QU'EST-CE QU'UNE GRANDEUR ? ANALYSE D'UN SEUIL EPISTEMOLOGIQUE

Nicolas ROUCHE (*)

1. INTRODUCTION

Les grandeurs sont le sujet du Cinquième Livre d'Euclide — l'un des plus importants des Eléments — et de nombreux travaux ultérieurs. Elles sont aussi l'objet de multiples observations et opérations quotidiennes : une chose est plus lourde qu'une autre, on ajoute une longueur à une autre, etc.

Or le progrès de la technologie au cours du XX^e siècle a abouti à une conséquence paradoxale. En effet, alors qu'un nombre croissant d'actions même parmi les plus quotidiennes s'appuient sur des mesures, les êtres humains manipulent de moins en moins des grandeurs dans des opérations pratiques de mesure : ils lisent directement sur des cadrans les résultats des mesures exécutées par des instruments automatiques.

Au cours du même siècle ou à peu près, les grandeurs ont disparu des mathématiques. Alors qu'elles avaient été au long de l'histoire le matériau même de l'élaboration des nombres, elles ont été remplacées par la théorie des nombres réels directement construits à partir des naturels, eux-mêmes rattachés à la théorie des ensembles. La mesure des grandeurs (à ne pas confondre avec la théorie mathématique de la mesure) est passée dans le domaine de la physique.

Les grandeurs ayant disparu des mathématiques, elles ont aussi quasiment disparu de l'enseignement, tout au moins aux niveaux secondaire et supérieur. Heureusement toutefois, l'étude de la droite réelle demeure associée à l'idée de mesure des longueurs. Il reste quelques traces des grandeurs dans l'enseignement primaire, principalement sous la forme de manipulations introduisant aux fractions et aussi dans l'étude du système décimal de mesures.

(*) Université de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Or même si les grandeurs ont disparu des mathématiques constituées, elles demeurent sans doute un passage obligé pour les enfants. En effet, d'abord nous vivons au milieu d'objets qu'il nous faut, avant même toute idée élaborée de mesure, saisir sous leur aspect de grandeur, et déjà à ce niveau un certain nombre de choses ne vont pas de soi. Ensuite, puisqu'on recourt sans cesse à des mesures dans la vie civilisée d'aujourd'hui, il faut bien apprendre en quoi elles consistent et ce qu'elles nous apportent. Enfin on peut croire que même si les réels peuvent être tirés axiomatiquement des ensembles sans passer par les grandeurs, la genèse des nombres dans chaque esprit passe nécessairement par les grandeurs et leur mesure.

Acceptons donc ce point de départ : il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. *Bien sûr, il ne faut surtout pas organiser à ce niveau un enseignement axiomatique*. Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on ne le croirait de prime abord (voir un essai d'inventaire dans N. Rouche [6]).

Qui plus est, certains d'entre eux sont aussi moins simples qu'il n'y paraît et sources de confusions chez beaucoup d'adultes. C'est pourquoi il faut essayer de les clarifier, de leur donner un statut logique satisfaisant. Une manière de le faire consiste à rassembler dans un exposé axiomatique ceux d'entre eux qui se prêtent à cela.

Soulignons enfin que ce qui suit ne porte que sur la notion élémentaire de grandeur et ne touche pas à la question des rapports irrationnels et de la continuité. Cet exposé s'adresse particulièrement à ceux des responsables de l'enseignement mathématique qui auront le temps et le goût de regarder quelles difficultés peuvent empêcher un accord immédiat entre le savoir quotidien et sa contrepartie mathématique.

Mais à qui donc est destiné un tel exposé si, comme on vient de le dire, il n'est pas fait pour les enfants ? Ceux-ci doivent pourtant, au cours de leur scolarité, accéder aux grandeurs, aux mesures et aux nombres dans les cours de sciences et de mathématiques. Ils butent en cours de route contre des obstacles qui tiennent aux relations difficiles entre l'expérience commune et la logique. Une mise en ordre déductive de la notion de grandeur peut aider les enseignants à interpréter ces obstacles, et donc à aider à leur tour les élèves.

Mais la chose ne va pas de soi. En effet, un enseignant qui sera devenu familier de la théorie axiomatique la jugera limpide, et paradoxalement ne verra plus les difficultés des élèves. Il aura tendance alors à leur imposer ses propres évidences et à leur donner à croire que ce qui leur paraît difficile est "en réalité bien simple". Ce qui bien entendu ne marche pas et peut avoir deux effets. Le premier est d'éloigner certains élèves des mathématiques : ils rejettent ces pseudo-évidences (ce qui est plutôt un signe de santé intellectuelle), mais aussi se persuadent qu'ils sont mauvais en math. Le second concerne d'autres élèves : ceux qui n'ont pas besoin d'évidences personnelles pour manier des choses de pure forme selon les instructions du maître. Ceux-là ne perçoivent plus guère de liens entre la réalité et les mathématiques. Ils en viennent à considérer celles-ci comme une discipline arbitraire, dans laquelle l'idée même d'évidence n'a plus cours.

Que faire, sinon d'abord construire une axiomatique la plus proche possible de l'expérience et du sens communs, mais ensuite constater et commenter les inévitables points de désaccord qui demeureront entre cette axiomatique et la réalité familière ? Tel est l'objet principal du présent article.

Pour assurer la cohérence d'un enseignement, il ne suffit pas que le professeur connaisse bien "la matière", c'est-à-dire la théorie mathématique polie. Il faut encore qu'il saisisse dans le détail les relations difficiles de cette matière avec les notions spontanées des élèves. Il faut qu'il fasse partager à ceux-ci, au cours de leurs études, progressivement, les vrais motifs des choix "bizarres" de la théorisation : ce sont toujours les exigences du raisonnement. Les concepts mathématiques sont construits dans leur technicité bien connue pour servir d'instruments de démonstration.

Plusieurs jeux d'axiomes sont possibles pour les grandeurs. Celui qui est présenté et argumenté ci-après résulte d'un aménagement d'une autre axiomatique proposée dans N. Rouche [6].

Ce travail a été provoqué et inspiré par plusieurs conversations intéressantes avec P. Van Praag. Une première version en sera publiée dans le *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*. Elle a bénéficié des remarques judicieuses de Th. Gilbert et Ch. Hauchart. Elle a ensuite été remaniée sur les conseils de M. Legrand et J. Sip, avant la présente publication dans *Repères*. Que toutes ces personnes soient ici amicalement remerciées. Merci aussi à la Société Mathématique de Belgique d'avoir autorisé la reprise de ce texte dans *Repères*.

2. Un système d'axiomes pour les grandeurs

Avertissement. Nous avons regroupé nos axiomes sur les grandeurs dans cette seule section, pour en faciliter la lecture et la comparaison. Nous suggérons néanmoins au lecteur de n'en prendre connaissance que progressivement, pour que chacun soit accompagné des commentaires qui le concernent. Les axiomes (i) à (iii) sont commentés au n° 3.1, les axiomes (iv) et (v) au n° 3.2, et ainsi de suite.

Comme annoncé, ce système d'axiomes ci-après a été choisi tel qu'il apparaisse le plus proche possible de l'expérience commune. L'ensemble X pourra être interprété en imagination comme constitué de baguettes que l'on compare en les disposant côte à côte, que l'on additionne en les mettant bout à bout, etc. On pourra aussi penser à des boules de plasticine que l'on compare en les posant sur les plateaux d'une balance à fléau, que l'on additionne en les collant l'une à l'autre, etc.

Soit X un ensemble non vide. Munissons-le tout d'abord d'une relation $\sim$ (qui s'avérera être une *équivalence*) telle que

(i) $\forall a, b \in X \;\; a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$;
(ii) $\forall a, b, c \in X \;\; a \sim b$ *et* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$;
(iii) $\forall a \in X \;\; \exists b \in X \;\; a \neq b$ *et* $a \sim b$.

Munissons ensuite X d'une relation $\prec$ (qui engendrera un *ordre total*) telle que

(iv) $\forall a, b \in X$ *on a une et une seule des trois situations* $a \prec b$, $a \sim b$, $b \prec a$;
(v) $\forall a, b, c \in X \;\; a \prec b$ *et* $b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

Vient ensuite une opération d'*addition* $\oplus$ telle que

(vi) $\forall a, b \in X \quad a \oplus b$ *est défini* $\Leftrightarrow a \neq b$;
(vii) $\forall a, b, c \in X$ *si* $a \sim b$, *et si* $a \oplus c$ *et* $b \oplus c$ *sont définis alors* $a \oplus c \sim b \oplus c$;
(viii) $\forall a, b \in X \quad a \oplus b$ *est défini* $\Rightarrow a \oplus b \sim b \oplus a$;
(ix) $\forall a, b, c \in X$ *si* $(a \oplus b) \oplus c$ *et* $a \oplus (b \oplus c)$ *sont définis, alors* $(a \oplus b) \oplus c \sim a \oplus (b \oplus c)$.

L'axiome suivant concerne à la fois l'*addition* et l'*ordre* :

(x) $\forall a, b \in X \quad a \prec b \Leftrightarrow \exists c \in X \; a \oplus c$ *est défini et* $b \sim a \oplus c$.

Enfin un dernier axiome prépare la *division* d'une grandeur *par un naturel*.

(xi) $\forall a \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \; n > 0$

$\exists b_1, b_2, \ldots, b_n \in X$

$b_1 \sim b_2 \sim \ldots \sim b_n$, $(\ldots((b_1 \oplus b_2) \oplus b_3) \oplus \ldots \oplus b_n)$ *est défini et équivalent à* a.

3. Les axiomes et le sens commun

On l'aura remarqué, ces axiomes introduisent une par une les structures $\sim$, $\prec$ et $\oplus$ sur l'ensemble X. C'est que l'équivalence, l'ordre, la somme (et aussi le partage en n morceaux égaux) sont des notions familières et discernables — jusqu'à un certain point — dans l'expérience commune, et nous avons cherché à ce que les axiomes reflètent cette situation. Mais c'est là un choix parmi d'autres possibles (par ex. H. Freudenthal [2]) définit l'ordre à partir de la somme).

3.1. L'équivalence

La symétrie (axiome (i)) traduit clairement un aspect de l'expérience quotidienne : on vérifie l'équivalence de deux baguettes en portant l'une sur l'autre, ou celle-ci sur la première. Ces deux manipulations distinctes donnent toujours le même résultat. C'est le genre d'expérience élémentaire et profonde que chaque enfant doit acquérir.

La transitivité (axiome (ii)) est de même maîtrisée dans la prime enfance et sert sans cesse dans la vie quotidienne.

Dans l'ouvrage principal qu'ils consacrent à ces questions, Piaget *et al.* [5] ont étudié l'acquisition de la transitivité chez les jeunes enfants. Par contre ils n'étudient pas la symétrie : tout se passe comme s'il leur semblait indifférent qu'un objet (allongé) soit porté sur un autre, ou l'inverse, ou que les deux soient rapprochés en un même lieu quelconque. Cette omission serait-elle due au fait que la symétrie est tellement naturelle, tellement incorporée à l'expérience de chacun qu'elle ne se signalerait pas à l'attention du psychologue ? Nous laisserons cette question sans réponse.

Observons par ailleurs qu'il est difficile d'enseigner la symétrie et la transitivité à la plupart des élèves, pour la raison même qui vient d'être invoquée : ces propriétés sont à ce point ancrées dans l'expérience ancienne et intime de chacun qu'elles vont absolument de soi. Elles sont passées à l'état d'évidences, des évidences acquises certes, mais au cours de tâtonnements enfantins depuis longtemps oubliés. Pourquoi expliciter des évidences qui, sans qu'on les formule, guident tant d'actions utiles ? La réponse est qu'on énonce ces propriétés évidentes pour les engager dans des raisonnements et construire une théorie, ce qui n'est pas au départ un projet d'enfant (mais peut le devenir au cours de la scolarité...)

Le lecteur s'attendait sans doute à trouver, à la place de l'axiome (iii), *la réflexivité*, c'est-à-dire

(iii)' $\forall a \in X \quad a \sim a$.

Au rebours de la symétrie et de la transitivité, cette propriété ne se vérifie pas par des manipulations. Elle est étrange car pour le sens commun l'équivalence concerne toujours *deux* baguettes : si on peut faire coïncider leurs bouts, elles sont déclarées équivalentes. Or voici qu'on est amené à considérer l'équivalence d'une baguette avec elle-même. Etendre l'opération de comparaison à une seule baguette est une vue de l'esprit, une fiction intellectuelle. Constater que chaque bout coïncide avec lui-même passe par une sorte de dédoublement purement mental et nécessairement momentané de la baguette. Il se peut que pour certains esprits la coïncidence de la baguette avec elle-même soit plus parfaite que n'importe quelle coïncidence de deux baguettes et que la réflexivité soit d'une évidence aveuglante. A d'autres par contre, cette propriété paraît dérangeante et ils se demandent pourquoi on éprouve le besoin de l'énoncer.

Quelle est donc la raison d'être de l'axiome (iii)' ? La réponse semble assez claire : s'il n'exprime pas une propriété évidente de l'univers familier, c'est qu'il répond à une nécessité du raisonnement. Pour expliquer cela, considérons un ensemble quelconque de baguettes. Dans l'univers quotidien, on peut rassembler en lots distincts les baguettes de même taille, et personne ne s'étonne s'il se trouve certaines baguettes isolées. Il s'agit chaque fois d'une baguette seule de sa taille, et il ne vient à l'idée de personne, pour justifier la constitution d'un "lot" d'une seule baguette, de comparer celle-ci à elle-même.

Du point de vue mathématique, la constitution des lots disjoints de baguettes de même taille correspond au passage de l'ensemble des baguettes à l'ensemble quotient par la relation "être de même taille" ou "être équivalentes". A défaut de déclarer que toute baguette est équivalente à elle-même, on est empêché de constituer cette partition : en effet, la classe d'équivalence d'une baguette donnée ne contiendrait pas cette baguette [(1)].

Que la réflexivité traduise une exigence logique et non une évidence du sens commun apparaît encore plus clairement si on s'avise de ceci : nous avons pu nous étonner ci-dessus de ce que Piaget n'ait pas étudié l'émergence de la symétrie dans l'expérience des enfants, mais un étonnement analogue portant sur la réflexivité serait tout à fait curieux, tant cette propriété est sans objet dans la réalité familière.

C'est cette difficulté d'accepter l'énoncé habituel de la réflexivité qui nous a conduit à l'axiome (iii). Celui-ci *pousse l'imagination* dans une autre direction que (iii)'. Il conduit à vérifier de la manière suivante qu'une baguette est équivalente à elle-même (ce à quoi il faut de toutes façons arriver) : on vérifie qu'elle est équivalente à une *autre* baguette, et comme celle-ci est équivalente à la première, on a bien par transitivité que la première est équivalente à elle-même.

(1) Autre aspect de la même question : si une relation R sur un ensemble X est symétrique et transitive, mais non réflexive, il existe au moins un élément de X dont ne part aucune flèche. Voir à cet égard comment G. Papy [4] p. 157 introduit la partition associée à une relation quelconque.

Imaginer ces manœuvres rend (iii) plus plausible que la réflexivité.

Les axiomes (i), (ii) et (iii) sont ceux d'une classe particulière de relations d'équivalence, celles dont les classes d'équivalence contiennent chacune deux éléments au moins. Nous verrons ci-après, dans les commentaires relatifs à l'addition, une raison supplémentaire d'avoir choisi des classes d'équivalence à deux éléments au moins.

3.2. L'ordre

Les axiomes (iv) et (v) sont comparables à (i) et (ii) : ce sont deux évidences dont les racines plongent dans la nuit de l'enfance, qu'on pourrait se passer d'expliciter si seules les actions quotidiennes étaient en jeu, mais que l'on énonce parce qu'on a le projet de s'en servir dans des *démonstrations*.
Au lieu de (iv) et (v), nous aurions pu choisir de définir une relation $\preccurlyeq$ qui aurait répondu aux axiomes suivants :

(α) $\forall a, b \in X \quad a \preccurlyeq b$ *ou* $b \preccurlyeq a$;

(β) $\forall a \in X \quad a \preccurlyeq a$;

(γ) $\forall a, b, c \in X \quad a \preccurlyeq b$ *et* $b \preccurlyeq a \Leftrightarrow a \sim b$;

(δ) $\forall a, b, c \in X \quad a \preccurlyeq b$ *et* $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$.

On observe que (i), (ii) et (iii) étant posés

- si on définit $\prec$ par ($\preccurlyeq$ et non équivalent) alors les axiomes (α) à (δ) entraînent (iv) et (v) ;
- si on définit $\preccurlyeq$ par ($\prec$ ou $\sim$), alors (iv) et (v) entraînent les axiomes (α) à (δ).

Ainsi ces deux façons d'introduire la nouvelle structure sont *logiquement équivalentes*, ce qui est sans doute familier au lecteur et que nous ne démontrerons pas ici. Ce qui est moins évident par contre, c'est à quel point ces deux axiomatiques diffèrent dans leur relation à la réalité quotidienne.

D'abord la relation $\preccurlyeq$ elle-même est inutile et perturbante dans toutes les circonstances où l'on est en contact direct avec les choses. Car en présence de deux baguettes, on constate ou bien qu'elles ont la même taille, ou bien qu'elles ne l'ont pas. A qui pourrait s'adresser le message :

> "la baguette a est plus petite ou égale à la baguette b" ? Il est conforme au bon sens d'énoncer tout de suite la constatation la plus précise [2].

Ensuite, si on exhibe des baguettes pour étayer par quelques exemples le choix des axiomes (α) à (δ), on voit que ceux-ci héritent du caractère artificiel de la relation $\preccurlyeq$.

Ainsi, expliquer la réflexivité (β) en montrant une baguette est totalement inutile. Pour celui qui a accepté que $a \sim a$, la réflexivité de $\preccurlyeq$ relève de la logique, non d'un constat empirique.

Par exemple encore, si on regarde deux baguettes a et b pour illustrer le fonctionnement de (γ), ou bien elles sont équivalentes et on le voit tout de suite (et alors quel sens pratique y a-t-il à constater qu'on a $a \preccurlyeq b$

(2) Bien sûr il arrive que l'on hésite, à cause d'une perception médiocre, entre deux baguettes dont tout ce qu'on peut dire est qu'elles sont égales ou presque. Mais le "ou" dans "plus petit ou égal" n'a pas pour fonction d'exprimer cette hésitation.

et $b \preccurlyeq a$, et qu'en outre on en *déduit* $a \sim b$), ou bien elles ne sont pas équivalentes et elles illustrent la contraposée de (γ) d'une façon choquante : on n'a pas à la fois $a \prec b$ et $b \prec a$ (constat tellement évident qu'il est perturbant de se l'entendre expliquer).

Un commentaire analogue s'appliquerait à l'axiome (δ).

Ainsi, (iv) et (v) expriment directement des acquis de l'enfant dans sa relation avec les choses perçues, tandis que (α), (β), (γ) et (δ), pourtant équivalentes à (iv) et (v), mélangent ces acquis profonds avec les propriétés logiques d'un concept construit artificiellement à l'aide de la connexion logique *ou* (plus petit *ou* équivalent).

Bien entendu, il est hors de question de critiquer les axiomes (α) à (δ) *en eux-mêmes*. Ils ont pour fonction essentielle de servir dans des démonstrations, ce à quoi ils sont tout à fait appropriés. Par exemple, si on raisonne à propos de deux *variables* a et b, si on n'a sous les yeux aucune baguette susceptible d'illustrer a et b et si on ne sait pas *a priori* si $a \prec b$, $a \sim b$ ou $b \prec a$, alors cela a un sens de démontrer (le cas échéant) que $a \preccurlyeq b$ et $b \preccurlyeq a$, et d'en conclure, d'après (γ), que $a \sim b$. Car on a ainsi acquis une certitude relative à un univers éloigné de la perception.

3.3. L'addition

L'axiome (vi) mérite qu'on s'y attarde. Pourquoi n'avons nous pas supposé l'opération $\oplus$ définie partout sur X ? C'est pour rester plus proche de la réalité familière. Additionner deux baguettes c'est les mettre bout à bout dans le prolongement l'une de l'autre, ce qui, soit dit en passant, pose un problème de ligature si on veut que le résultat soit encore une baguette. Passant outre à ce dernier point, observons qu'il est impossible pratiquement d'ajouter une baguette à elle-même (de même on ne peut pas ajouter une boule de plasticine à elle-même). D'où l'axiome (vi), et d'où en plus un rôle supplémentaire pour l'axiome (iii) : celui-ci en effet assure pour toute baguette la disponibilité d'une baguette équivalente qu'on peut lui ajouter. L'axiome (vi) exprime non seulement qu'on ne peut pas ajouter une baguette à elle-même, mais encore qu'on peut toujours ajouter deux baguettes distinctes, ce que le bon sens impose aussi.

D'avoir choisi une opération $\oplus$ non partout définie alourdit les axiomes suivants en obligeant à y insérer un peu partout des clauses d'existence de la somme : c'est la rançon du parti pris de fidélité à la réalité familière. Par ailleurs, les axiomes (vii) à (x) n'appellent pas de remarques particulières, sinon qu'ils sont tous, à des degrés divers, des évidences dans la vie quotidienne.

Revenons sur le fait qu'on ne peut pas additionner comme on veut les éléments de X. En particulier, on ne peut considérer une somme telle que

$$((a \oplus a) \oplus a) \oplus \ldots$$

Pourtant c'est là le genre d'expression qu'on aurait envie d'utiliser pour définir, plus tard, la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel. Qu'est-ce que nos axiomes nous proposent comme substitut autorisé à cette expression ?

Partons de deux objets a_1 et a_2 avec

$$a_1 \sim a_2 \quad \text{et} \quad a_1 \neq a_2.$$

La somme $a_1 \oplus a_2$ est définie. D'après (x) $a_1 \prec a_1 \oplus a_2$. Donc a_1 n'est pas équivalent à $a_1 \oplus a_2$ (d'après (iv)) et donc $a_1 \neq a_1 \oplus a_2$, à cause de la réflexivité de l'équivalence. Donc la somme $(a_1 \oplus a_2) \oplus a_1$ est définie.

En raisonnant de la même façon, on peut construire une somme

$$(((a_1 \oplus a_2) \oplus a_1) \oplus a_1) \oplus ...$$

aussi longue que l'on veut. On peut aussi recourir alternativement à a_1 et a_2 et construire

$$(((a_1 \oplus a_2) \oplus a_1) \oplus a_2) \oplus ...$$

Ce résultat évoque la manœuvre familière qui consiste, à partir de deux baguettes équivalentes, à les placer bout à bout, par ex. la première à gauche et la deuxième à droite, puis à porter celle de gauche à droite de l'autre et à continuer ainsi.

Ce dont nos axiomes ne rendent pas compte par contre, c'est de la construction consistant à utiliser a_1 et a_2 pour faire une baguette de longueur double et à constater ensuite que ni a_1 ni a_2 ne sont plus disponibles pour continuer à construire une baguette plus grande. Dans une telle opération, la classe d'équivalence contenant a_1 et a_2 aurait *perdu* deux de ses éléments. Notre ensemble X de départ est bien défini et il ne peut pas ainsi voir certains de ses éléments disparaître. Une opération binaire sur un ensemble n'a pas pour effet d'annihiler des paires d'éléments de l'ensemble.

Terminons cette argumentation de l'addition par une dernière remarque. Nous sommes partis de la conception spontanée de l'addition correspondant à l'idée de *rassembler*, de *mettre ensemble*. Additionner deux baguettes, c'est les aligner bout à bout ; additionner deux boules de plasticine c'est les coller ensemble. En supposant qu'il y a au moins deux baguettes dans chaque classe d'équivalence, nous préparons de façon acceptable la multiplication d'une grandeur par le nombre naturel 2. Par contre, comme nous venons de le voir, nos axiomes conduisent à des manipulations plus compliquées lorsqu'il s'agit de préparer la multiplication d'une grandeur par un nombre $n > 2$. Si on voulait pouvoir aligner n baguettes équivalentes pour n quelconque (aussi grand qu'on veut), il faudrait choisir des axiomes qui impliquent que les classes d'équivalence sont infinies. Dans l'ouvrage déjà cité (N. Rouche [6]) nous avions à cet effet directement postulé que ces classes sont infinies. Un tel axiome a pour effet d'autoriser à imaginer n baguettes équivalentes alignées. Il n'est par ailleurs pas nécessaire à la construction logique du concept de grandeur. On notera avec intérêt combien H. Freudenthal [2] p. 14 souligne l'importance, pour la maturation de l'idée de grandeur,d'imaginer des classes d'équivalence contenant chacune beaucoup, beaucoup d'objets.

Cette longue discussion sur la somme amène à se poser une dernière question. Au vu des complications provoquées par l'impossibilité d'ajouter une baguette à elle-même (lorsqu'on prend *ajouter* dans son sens premier), ne serait-il pas intéressant de voir comment il faudrait transformer ce sens premier pour rendre acceptable une expression telle que $a \oplus a$? On pourrait dire, en considérant d'abord le cas le plus général, qu'ajouter une baguette a_2 à une baguette a_1 lorsque a_2 est différent de a_1, c'est trouver une *autre* baguette a_3 susceptible de "coïncider" avec les deux premières mises bout à bout. On pourrait ensuite dire qu'ajouter une baguette à elle-même, c'est trouver une *autre* baguette sur laquelle la première puisse être reportée exactement deux fois.

On observera tout d'abord qu'une telle définition de la somme est ambiguë, mais ce n'est là qu'une objection mineure. Elle est par ailleurs assez attrayante, car elle renvoie à des manœuvres faciles à exécuter ou à imaginer. Et si on l'adopte, elle a pour effet de simplifier notablement les axiomes, ce dont nous laissons le détail au soin du lecteur. Il faut remarquer toutefois qu'une telle conception de l'addition n'est pas la conception spontanée, celle qui, nous l'avons assez souligné, correspond à l'idée de mettre bout à bout, mettre ensemble. Cette conception originelle, nous l'avons constaté de multiples fois, est extrêmement robuste. Elle entraîne la pensée non prévenue et il faut une intervention explicite pour l'écarter.

3.4. La division par un naturel

L'axiome (xi) n'appelle à première vue que peu de commentaires. Il semble naturel que l'on puisse découper une baguette en n parties équivalentes.

Pourtant, lorsqu'on s'avise que n peut être aussi grand qu'on veut, et qu'en outre on peut itérer la division par n, on pose le problème de l'infinie divisibilité. C'est là une question perturbante pour le sens commun comme suffit à en témoigner ce qu'en ont écrit, parmi beaucoup d'autres, Aristote et Pascal.

La multiplication par un naturel est également perturbante puisque, ici aussi, on peut prendre n aussi grand qu'on veut. Nous ne nous attarderons pas davantage sur ces rencontres avec l'infini, non pas parce qu'elles seraient peu importantes, mais seulement parce qu'elles ont été suffisamment décrites ailleurs.(voir entre autres Ch. Hauchart et N. Rouche [7]).

4. Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Une *grandeur* est par définition un élément de l'ensemble quotient de X par $\sim$. Notons $\widetilde{X}$ cet ensemble et A, B,... ses éléments.

Les structures introduites sur X induisent sur $\widetilde{X}$ les structures que l'on attend pour répondre aux manipulations familières sur les grandeurs concrètes.

Pour A, B dans $\widetilde{X}$, on dit que A est *plus petit que* B, et on écrit $A \lessdot B$, s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \prec b$.

Pour A et B dans $\widetilde{X}$, on définit la *somme* $A \oplus B$ de A et B comme l'élément de $\widetilde{X}$ qui contient $a \oplus b$ où $a \in A$, $b \in B$ et $a \neq b$.

Cette addition est *partout définie* sur $\widetilde{X}$, au rebours de $\oplus$ qui n'était pas partout définie sur X. Rien n'empêche donc ici de définir nA comme la somme de n termes égaux à A.

La structure de $\widetilde{X}$ ainsi définie conduit aux théorèmes suivants, à comparer à nos axiomes de départ :

(I) $\forall A, B \in \widetilde{X}$ *on a une et une seule des trois situations*

$$A \lessdot B, \quad A = B, \quad B \lessdot A \ ;$$

(II) $\forall A, B, C \in \tilde{X} \quad A \leq B$ *et* $B \leq C \Rightarrow A \leq C$;

(III) $\forall A, B \in \tilde{X} \quad A \oplus B = B \oplus A$;

(IV) $\forall A, B, C \in \tilde{X}$ $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

(V) $\forall A, B \in \tilde{X} \quad A \leq B$ *si il existe un* $C \in \tilde{X}$ *tel que* $B = A \oplus C$;

(VI) $\forall A \in \tilde{X} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B \in \tilde{X} \quad nB = A$.

Ces théorèmes, dont nous laissons la démonstration au lecteur, sont évidemment plus simples que les axiomes (i) à (xi), et à cause de cela, on serait bien content de pouvoir partir directement de là pour construire la théorie des grandeurs et en tirer ultérieurement, d'une manière ou d'une autre, les rationnels puis les réels (ce qui requiert bien entendu d'y ajouter la propriété archimédienne et la complétude).

On est tenté de faire cela, car la simplicité exerce une incontestable séduction. Mais si on le fait, c'est qu'on décide d'ignorer à travers quelles difficultés, quelles contradictions entre le sens commun et la logique, ce discours pur a été construit. Et ne faut-il pas alors craindre que les grandeurs d'emblée installées au niveau des seuls instruments de raisonnement ne soient perturbées dans l'esprit par leur relation non élucidée à la réalité ?

Notons en particulier que le fait de définir une grandeur comme une classe d'équivalence heurte aussi le sens commun dans la mesure où celui-ci conçoit qu'une baguette a (au sens de *possède*) une grandeur (en l'occurrence une longueur) et risque de refuser que cette grandeur *soit* un ensemble de baguettes.

5. Un exemple de seuil épistémologique

La présente étude aboutit à constater qu'il y a une distance appréciable entre les grandeurs telles qu'on les observe et les manie dans le quotidien et les grandeurs amenées, à travers une axiomatique, à l'état d'instruments appropriés au raisonnement déductif. Nous n'insistons pas pour que l'on appelle cette distance un *seuil épistémologique*, notion introduite et illustrée ailleurs (*cf.* R. Bkouche *et al.* [1] (pp. 198 et sq.). Ce qui est intéressant pourtant c'est de rassembler ce que l'exemple des grandeurs vient de nous montrer comme éléments constitutifs d'un tel seuil :

a) L'univocité sans exception qu'affirme l'axiome (iv) : deux éléments de X sont soit équivalents, soit l'un plus grand que l'autre, soit l'inverse, alors que la comparaison de deux baguettes réelles dépend elle de l'acuité du regard, et celle de deux boules de plasticine de la précision de la balance.

b) Plusieurs des axiomes sont des évidences acquises par chaque être humain dans sa prime enfance : il est difficile de comprendre l'intérêt de les énoncer si l'on n'a pas le projet très intellectuel de construire une théorie axiomatique.

c) Certains axiomes ou concepts sont hors du sens commun fonctionnant au contact des choses, ce sont des instruments logiques appropriés au traitement des symboles. Tel est le cas de la réflexivité de l'équivalence ou de la relation *plus petit ou équivalent*. Nous avons vu que deux propriétés logiquement équivalentes pouvaient l'une heurter le sens commun et l'autre non : il en résulte qu'un choix judicieux des axiomes peut contribuer à réduire le seuil épistémologique.

d) Certaines opérations mathématiques n'ont dans la réalité que des modèles imparfaits : pour que la somme de deux baguettes soit une baguette, il faut une ligature et le résultat n'est pas très satisfaisant. Les objets allongés et les objets lourds sont pourtant les "grandeurs" qui donnent le moins de soucis pratiques : que l'on songe par comparaison à l'équivalence et à l'addition des surfaces courbes et rigides, ou même plus simplement aux manipulations des intervalles de temps.

e) Lorsqu'on additionne deux éléments de X pour en "faire" un troisième, ils ne disparaissent pas dans l'opération ; par contraste, lorsqu'on colle ensemble deux boules de plasticine, on les perd en tant que boules pratiquement disponibles.

f) L'intrusion de l'infini n'est pas la moindre difficulté que les axiomes opposent au sens commun : on ne peut pas dire que l'infinie divisibilité résulte d'une observation familière.

g) Notons enfin ce qu'un mathématicien pourrait ne pas voir, tant les ensembles et les relations font partie de sa seconde nature : les classes d'équivalence contribuent aussi à la constitution du seuil épistémologique, car on sait qu'elles rebutent les débutants.

Tels sont, dans la mesure où nous avons pu les relever, les éléments constitutifs du seuil épistémologique des grandeurs. Ils décrivent ce qui, sur ce terrain, sépare les notions utilisées dans la vie courante des concepts requis pour raisonner mathématiquement.

Cet exemple des grandeurs illustre le fait que les mathématiques ne sont pas "dans la nature". On ne peut pas les découvrir seulement en manipulant et observant. Les concepts doivent être construits dans leur technicité logique comme instruments de démonstration (*cf.* les *proof generated concepts* de I. Lakatos [3]).

Ceci n'implique nullement que les manipulations et observations n'aient pas de rôle dans la pensée mathématique : elles sont la source initiale des intuitions sans lesquelles cette pensée demeurerait immobile.

Une remarque pour terminer. On sait que la notion même d'axiome a évolué dans l'histoire, et on dit souvent que les axiomes avant Hilbert (et sûrement avant les géométries non euclidiennes) étaient choisis parmi les évidences que propose l'univers familier. C'est là un jugement que l'axiome des parallèles oblige déjà à relativiser. Mais d'autres axiomes aussi : c'est un peu la thèse du présent article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BKOUCHE, B. CHARLOT, N. ROUCHE, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

[2] H. FREUDENTHAL, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[3] I. LAKATOS, *Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique* (traduction Balacheff, Laborde), Hermann, Paris, 1984.

[4] G. PAPY, *Mathématique moderne I*, M. Didier, Bruxelles, 1970

[5] J. PIAGET, B. INHELDER et A. SZEMINSKA, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Univ. de France, Paris, 1973.

[6] N. ROUCHE, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.

[7] Ch. HAUCHART, N. ROUCHE, *Apprivoiser l'infini* , CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.