est peu fiable. D'ailleurs la question de la légitimité même du contrôle se pose. Corriger, c'est le travail du maître. L'aspect magique prend le pas sur l'aspect rationnel. La mémoire est de plus en plus sollicitée mais avec peu de possibilité de la structurer. Le recours aux exercices répétitifs est incontournable. Les élèves comprennent de moins en moins pourquoi on les oblige à faire des mathématiques. Dans ces conditions, il faudra sans doute parcelliser et algorithmiser de plus en plus. Mais le maître pourra faire avancer ses leçons. A condition de bien choisir les épreuves d'évaluation — de petites questions conformes aux habitudes — assez d'élèves pourront passer dans la classe supérieure. Pour l'enseignant et les élèves, la survie est assurée.

Reste le sort des élèves qui refusent ce jeu ou le sort de ceux qui sont en échec malgré leur bonne volonté.

I.3 Le savoir mathématique est un enjeu pour l'enseignant mais non pour les élèves

Là encore, deux éventualités se présentent du moins au début de l'année scolaire :

— l'enseignant accepte d'entrer dans la logique des élèves au moins provisoirement et s'attache progressivement à faire évoluer le contrat.
— l'enseignant engage tout de suite le conflit avec les élèves.

Il s'agit pour l'enseignant d'obtenir une modification du rapport aux mathématiques d'une majorité d'élèves de la classe. Alors, ce peut être un très grand défi pour l'enseignant qui va se trouver engagé, à travers les mathématiques, dans un processus de modification du rapport à l'école, de la relation maître-élève et des relations entre élèves.

En effet, une modification du rapport aux mathématiques nécessite pour ces élèves, une prise de sens des contenus de cette discipline et la disponibilité d'outils de traitement sous leur contrôle. Cela demande que ces élèves puissent entrer dans une activité intellectuelle et qu'ils soient convaincus que cela en vaut la peine non seulement du point de vue de leur insertion à l'école mais aussi d'un point de vue social et culturel. Cela veut dire que l'enseignant met ses élèves en situation d'avoir à faire des choix, à en tester les effets, les contrôler, éventuellement revenir sur les premiers choix et en faire d'autres... L'enseignant doit alors s'assurer que ses élèves disposent d'un minimum de moyens pour ce faire. Cela veut dire au niveau du contrat, que les élèves acceptent de s'engager dans un rôle d'acteur et ne se réfugient pas dans l'unique rôle d'exécutant. C'est dans ce contexte d'apprentissage que le *jeu de la dévolution* (G. Brousseau, 1990) est incontournable pour l'enseignant. Pour G. Brousseau, "*La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert*".

Je reviendrai plus loin sur des conditions favorables à la réalisation d'un tel contrat. En particulier il est important de prendre en compte très tôt et sur plusieurs années la *nécessaire interaction entre prise de sens et capitalisation du savoir*. M.-J. Perrin a particulièrement travaillé cette question avec des élèves de milieu populaire en difficulté. Disons pour l'instant qu'il s'agit là d'une situation difficile à gérer et à faire avancer avec des élèves qui ont pris l'habitude, au fil d'années d'échec, de refuser le jeu mathématique.

Alors l'enseignant peut tenter de jouer sur la dimension affective. Cela marchera peut être un moment, voire une année, avec plus ou moins de bonheur selon l'âge des élèves, mais il n'y a pas la stabilité suffisante pour assurer la construction d'une masse critique de connaissances propre à enclencher un nouveau rapport aux mathématiques.

La tentation est grande pour l'enseignant de renoncer au savoir et de se rabattre sur un apprentissage de techniques et algorithmes plus ou moins bien mémorisés mais qui éloigne d'autant les élèves de ce qui pourrait faire sens pour eux.

I.4 Le savoir mathématique est un enjeu pour certains élèves mais non pour le maître.

N'oublions pas le risque de décevoir des élèves qui viennent à l'école apprendre quelque chose, intéressés par les mathématiques lorsque c'est l'objet de l'enseignement. Ces élèves peuvent alors rejeter le cours de mathématiques mais aussi l'école en ressentant implicitement qu'elle ne remplit pas sa fonction. Ils peuvent aller chercher de la connaissance ou d'autres centres d'intérêt ailleurs s'ils en ont la possibilité, pour le meilleur et pour le pire, ou bien entrer en conflit avec les enseignants. Cette situation n'est pas utopique.

I.5. Le savoir mathématique est un enjeu et pour le maître et pour les élèves

C'est la situation favorable du point de vue des mathématiques. Toutefois, la construction du sens n'implique pas nécessairement la capitalisation du savoir. Sous certaines conditions, elle en favorise la structuration, condition de sa mémorisation. C'est tout le travail qui doit être conçu à cet effet.

La théorie des champs conceptuels (G. Vergnaud, 1991), la théorie des situations (G. Brousseau, 1987, 1990), la dialectique outil-objet, les jeux de cadres et fenêtres conceptuelles (R. Douady 1984, 1987b, 1992), les représentations métacognitives (A. Robert et J. Robinet 1989...) sont des outils pour comprendre et/ou organiser le rapport au savoir mathématique des différents acteurs du système didactique et aider les élèves dans leur effort pour conceptualiser le réel.

Certes de nombreuses questions didactiques restent ouvertes et les problèmes d'adéquation entre ce qui est enseigné d'une part et ce qui est effectivement appris d'autre part sont loin d'être réglés. Cela conduit à envisager les études réalisées et les résultats obtenus à la fois avec modestie et optimisme.

Les deux exemples d'ingénierie ci-dessous ont été réalisés dans diverses classes. Leur construction et leurs réalisations, les analyses préalables et les analyses a posteriori ont été des objets d'étude en situation de formation d'enseignants et formation de formateurs. C'est ainsi qu'on trouvera dans la suite des éléments d'analyse a priori et de temps en temps des références à des réalisations.

II. EXEMPLES D'INGENIERIE DIDACTIQUE

II.1. Calcul mental au CM2

CHRONIQUE

Les **circonstances**

L'histoire se passe dans une école toute neuve de banlieue, dans un groupe de grands immeubles tout neufs à vocation sociale, habités en priorité par de grandes familles en situation sociale et économique difficile.

Le maître est nouvellement nommé dans cette école. Mais c'est un maître expérimenté et un membre de notre équipe de recherche en didactique des mathématiques à l'école élémentaire depuis plusieurs années.

Il prend contact avec sa nouvelle classe en septembre et s'adresse à ses 24 élèves selon ses habitudes. Il s'aperçoit très vite que 11 des 24 élèves ne peuvent pas lire un texte relativement simple : ils n'ont pas compris le principe de l'articulation des syllabes. Ils ont autant de difficultés à écrire. Dans ces conditions, comment faire des mathématiques ?

Un bon point de départ possible : le calcul mental. Il s'agit d'une activité mathématique essentiellement pensée, dont les séances sont, en général, courtes et périodiques (tous les jours environ 10 minutes). En fait, c'est un véritable processus qui évolue dans le temps. Son expression est principalement orale avec une toute petite place pour l'écrit, écrit auquel on pourrait renoncer au début du processus dans des cas particuliers. C'est par ailleurs une très bonne voie d'accès vers l'écrit comme nous le verrons plus loin. Le maître en a une bonne expérience comme méthode pour contribuer à la conceptualisation des nombres et de leurs propriétés opératoires. C'est une voie qui nous semble tout à fait adaptée aux difficultés de la classe, porteuse d'espoir pour l'expérience que nous en avons.

La méthode

— Le maître propose oralement une opération à faire.
— Les élèves écoutent et mémorisent la question. Ils effectuent mentalement l'opération.
— A un signal du maître, ils écrivent la réponse sur leur ardoise, puis la lèvent pour que le maître puisse lire les réponses de tous. Certaines sont justes, d'autres fausses. C'est la situation standard .
— Le maître interroge, à tour de rôle, plusieurs élèves (aussi bien parmi les réponses justes que parmi les fausses) sur leur procédé de calcul.
— Chacun doit être en mesure de décrire sa suite de calculs. Le cas échéant, l'élève interrogé peut repérer une erreur et la corriger oralement à condition d'expliquer ce qui n'allait pas et pourquoi. Les autres élèves écoutent, prêts à intervenir en cas de contestation.
— Le maître appelle alors les élèves qui auraient calculer autrement à se manifester (ils lèvent le doigt) et à exprimer leur méthode.
— Les élèves, de façon collective, au cours d'échanges verbaux (entre élèves) régulés par le maître, comparent les méthodes, leurs avantages, inconvénients, la rapidité, les possibilités de contrôle.

Au cours de ce travail, beaucoup de propriétés des nombres et des opérations, des propriétés de l'ordre et de la compatibilité avec les opérations sont à l'œuvre, explicitement dans les usages mais sans dénomination théorique. Ces propriétés interviennent avec leur statut d'outil pour guider les calculs, faire des choix, justifier les réponses ou repérer des incohérences. Il se développe des pratiques explicites de calcul et de contrôle des résultats. Par exemple,

"je suis sûre que son résultat est faux parce que 12 x 11 c'est plus grand que 12 x 10, et il trouve moins de 120."

Par ailleurs, l'attention et l'écoute mutuelle sont sollicitées et développées ainsi que la mémoire, de manière intense mais pendant une durée qui, en général, ne dépasse pas 10 minutes ou 1/4 d'heure.

La réalisation

En fait, ce beau programme s'est trouvé en défaut dès la première étape. Pour un grand nombre d'élèves, il ne faisait pas partie de leur contrat qu'ils devaient écouter le maître lorsque celui-ci s'adressait à eux. Le seul rapport au maître qu'ils concevaient à ce moment là était un rapport d'autorité. Le maître avait alors le choix entre accepter leur logique et enclencher une relation d'autorité ou tenter de les convaincre avec des mots, qu'il valait mieux pour eux changer de logique.

Ce dernier choix était, pour beaucoup de raisons que je n'exposerai pas ici, voué à l'échec. Finalement, les décisions du maître relèveront du premier choix. Comme on voit, ce n'est plus un choix, mais la seule voie possible de communication avec la majorité des élèves.

Les objectifs premiers du maître sont les suivants :

— *écoute et respect* dans la relation entre le maître et les élèves ou dans les relations entre élèves : quand le maître s'adresse aux élèves ou qu'un élève s'adresse aux autres élèves, ceux qui ne parlent pas écoutent et essaient de comprendre ce que dit celui ou celle qui parle.
— *le contenu des échanges* est essentiellement mathématique.

Ici , le thème étant le calcul mental, il s'agit de travailler avec des nombres et des opérations.

Les connaissances supposées des élèves, et qui dans un premier temps vont suffir au maître, sont des *noms* de nombres et les noms des opérations.

Première consigne ou l'autorité du maître :

M (le maître) : *Je vais vous proposer des opérations et je vais demander à certains d'entre vous de* ***répéter*** *ce que j'ai dit. Je ne vous demande pas de calculer ou de trouver un résultat, mais seulement de répéter exactement.*

Tout élève peut répondre à la demande du maître, sauf s'il refuse le jeu de l'école. Et d'ailleurs brouhaha et protestations parmi certains élèves.

Le maître persiste et signe.

M : *14 multiplié par 4 Pierre, 5 multiplié par 22 Paul, 40 divisé par 8 Marie...*

Des demandes analogues vont se renouveler pendant quelques jours en complexifiant à chaque fois un peu plus les énoncés.

Les variables de situation à disposition du maître sont ici

* pour les mathématiques

- — le champ des nombres sollicités (entre 0 et 100 au début)
- — la nature des nombres : entiers ou non entiers
- — les opérations : familières, moins familières
- — la complexité de l'énoncé (une opération, plusieurs opérations).

* pour la gestion de la classe

- — le nombre d'élèves interrogés
- — la durée de l'activité chaque jour
- — le nombre de séances

Deuxième consigne et changement de contrat

M : *Je vais vous proposer des opérations et*

je vais demander à certains d'entre vous de les ***répéter autrement.*** *Par exemple, pour* 15×3 *vous pouvez proposer* 5 × 3 × 3 *ou* (10 + 5) × 3 *ou tout autre expression qui aurait le même résultat si on faisait le calcul mais on ne fait pas le calcul. On ne répète pas deux fois la même expression.*
— Celui qui est interrogé a le droit de se faire aider par un autre élève s'il n'a pas d'idée.
— Les autres doivent bien écouter pour dire si on peut accepter l'expression proposée ou non et pourquoi.

Nouvelle variable à disposition du maître : suggérer ou non aux élèves d'écrire leurs propositions.

Ainsi, après quelques séances sous le complet contrôle du maître, ceux qui ont des connaissances numériques ont l'occasion de les exprimer dans un contexte relativement peu contraignant, mais tout de même délimité. Ils ont assez de choix à l'intérieur d'un cadre établi et somme toute sécurisant. Par ailleurs, ils doivent répondre à une demande du maître, ils ne risquent pas d'être pris pour des "petits profs" et rejetés par les copains moins armés mathématiquement.

Plusieurs séances, pendant deux ou trois semaines, seront consacrées à cette consigne.

Troisième consigne et prise de responsabilité du côté des élèves : vers un nouvel objet d'étude

M : *Je vais encore vous proposer des opérations et je vais vous demander de les* ***répéter autrement*** *mais chacun a le droit de proposer sa réponse. La seule condition est qu'elle n'ait pas déjà été dite. J'en veux une nouvelle à chaque fois.*

Le maître veut orienter le travail des élèves, d'une part vers l'écrit, d'autre part vers l'étude explicite des propriétés des nombres et des opérations. Pour cela, il compte sur une évolution du jeu *de l'oral vers l'écrit* et sur une interaction entre les deux modes. Il lui faut donc organiser cette évolution. L'analyse qui suit explique ses décisions.

L'expression orale est suffisante tant que l'information que les élèves doivent recueillir et traiter ne dépasse pas leur capacité de mémoire. Pour que l'expression écrite soit nécessaire, il faut que l'expression orale soit mise en défaut, donc les capacités de mémoire largement dépassées. Il y a au moins deux raisons à cela : couvrir la diversité des élèves et rendre inopérant un effort de mémoire. Ainsi, pour obtenir l'évolution souhaitée, le maître joue sur la valeur de la variable "nombre d'élèves interrogés". Il va lui faire subir un *saut* en changeant la règle du jeu : chacun a le droit de proposer sa réponse.

Le maître compte sur la familiarité développée dans cette pratique du calcul mental pour obtenir *beaucoup* de propositions.

Pour que les élèves soient effectivement en mesure de répondre à l'attente du maître, ils ont besoin de savoir écrire des expressions numériques variées, portant sur un champ de nombres "raisonnable", incluant signes opératoires et parenthèses. C'est l'objet d'une autre partie de l'apprentissage qui s'est enclenchée et développée progressivement, parallèlement et en référence au travail oral à partir de la deuxième consigne et aussi à un travail sur la lecture et l'écriture hors mathématique.

Du côté des élèves, la réaction attendue se produit au bout de deux ou trois séances :

"on ne peut plus tout se rappeler, il faut écrire".

"il faut se mettre d'accord sur les propositions qui sont pareilles et sur celles qui sont nouvelles".

Les propriétés opératoires sont ici *outils implicites* de classement, exprimées en terme d'action, dans un certain contexte. L'*explicitation* orale demandée à chaque élève dans des conditions d'"écoute active" de la part des autres a pour but de favoriser la *dépersonnalisation* des procédures et d'avancer dans la conceptualisation des propriétés sous-jacentes.

Quatrième consigne et changement de problématique

M : *Trouver des règles pour trier les propositions entre celles qui se ressemblent et celles qui sont différentes.*

Du point de vue mathématique, les objets d'études se situent toujours dans le cadre numérique. Toutefois ce ne sont plus directement les nombres et les rapports entre nombres et opérations qui sont à l'étude mais les propriétés des opérations.

Bilan

La *dévolution* du calcul mental tel qu'il était conçu par le maître et les interactions oral/écrit ont bien pris deux mois à se mettre en place à raison de 10 à 30 minutes selon les jours, cinq jours par semaine. Cette pratique s'est déroulée et enrichie dans ses modalités avec l'évolution des connaissances des élèves, tout au long de l'année. Des problèmes qu'il était inconcevable d'envisager d'aborder ont pu être étudiés : problèmes de géométrie et de mesures en coordination avec l'introduction des nombres décimaux par exemple.

En ce qui concerne les objectifs du maître, on peut dire que plusieurs facteurs se sont conjugués pour faire évoluer les relations sociales au sein de la classe d'une part, les relations au savoir d'autre part. Parmi ces facteurs, l'activité de calcul mental, telle qu'elle a été vécue, a joué un rôle clé. Signalons un autre facteur qui a joué un rôle très important, c'est la prise en charge de la classe par deux enseignants en forte coordination, notamment dans le travail de symbolisation : un maître pour les disciplines scientifiques et une maîtresse ayant une formation psychologique et une expérience des élèves qui connaissent des difficultés en lecture pour les autres champs disciplinaires (pour respecter les règles institutionnelles, ces deux enseignants ont pris deux classes en responsabilité, avec la même répartition des tâches).

CALCUL MENTAL ET RESOLUTION DE PROBLEMES

A propos des perspectives qu'offre le calcul mental, une question plus large se pose : celle du réinvestissement dans l'étude d'un problème, des compétences numériques issues du calcul mental. Nous avons observé, dans le cadre de nos recherches, que la pratique régulière de calcul mental tel qu'il a été décrit, entraînait pour la quasi totalité des élèves une grande rapidité de calcul. De plus la facilité de certains élèves à calculer mentalement et rapidement intervenait à plusieurs occasions lorsqu'ils étaient confrontés à un problème :

— *au début* de l'étude, pour recueillir assez d'information pour se faire une idée de la situation à traiter. Donnons un exemple.

étant donné un rectangle, chercher un autre rectangle de périmètre plus grand et d'aire plus petite.

Pour répondre à cette question, nous avons observé une première méthode à l'œuvre. Elle consistait à choisir plusieurs rectangles de périmètre plus grand et à calculer l'aire, ou plusieurs rectangles d'aire plus petite et à calculer le périmètre, avant de pouvoir envisager les variations conjointes. La possibilité de faire de nombreux calculs mentalement et rapidement était un atout dans cette étude.

— *en cours d'étude* pour éviter de poser les opérations simples et aller plus vite, par exemple les multiplications ou division par 2, ou encore pour optimiser les choix numériques dans des situations d'encadrement.

— *à la fin* pour contrôler les résultats d'un algorithme. Par exemple, résoudre une équation en appliquant un algorithme, puis tester la validité du résultat en le substituant dans l'équation.

Une question se pose : la calculatrice peut-elle se substituer au calcul mental ? Sinon, qu'est ce qui est spécifique de chacun des modes de calcul : mental, écrit, calculatrice et comment peuvent-ils se conjuguer dans un travail où le numérique est important ?

II.2. Calcul algébrique à l'articulation collège/lycée

L'enjeu du problème ci-dessous est de travailler aux factorisations et développements d'expressions algébriques.

UN ETAT DES LIEUX

— Si l'on se réfère au programme, le calcul littéral, c'est à dire, le calcul sur des expressions comportant des lettres et des nombres est introduit en 5ᵉ. L'apprentissage de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue débute en 4ᵉ. L'introduction d'*identités remarquables* , la pratique des *développements* et des *factorisations* se fait progressivement en 4ᵉ, 3ᵉ et Seconde.

— Du point de vue mathématique, il s'agit de calculer sur des polynômes à une variable numérique, écrits sous forme de combinaisons linéaires de monômes à cœfficients réels ou de produits de facteurs. Bien sûr, ces termes mathématiques ne font pas partie du discours de la classe, ni du côté enseignant, ni du côté élèves *a fortiori.*

— En classe, dans la pratique traditionnelle, il s'agit en général d'un travail sur les écritures, coupé des problèmes qui en font l'intérêt et leur donnent du sens. Il est question de calcul littéral et non de calcul algébrique, présenté et traité soit dans le prolongement du calcul numérique ("c'est pareil mais avec des lettres") soit sous forme de règles à appliquer ("il suffit d'apprendre les règles"). Certes, la description est un peu caricaturée. Mais hors d'un certain milieu engagé dans la réflexion didactique et pédagogique, milieu qui heureusement s'étend de plus en plus, la réalité est à peu près celle décrite.

— Du côté des élèves, les erreurs persistantes et récurrentes, c'est à dire résistantes aux efforts des enseignants pour éviter qu'elles apparaissent ou à défaut pour les corriger, sont nombreuses. Elles sont largement répertoriées tant par les professeurs eux-mêmes que par les très nombreux chercheurs qui se sont penchés sur la question.

A PROPOS DE SENS

— Comme beaucoup d'autres, chercheurs, enseignants, formateurs... j'accorde une grande importance à la construction du **sens** des notions mathématiques chez les élèves, pour qu'elles soient disponibles lorsqu'ils ont à traiter une situation nouvelle.

Comme il a été noté plus haut, le sens a au moins deux composantes : *sémantique* et *syntaxique* . Pour tenir compte de sa composante sémantique, on est conduit à mettre l'accent sur le statut outil des notions et sur les mises en relation de notions différentes internes ou externes aux mathématiques. Pour tenir compte de sa composante syntaxique, on est conduit à mettre l'accent sur les systèmes de représentations symboliques, sur la façon dont ils fonctionnent et dont ils sont traités par les élèves. Le travail de modélisation algèbrique offre une occasion particulièrement favorable pour l'enseignant et les élèves d'être confrontés à ces deux composantes et à l'intérêt de leur interaction dans l'évolution de la relation didactique.

Toutefois, en ce qui concerne l'algèbre au moins, le sens ne suffit pas. La performance d'un traitement algébrique provient justement de l'*oubli* de la contextualisation qui est à l'origine.

Ainsi, on a besoin de prendre en compte l'influence du sens dans l'élaboration d'algorithmes et en même temps de travailler à s'en détacher. C'est en terme d'*équilibre ou d'interaction entre la construction du sens et la familiarité technique avec des algorithmes* que je conçois l'apprentissage du calcul algébrique.

Question : En prenant les remarques précédentes comme hypothèse, comment les traduire dans une ingénierie didactique ?

Précisons des évidences : pour que les élèves disposent en pleine responsabilité d'une compétence algébrique maîtrisée, un problème et même plusieurs problèmes ne suffisent pas. C'est une affaire de longue haleine qui demande une vigilance intellectuelle permanente. Par exemple, les interconnexions entre cadres différents ou les changements de point de vue ou de registre à l'intérieur d'un cadre réalisés pour avancer dans un problème sont des moyens par lesquels se manifeste la souplesse de pensée. Ils offrent des occasions pour confronter des idées, rechercher des cohérences, contrôler des résultats. Cependant, mettre en œuvre de telles procédures ne va pas de soi. Cela demande une véritable éducation.

Je reviendrai plus loin sur des conditions favorables à cela.

Elaboration d'un problème d'algèbre

Je me place dans le cas où enseignant et élèves sont réunis en classe de mathématiques essentiellement pour faire des mathématiques.

Dans l'exemple ci-dessous, il s'agit d'algèbre. Je décris d'abord le contexte scolaire concerné puis les objets d'étude visés. Je proposerai ensuite un problème construit pour mettre en œuvre dans sa résolution les objets d'étude choisis. Je ferai enfin une analyse mathématique et didactique de l'énoncé où j'exposerai les variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer, les choix faits et les raisons de ces choix, et aussi ce que j'attends des élèves.

LE CONTEXTE SCOLAIRE

Je m'intéresse à des élèves en fin de collège ou entrant au lycée.

De tels élèves ont, dans leur ensemble, déjà eu l'occasion de manipuler des expressions algébriques en général de petits degrés. Ils ont eu à faire des transformations d'écritures selon les règles du calcul littéral : développements (de la forme "produit" en la forme "somme"), et dans des cas limités des factorisations. Ils ont déjà résolu quelques équations du 1er degré à une inconnue. Les équations sont soit formulées directement dans le cadre algébrique, soit issues de mise en équation de petits problèmes de géométrie, mesure, vie quotidienne ou autre. Les élèves ont utilisé à diverses occasions des calculatrices. Ils ont aussi une certaine expérience du marquage de points sur un plan repéré par deux axes gradués orthogonaux.

Les objets algébriques qui nous intéressent ici sont essentiellement des polynômes à une variable, de petits degrés : de degré 1 dans les résolutions d'équation, de degré 2 ou 3, rarement plus, dans les factorisations ou développements d'expressions algébriques.

Beaucoup d'erreurs d'élèves ont été repérées dans la pratique scolaire du calcul algébrique (résolution d'équation, transformation des produits en sommes ou des sommes en produits), des erreurs récurrentes et persistantes, révélatrices d'obstacles plus profonds. Citons :

— faire glisser, selon les "besoins" du calcul, des nombres en position de cœfficient vers la position de puissance ou réciproquement. L'effet attendu est de pouvoir regrouper en un seul terme, des termes de degré différent.
— mal gérer les parenthèses.
— changer de signe systématiquement dans le passage d'une expression (éventuellement réduite à un nombre ou une lettre) d'un membre à l'autre d'une équation, même s'il s'agit seulement d'effectuer une multiplication ou une division.

Citons aussi la chute des performances si au lieu de demander de résoudre une équation, on demande si tel nombre est solution de l'équation.

A partir de tels constats, je pose la question de la pertinence et de la disponibilité de connaissances (parfois chèrement acquises en termes d'effort et de temps pour l'enseignant et pour les élèves), dans des contextes où elles seraient des outils adaptés.

LES OBJETS D'ETUDE

Dans le cadre algébrique, il s'agit de factoriser et de développer des (fonctions) polynômes. Il s'agit d'étudier les relations entre formes d'écriture et questions à traiter comme chercher les valeurs d'annulation d'un polynôme, résoudre des d'équations.

Dans le cadre graphique, il s'agit de représenter graphiquement des fonctions-polynômes et de mettre en évidence certaines de leurs propriétés.

OBJECTIFS POUR LE CHOIX DU PROBLEME

* **Coordonner** des sujets abordés et traités séparément, et qui du point de vue

mathématique entretiennent des relations de signification.

Le point de départ est le suivant : l'écriture est un moyen privilégié pour communiquer en mathématiques, mais elle est aussi un moyen pour progresser. Ici, l'écriture factorisée et l'écriture développée facilitent l'accès à des propriétés différentes des polynômes. Le problème doit mettre en relief ce point là. On espère que les élèves auront ainsi les moyens de mettre du sens dans les écritures algébriques et d'avancer dans la compréhension et la connaissance des propriétés qu'elles expriment.

Pour répondre à cette exigence, on choisit de faire intervenir, dans le problème, les objets d'étude comme **outils adaptés** pour le résoudre. Cela amène à élargir le champ mathématique sur lequel faire porter le problème. En particulier, on va faire interagir et non juxtaposer les études se situant dans les cadres algébrique et graphique et implicitement, introduire un point de vue "fonction".

* **Donner aux élèves des moyens** d'*exercer un contrôle d'ordre scientifique* sur ce qu'ils font ou disent.

* **Créer** de nouveaux objets. La résolution doit aboutir à une nouvelle connaissance qui a du sens pour les élèves et que l'enseignant peut institutionnaliser dans la classe.

Les objectifs que je viens d'exprimer sont centrés sur un point d'algèbre : les factorisations et les développements. En fait, leur mise en œuvre va amener un élargissement de la situation didactique de façon telle que bien d'autres éléments mathématiques — notions, méthodes — dans des cadres différents, vont être travaillés du point de vue du sens et de la technique. Les interactions entre cadres et les changements de cadres vont jouer un rôle clé dans ce travail.

CHOIX MATHEMATIQUES ET RAISONS DES CHOIX

En termes algébriques, pour annuler une expression polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, il est en général plus intéressant qu'elle soit formulée en un produit de facteurs du premier degré, puisqu'en annulant l'un quelconque des facteurs on annule le produit. Ainsi, dans le problème, on posera une question extérieure au cadre algébrique, cependant pour y répondre, il faudra annuler une expression polynomiale.

Pour calculer la valeur numérique d'une telle expression, la forme développée est peut-être plus commode.

Pour résoudre une équation du second degré dont une partie est écrite sous forme développée et une autre sous forme factorisée, il faut transformer l'une des formes pour homogénéiser l'écriture : tout sera développé ou tout factorisé.

Si la technique de résolution à l'aide du discriminant n'est pas disponible, alors la factorisation est le seul espoir de résoudre l'équation.

Résoudre une équation $A(x) = 0$, par exemple $ax + b = 0$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'expression $A(x)$ est égale à 0 , c'est aussi trouver les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction $x \longrightarrow A(x)$ s'annule. Nous ferons appel, selon le cas explicitement ou implicitement, à ces deux points de vue dans le problème.

En termes graphiques , annuler un polynôme, résoudre une équation se traduit par chercher les points où la représentation graphique de la fonction concernée rencontre l'axe des abscisses.

On pose les questions dans le cadre graphique, mais pour y répondre il faut travailler dans le cadre algébrique soit à faire des calculs numériques après choix d'une valeur numérique pour x , soit à résoudre des équations, travail pour lequel le choix de l'écriture peut être déterminant.

CHOIX DE SA PRESENTATION

Proposer un énoncé que presque tous les élèves doivent pouvoir attaquer avec leurs connaissances du moment, sans imposer de procédure.

Le problème

Le plan est muni d'un repère constitué de deux axes gradués, orthogonaux.

A) *On s'intéresse aux points du plan dont les coordonnées* (x,y) *sont liées par la relation :* $y = (x + 3)(8 - x/2)$

On note E l'ensemble de ces points.

1) Proposer 5 couples de coordonnées correspondant à des points de E et 5 couples de coordonnées correspondant à des points du plan n'appartenant pas à E .

2) Représenter graphiquement le plus possible de points de E

3) Y a-t-il des points de E sur l'axe des abscisses ? sur l'axe des ordonnées ?
Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points
Si non, dire pourquoi

4) Y a-t-il des points de E qui ont la même abscisse ? la même ordonnée ?
Si oui, donner des exemples. Si non, dire pourquoi.

B) *On s'intéresse maintenant à l'ensemble des points du plan dont les coordonnées* (x,y) *sont liées par la relation :* $y = x^2 - 9$
Répondre aux mêmes questions qu'au A)

C) *Y a-t-il des points communs à E et F ?*
Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points.

Comme on peut s'en rendre compte à la lecture de l'énoncé, différents cadres sont concernés dans le problème. Pour le traiter, les élèves ont intérêt à les faire interagir, à *les faire jouer.* Ceci demande qu'ils aient *assez* de compétences dans chacun d'eux. C'est pourquoi elles sont énoncées et classées ci-dessous par cadre de référence. Par ailleurs, une question se pose régulièrement à l'enseignant qui a choisi ou bati un problème : celui-ci met-il bien en œuvre les notions qu'il veut traiter dans les conditions où il le veut (apprentissage, familiarisation, test de connaissance). De plus, l'enseignant a besoin de savoir sur quelles variables il peut jouer et quelle est l'incidence de ses choix sur les comportements des élèves. Il y a là des éléments importants de sa marge de manœuvre. Ces préoccupations expliquent les descriptions qui suivent.

Les compétences

1) *Compétences supposées chez les élèves*

pour aborder le problème

* dans le *cadre graphique,*
— tracer des axes orthogonaux, les graduer,
— placer des points dont on connait les coordonnées,
— lire les coordonnées de points marqués.
— utiliser correctement le vocabulaire : repère, axes orthogonaux, graduation, coordonnées, abscisse, ordonnée.

* dans le *cadre algébrique,*
— substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur

* dans le *cadre numérique*
— bien calculer avec les entiers naturels.
— calculer de façon plus ou moins maîtrisée avec les entiers relatifs, les décimaux, les fractions.
— Utiliser une calculatrice comme aide au calcul.

2) *Compétences algébriques sans doute disponibles* et qui selon le cas

apporteront une aide ou au contraire agiront en obstacle

— développer des expressions algébriques polynomiales du 1er ou 2^{e} degré où interviennent des produits de facteurs
— factoriser dans des cas très particuliers
— résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Les cadres du problème

Les questions sont posées dans le cadre *graphique*, mais dans les données, les points sont sélectionnés par une relation *algébrique*. Le cadre *numérique* est ambiant.

Les outils

outils conceptuels

— les notions sous-jacentes aux compétences supposées comme outils explicites, notamment la mise en facteur.

— le théorème "pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul" comme outil implicite.

outil technologique

La calculatrice si possible programmable : elle permet, une fois la méthode de travail décidée (substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur) de programmer la calculatrice et d'obtenir les coordonnées d'une grande quantité de points de E puis de F et d'avoir une vue géométrique de ces ensembles.

Les variables du problème

* concernant les *relations algébriques*
— le degré : 2 ou 3
— l'expression écrite : factorisée ou développée
— l'ordre des monômes : dans une lecture de gauche à droite, d'abord le terme en x ou d'abord la constante
— les cœfficients numériques : entiers, non entiers, positifs, négatifs...
— les valeurs d'annulation

* concernant le *graphique*
— le nombre de points à marquer : fini ou infini
— la position des points à sélectionner :

n'importe où, sur l'un des axes dans les limites du support matériel du graphique ou hors de ces limites, hors des axes mais avec une condition restrictive

* concernant le *numérique* : recueil et traitement d'une information numérique pertinente

— l'usage ou non d'une calculatrice. Si oui, d'une calculatrice simple ou programmable : le traitement du problème pourra être alors très différent.

Les choix didactiques qui fixent les variables et les attentes de l'enseignant

Dans la partie A)

* la *première attente* de l'enseignant est que les élèves donnent du sens à l'expression " x et y sont liés par la relation...". Pour tester cela, on demande de placer 5 points dont les coordonnées vérifient la relation et 5 points qui ne la vérifient pas. En cas de difficulté, l'enseignant peut engager une discussion dans la classe sur le sens à accorder à cette expression.

* La *deuxième attente* concerne la connaissance plus ou moins grande des points de E . La calculatrice programmable permet, une fois la méthode de travail décidée (substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur) de programmer et d'obtenir les coordonnées d'une grande quantité de points de E , puis ensuite de F. Il est possible alors d'avoir une vue géométrique de ces ensembles. Cela permettra plus tard de concevoir les points communs à E et F comme les points d'intersection de deux courbes.

Le choix de deux paraboles dont la concavité est de sens opposé et les sommets pas trop éloignés l'un de l'autre correspond à une volonté de faciliter chez les élèves la conviction d'existence géométrique des points d'intersection. Il restera à faire un travail technique à l'aide d'outils algébriques, à savoir calculer les coordonnées de ces points, pour en prouver effectivement l'existence.

Je viens de décrire ce que j'appelle un *jeu de cadres* entre les cadres algébrique et graphique, en exploitant dans chacun d'eux ce qui est facile et qui, par transfert dans l'autre, permet d'avancer dans le problème.

* La *troisième attente* est que les élèves mettent en relation les éléments suivants :

— *tel point est sur l'axe des x*
avec *son ordonnée $y = 0$*

— *chercher les valeurs de x qui annulent y*
avec *résoudre l'équation $y = 0$*

et en déduisent un moyen pour trouver les points de E sur l'axe des abscisses. La relation algébrique choisie est écrite sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré pour faciliter la recherche des valeurs de x annulant y. Toutefois, vu la familiarité des élèves avec les expressions développées, on peut penser qu'un certain nombre d'entre eux auront tendance à développer le produit de facteurs. Or ces élèves ne savent pas résoudre les trinômes du second degré. L'expression développée les mène à une impasse, d'où certains arrivent à se tirer par des amalgames audacieux !

Les cœfficients sont choisis de façon que

— une des racines soit égale à un entier petit et puisse être trouvée après un petit nombre d'essais de valeurs entières pour x .

— l'autre prenne une valeur assez grande pour échapper aux essais et corresponde à un point hors de la feuille support du graphique. Il faut alors explicitement résoudre une équation du premier degré.

* La *quatrième attente* est que les élèves transforment une méthode :

"je choisis une valeur pour x , n'importe laquelle, celle que je veux, je fais mon calcul en suivant la formule, je trouve la valeur de y "

en une propriété de la relation :

"à chaque valeur de x correspond une valeur de y et une seule"

et par suite en une caractéristique de l'ensemble E :

à toute valeur de x correspond un point de E et un seul.

Dans la partie B), la demande est analogue à la précédente mais à partir d'une relation algébrique qui est une identité remarquable "différence de 2 carrés". L'enseignant attend une résolution très rapide de cette partie. Son intérêt est double :

— évaluer les élèves sur ce qu'ils ont appris de la partie A) et en tout cas, leur donner l'occasion de se reposer les mêmes questions et le cas échéant de mieux les comprendre.
— préparer la partie C), véritable enjeu du problème.

Dans la partie C), on demande aux élèves de trouver des points communs aux deux ensembles décrits respectivement en A) et en B).

Graphiquement, un point commun à E et F a des coordonnées (x,y) où y s'exprime différemment en fonction de x suivant qu'on le considère comme point de E ou point de F (notons les y_E et y_F). Le travail précédent doit en principe mener les élèves à la traduction algébrique de la question. Or, algébriquement, il va falloir que le signe " = " prenne une autre signification que celle qu'il a pu prendre au cours de l'étude des parties précédentes. En effet, l'ordonnée y était alors le résultat d'un calcul et le signe " = " voulait dire "a pour résultat". La référence graphique — un point a un unique couple de coordonnées — suggère d'écrire $y_E = y_F$ pour exprimer que l'ordonnée d'un point commun à E et à F peut s'écrire de deux manières, ce qui n'a rien à voir avec le résultat d'un calcul. Par ailleurs, cette égalité n'a lieu que pour les points communs à E et à F. Autrement dit, il y a autant de points communs que de valeurs de x réalisant cette égalité. Algébriquement, cela se traduit par la résolution d'une équation du second degré comportant des termes en x dans les deux membres. Or il s'agit là d'une difficulté bien repérée par les enseignants et les chercheurs sur le sujet, même si l'équation est du premier degré. Pour faciliter la tâche, nous avons choisi l'un des points sur l'axe des x de sorte qu'il fasse partie des points déjà repérés graphiquement, dans les deux ensembles. Il correspond à $x + 3 = 0$. Vu les choix décrits plus haut des positions relatives des paraboles, l'autre point est visible graphiquement (figure 1).

Pour que la résolution algébrique soit nécessaire, il faut choisir les coordonnées de ce point, donc les cœfficients des équations, de façon qu'elles ne puissent pas être trouvées après quelques essais empiriques.

Ainsi, pour résoudre l'équation

$x^2 - 9 = (x + 3)(8 - x/2)$ le développement et le regroupement des termes de même degré

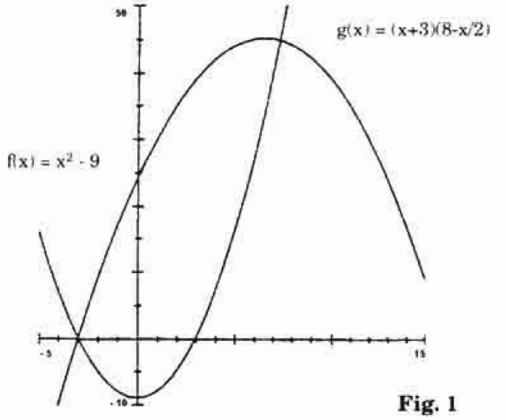

Fig. 1

mènent à l'impasse, du moins si les règles du calcul algébrique sont respectées. L'expression du premier membre sous la forme d'un produit $(x - 3)(x + 3)$ est incontournable. La factorisation est un outil. La résolution de $x - 3 = 8 - x/2$ est un autre outil. La valeur $x = 22/3$ ne peut pas être trouvée par hasard.

UN REGARD DU COTE DES ELEVES

Au cours de ce travail, les élèves peuvent commettre beaucoup d'erreurs. Ils peuvent notamment produire des calculs non valides mathématiquement comme regrouper des termes de degré différent si cela leur permet d'aboutir à une réponse.

C'est alors que la référence graphique est intéressante *s'il est d'usage* dans la classe de chercher des cohérences entre les résultats de deux procédures différentes pour une même question.

En effet, rechercher des cohérences peut demander beaucoup de temps. Si un élève s'engage dans un tel travail et n'aboutit pas à un résultat convaincant et si le travail ainsi fourni n'est pas officiellement reconnu par le professeur, cet élève aura peu envie de recommencer. Pourtant, la prise en charge au moins partielle du contrôle des productions par les élèves eux-mêmes peut être un moteur de la progression des apprentissages. Un tel travail demande des compétences mathématiques. Il demande aussi de s'inscrire dans le contrat didactique.

Revenons au problème. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, la connaissance graphique de la situation peut agir en *guide*, mais elle peut agir aussi en *contrôle* de la situation algébrique. Un des points communs est déjà connu, il faut le retrouver dans la résolution algébrique. L'autre est accessible en résolvant une équation du premier degré à petits cœfficients $x - 3 = 8 - x/2$ pour le calcul de x. Il restera ensuite à calculer la valeur de y correspondante.

Les coordonnées doivent correspondre à des valeurs acceptables graphiquement.

UN REGARD DU COTE DE L'ENSEIGNANT

En faisant varier les cœfficients des polynômes, l'enseignant peut changer ses objectifs. Si l'objectif est d'abord d'ordre conceptuel, il peut faciliter la tâche technique des élèves tout en préservant la force et la signification des concepts en jeu. Cela se traduira soit en faisant des choix en ce sens dans les données du problème, soit en mettant à portée des technologies (calculatrices, ordinateur) qui aident les élèves à maîtriser les difficultés techniques, soit les deux à la fois comme dans le problème ci-dessus.

Si l'objectif est plutôt de créer des familiarités ou de tester les possibilités de réinvestissement dans des situations plus complexes où ce qui vient d'être appris n'est qu'un élément de la situation, alors l'enjeu peut être technique.

Institutionnalisation locale, attachée au contexte

Après tout le travail de la classe sur le problème, il revient à l'enseignant de sélectionner ce qui a pris sens du côté des élèves, qui est mathématiquement intéressant et réinvestissable et qui fait partie soit directement de ses objets d'enseignement, soit en est un préalable, soit une pratique du champ des objets du programme. En faisant cela l'enseignant organise explicitement le savoir de la classe. Si ce savoir est attaché à la classe, je parlerai d'institutionnalisation locale. S'il est relativement décontextualisé et dépersonnalisé donc susceptible d'être communiqué et compris à l'extérieur sans en connaître l'histoire de sa production, les connaissances en jeu ont plutôt un statut d'objet et je parle d'institutionnalisation. Pour résumer, je dirai que l'enseignant va faire cours.

Dans le cas qu'on étudie ici, on a à faire essentiellement de l'institutionnalisation locale

— du *vocabulaire* :

$y = (x + 3)(8 - x/2)$ est appelée ***équation de*** E ,
$y = x^2 - 9$ est l'équation de F . On pourra déclarer que ces équations sont de ***degré*** 2 en expliquant d'où vient le 2.

— des *mises en relation* entre *graphique* et *algèbre*

* les points de E sur l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x,0)$. Donc x est solution de $(x + 3)(8 - x/2) = 0$
* les points de F sur l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x,0)$ où x est solution de $x^2 - 9 = 0$

— une *nouvelle connaissance en algèbre*

* il y a des cas où on sait résoudre des équations du second degré :

quand il n'y a pas de terme en x comme dans l'équation de F
quand on peut l'écrire sous forme d'un produit de facteurs, par exemple en repérant un facteur commun ou une identité remarquable. Alors si l'un des facteurs est nul, le produit est nul. Réciproquement, si un produit $A.B = 0$ c'est que soit $A = 0$ soit $B = 0$.

* *Une méthode* : pour résoudre une équation du second degré de la forme $A.B = 0$, on résout deux équations du premier degré : $A = 0$ et $B = 0$. Chacune de ces deux équations a une solution qui est aussi solution de l'équation du second degré proposée.

On notera que, du côté de l'enseignant, l'institutionnalisation est un processus qui débute avec le choix du problème, avec les décisions qui organisent la situation didactique et que le cours n'est qu'une étape du processus. Mais, du côté des élèves, le processus n'est peut-être pas vécu comme tel, c'est à dire comme un ensemble d'étapes articulées de façon cohérente par rapport à un objectif d'apprentissage. En particulier, l'enseignant peut trouver des difficultés avec certaines populations d'élèves à réaliser la situation qu'il a conçue à des fins didactiques (*cf.* & I). Réaliser veut dire faire la dévolution du problème : les élèves vont se trouver en interaction scientifique avec le problème pendant un moment sans médiation du maître pour dire ce qu'on a le droit de faire. Cela veut dire ensuite que ces élèves sont conscients que la situation (a-didactique) conçue par leur maître et qu'ils viennent de vivre est constitutive du sens de ce qui sera institutionnalisé plus tard. M.-J. Perrin, dans sa recherche sur les élèves de milieu populaire (1992) met bien en évidence le fait que, la pupart d'entre eux n'établit aucun rapport entre le travail pour résoudre un problème que le maître a proposé d'une part et le cours que le maître fait ensuite en croyant s'appuyer sur les actions des élèves d'autre part. Les conditions de cette articulation ne sont sans doute pas toujours faciles à établir. Les leviers pertinents ne sont pas forcément accessibles à l'enseignant. En tout état de cause, c'est une question à prendre en compte dès le début de la réflexion sur l'organisation de la situation didactique.

Des conditions pour qu'un problème
soit source et occasion d'apprentissage

La situation d'apprentissage que nous venons de présenter est centrée sur la recherche d'un problème qui répond à certaines conditions. Enonçons les plus importantes :

* *à l'aide de ses connaissances antérieures, un élève peut comprendre l'énoncé.* Cela veut dire donner un certain sens aux mots et aux phrases employés. De plus, il a des idées pour aborder le problème, il peut démarrer.

* *avec ses connaissances, l'élève ne peut pas résoudre complètement le problème.* Il ne s'agit pas d'une simple application de notions ou méthode connues.

Les raisons peuvent être diverses. Il se peut que les notions mathématiques pertinentes ne fassent pas explicitement partie des connaissances de l'élève. C'est ce qui se passe dans les parties A) et B) question 2) du problème proposé où la notion pertinente est celle de fonction. Il se peut que l'élève dispose de ces notions mais dans un autre contexte et il peut avoir des difficultés à les adapter au nouveau contexte. C'est ce qui se passe dans la partie C) où la factorisation des deux membres de l'équation est l'outil adapté pour la résoudre.

* *les objets d'enseignement, ce que l'enseignant veut que les élèves apprennent et retiennent, sont des outils adaptés à la résolution du problème.*

Dans le problème ci-dessus, la factorisation est outil de résolution d'équations du second degré.

* *le problème s'exprime dans au moins deux cadres.*

Ici, les cadres graphique et algébrique interagissent pour faire avancer l'étude : suggérer des procédures et en contrôler les effets.

Familiarisation et réinvestissement

Même si la situation d'apprentissage se déroule selon les attentes de l'enseignant, la question se pose de savoir ce que les élèves auront effectivement appris et ce qu'ils seront capables de réinvestir dans des problèmes relevant d'un même contexte mais plus complexe ou relevant d'un contexte tout différent, de complexité comparable ou plus complexe.

En fait, avant de pouvoir réinvestir, les élèves ont besoin de *se familiariser* avec leur nouveau savoir. Un moyen est de leur proposer d'abord de traiter des exemples de problèmes proches de celui qu'ils ont déjà étudié. Par exemple,

— résoudre l'équation

$$x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 5) = 0$$

La factorisation est ici l'outil adapté, mais le texte ne dit rien à ce sujet. Toutefois, $x^2 - 4$ est une différence visible de deux carrés.

— résoudre d'autres questions du même ordre.

— transformer systématiquement des produits en sommes et des sommes bien choisies en produits.

Réinvestir dans des problèmes plus complexes

— des questions où la factorisation est moins évidente et où la représentation graphique sera bien utile :

* Y a-t-il des points communs aux deux ensembles d'équations $y = x^2 - x - 6$ et $y = (x + 2)(8x - 7)$
* Même question pour les ensembles d'équation $y = 5x^2 + x - 18$ et $y = (x + 2)(8x - 7)$

Ici, le contexte n'a pas changé.

A travers ces deux dernières questions, un problème nouveau est abordé.

Comment factoriser une expression qui n'a pas de "facteur commun" apparent ou presque apparent comme $(x + 2)$ dans la première équation ?

L'outil adapté et inconnu des élèves est le théorème suivant :

"si l'expression s'annule pour $x = a$, alors il est possible de factoriser par $(x - a)$ ".

Or c'est la proposition réciproque qui a été à l'œuvre dans les exercices de résolution d'équations du second degré très particulières qui ont été traitées. Pour avancer, on a besoin d'expliciter la relation entre les facteurs du premier degré de la factorisation et les solutions trouvées à l'équation. On peut ensuite tenter d'en dégager une méthode valable dans certains cas.

Pour factoriser une expression du second degré, on cherche par toutes sortes de moyens (calcul, graphique) des valeurs de x qui l'annulent.

— Si on en trouve deux, tant mieux et on peut écrire les deux facteurs, au besoin en ajustant le cœfficient de x^2.

— Si on en trouve un, on peut écrire le facteur correspondant à cette valeur et se débrouiller pour en trouver un autre de façon qu'en redéveloppant, on retrouve l'expression de départ à une constante près.

— Si on n'en trouve pas du tout, on ne sait rien faire.

Notons que l'ingénierie décrite ci-dessus peut s'étaler sur une longue période de quelques mois. Au cours de cette période, la question est étudiée, laissée au repos, reprise dans des problèmes différents. Ce qui est visé, c'est l'étude ultérieure des polynômes, un objet important en mathématiques. Pour une telle étude, le travail proposé permet de poser des jalons qui ont du sens pour les élèves.

Je viens de décrire un exemple de déroulement de la *dialectique outil-objet* avec des *jeux de cadres* (R. Douady, 1984, 1985, 1987) entre le graphique et l'algébrique. Elle s'enclenche à partir d'un problème qui satisfait certaines conditions que j'ai énonçées.

Les *fenêtres conceptuelles* (R. Douady, 1991) que les élèves mobilisent diffèrent d'un élève à l'autre. Je désigne de cette façon l'ensemble des parties de cadres qu'un élève fait interagir ou combine pour étudier le problème qui lui est soumis. Elles comprennent ici, des représentations graphiques constituées d'ensembles de points, des éléments du cadre algébrique (certaines identités remarquables, des équations, des expressions algébriques diverses, quelques règles opératoires), des nombres et des moyens de calcul, quelques fonctions linéaires ou affines. Pour un élève donné, la fenêtre évolue au cours du travail en relation avec les questions et les méthodes que sa connaissance lui suggère. Les fenêtres constituent les supports des jeux de cadres. Il peut s'agir aussi d'un ensemble d'éléments d'un cadre qui trouve comme auparavant sa pertinence dans le problème posé et les stratégies développées pour l'étudier (par un élève ou un groupe d'élèves à un moment donné). Au cours de l'étude, différents registres ou différents points de vue peuvent interagir dans ce cadre. Ici, par exemple, le registre des équations et de leur résolution, celui des variations numériques d'une expression algébrique et de ses valeurs d'annulation, celui de la factorisation. Tout cela se passe dans le cadre algébrique.

III. Conclusion

L'ingénierie présentée ci-dessus est un exemple de mise en scène de la dialectique outil-objet. Elle emprunte aussi des éléments importants de la théorie des situations de G. Brousseau comme le contrat didactique. Elle est organisée autour de problèmes qui donnent du sens aux notions mathématiques impliquées. Elle accorde une place importante au processus de contextualisation, changement de contexte, reformulation des problèmes, décontextualisation et aussi à la personnalisation, diffusion des procédures ou connaissances personnelles, dépersonnalisation. Autrement dit, il s'agit pour l'enseignant d'organiser la transformation des statuts outil en objet et vice versa. Son objectif est de permettre aux élèves de capitaliser du savoir qui, en situation, est disponible et prend sens pour eux. Dans ce travail, l'exploitation de changements de cadres ou changements de points de vue au sein d'un cadre joue un rôle clé. Tout cela demande que le maître soit dans des conditions lui permettant d'assurer le dévolution du problème et donc l'entrée des élèves dans une interaction directe avec le problème. Dans ce travail, le maître n'a pas une fonction d'autorité mais il est un partenaire scientifique. Or ceci n'est pas toujours possible. Les recherches d'A. Robert, J. Robinet et d'autres chercheurs montrent l'importance de la mise en place et de l'exploitation de métaconnaissances, de l'usage d'un discours *sur* les mathématiques pour faciliter l'accès à certains concepts ou à certains domaines mathématiques.

Par ailleurs, admettons que cette étape soit réalisée, que les élèves aient effectivement travaillé au problème et produit des résultats attachés au problème. Il reste encore à l'enseignant à engager la décontextualisation et la dépersonnalisation de certains éléments qu'il choisit pour des raisons liées à ses intentions d'enseignement et aux comportements des élèves dans le traitement du problème qui leur était proposé. Autrement dit, l'enseignant doit institutionnaliser certains éléments : notions, méthode, pratique en s'appuyant sur les réalisations des élèves. Or là encore, il y a des populations d'élèves pour qui la relation entre ces deux étapes n'a rien d'évident : travailler à un problème n'implique pas qu'on fera quelque chose plus tard de ce travail. Pourtant, cette relation est une condition nécessaire pour que la situation de recherche dans laquelle un élève s'est effectivement impliqué ait une fonction d'apprentissage pour cet élève.

Au cours des expériences didactiques menées avec M.-J. Perrin, nous avons pu repérer des situations particulièrement intéressantes pour favoriser les relations nécessaires mentionnées ci-dessus. Ce sont *les situations de rappel.*

Nous entendons par là un moment en début de séance où l'enseignant demande aux élèves de *rappeler* les points essentiels des séances antérieures sur un thème donné encore en cours d'étude. Le compte rendu est sous le contrôle mutuel des élèves. L'enseignant renvoie les questions, éventuellement en pose, reprend les informations exprimées mais n'en apporte aucune lui-même. C'est une phase clé dans la sélection et la mémorisation des évènements importants, dans la mise en relation avec les séances ultérieures, dans la décontextualisation et dans la dépersonnalisation de ce que le maître voudra institutionnaliser plus tard. En effet, la pratique des rappels sous la responsabilité des élèves est intéressante à instituer car à chaque séance ou presque, le travail demandé va se situer par rapport au travail, aux questions ou aux résultats antérieurs. Ainsi, chaque élève sait qu'il doit retenir les points essentiels du déroulement d'une séance en prévision de la suivante. En fait, les situations sont souvent complexes et un élève ne peut remplir à lui seul le contrat. Mais l'ensemble de la classe en général le peut.

Notons cependant que si le maître est impatient ou exigeant sur les rappels à faire et assure lui-même cette fonction, les rappels sont effectivement assurés convenablement, mais la situation ne remplit plus du tout son rôle didactique pour les élèves. Elle ne participe plus à la décontextualisation et à la dépersonnalisation nécessaires. Elle n'est plus une pression pour que les élèves considèrent l'étude du problème comme une partie du processus d'apprentissage.

Pour conclure, énumérons des objectifs prioritaires que M.-J. Perrin(1993) a relevé à la suite de son travail avec des élèves de milieu populaire.

— *faire dévolution d'un enjeu général à travers des enjeux plus ponctuels*

— *favoriser la création de représentations mentales de l'action permettant un début de décontextualisation, et pour cela donner aux élèves plusieurs occasions de les construire*

— *favoriser le travail personnel de l'élève et notamment le travail à la maison, et pour cela faire en sorte qu'ils soient capables d'utiliser le manuel*

— *rendre possible et développer des formes de communication et d'interactions entre* *élèves dans le travail collectif ou en groupes,*

— *faire évoluer leur rapport à l'évaluation pour le rendre plus compatible avec un fonctionnement scientifique.*

Comme on peut le constater, certains sont bien pris en charge dans l'ingénierie présentée. D'autres, tels le travail à la maison et l'utilisation de manuels sont à intégrer dans le déroulement de l'ingénierie.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. (1989) "Ingénierie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 9.3, pp. 281-308, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BAUTIER E. et ROBERT, A. (1988) "Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques", *Revue Française de pédagogie* n° 84 pp. 13-19, INRP, Paris.

BROUSSEAU G. (1987) "Fondements et méthodes de la didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 7.2, pp. 33-115 ,La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990) "Le contrat didactique : le milieu",*Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 9.3, pp. 309-336, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHARLOT B. et BAUTIER E. (1993) "Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques", *Repères* IREM n° 10.

DOUADY R. (1984) "Jeux de cadres et Dialectique outil-objet ", *Cahier de Didactique* n° 3, IREM PARIS 7.

DOUADY R. (1987) "Jeux de cadres et Dialectique outil-objet", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 7.2, pp. 5-32, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.-J (1989) "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane", *Educational Studies in Mathematics,* n° 20, pp. 387-424.

DOUADY R. (1992) "Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement", *Repères - IREM* , n° 6.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1993) "Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes 'faibles' ", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 13.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. et ROBINET J. (1989a) "Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement", *Cahier de DIDIREM,* n° 1, IREM PARIS 7.

VERGNAUD G. (1991) "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 10.2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble.