LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE EN QUATRIEME ET EN TROISIEME

Jean-Pierre MULLER
Irem de Reims

INTRODUCTION

"L'enseignement des mathématiques concourt à la formation intellectuelle de l'élève et doit notamment développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive".

D'après les instructions officielles, l'un des objectifs au collège est d'apprendre à argumenter. Cet objectif est exprimé en termes généraux :

— en sixième, "l'élève doit être initié au raisonnement déductif".
— en cinquième, "il doit être progressivement initié au raisonnement déductif".
— en quatrième, "le travail effectué doit permettre à l'élève de s'entraîner progressivement au raisonnement déductif".
— enfin, en troisième, "l'élève doit être entrainé constamment au raisonnement déductif".

Les instructions parlent beaucoup de raisonnement déductif, expression génératrice de nombreuses questions pour l'enseignant :

— quels objectifs veut-on faire atteindre aux élèves ?
— quelles sont les stratégies d'apprentissage de la démonstration ?
— quels obstacles les élèves rencontrent-ils ?
— quelles situations leur proposer pour une meilleure compréhension ?
— les structures logiques mises en œuvre correspondent-elles à la maturité des enfants ?

Au collège, géométrie et introduction au raisonnement déductif sont étroitement liées. Si les élèves ne rechignent pas à s'investir dans des problèmes de géométrie comportant des éléments métriques (utilisation du théorème de Pythagore, de la trigonométrie, du calcul de distances dans un repère orthonormé...), ils se montrent par contre récalcitrants lorsqu'il s'agit de faire une démonstration. L'initiation au raisonnement déductif est perçue comme difficile et beaucoup d'enseignants sont désorientés devant l'échec de leurs élèves dans ce domaine.

L'incapacité de la plupart des élèves à faire une démonstration correcte me conduit souvent à m'interroger sur mes pratiques pédagogiques, à essayer de comprendre l'origine de certaines difficultés et les processus qui conduisent aux erreurs afin de pouvoir apporter des remèdes et d'évoluer vers des objectifs d'efficacité.

Sans faire une étude exhaustive sur la démonstration, je vais développer sur ce thème quelques pistes de réflexions susceptibles d'éclairer certains points et d'apporter des éléments de réponse aux questions posées.

I. — QU'EST-CE QUE LA DEMONSTRATION ?

1. Représentation de l'élève

Au milieu de l'année scolaire, j'ai proposé aux deux classes de quatrième du collège un petit questionnaire sur la démonstration. La première question posée était : "pour vous, qu'est-ce que la démonstration ?" (*cf.* annexe 1).

D'une manière générale, pour l'élève, la démonstration est une suite d'affirmations qui s'enchainent logiquement permettant de passer des hypothèses à la conclusion. De son point de vue, démonstration signifie syllogisme. Cette vision est d'ailleurs entretenue par la plupart des manuels scolaires qui proposent des démonstrations sophistiquées dès le début de l'année.

Lorsqu'on fait une analyse plus approfondie des réponses, la démonstration apparait pour certains élèves comme un pur exercice de rédaction dont le but est de savoir s'exprimer en français en utilisant le langage mathématique. D'autres élèves ont fourni des réponses plus vagues, voire incohérentes, montrant ainsi qu'ils ne donnent pas un sens à la démonstration : c'est "quelque chose" d'abstrait, d'ésotérique servant à "expliquer" une figure. Ces élèves ne voient ni l'utilité ni la raison d'être d'une démonstration, ils ne la ressentent pas comme un moyen efficace de nature à convaincre.

2. Preuve et démonstration

Dans la pratique usuelle des mathématiques, la démonstration est une forme de preuve ayant comme rôle de rendre indiscutable tel résultat dans la communauté à laquelle elle s'adresse. Jean HOUDEBINE (IREM de RENNES) propose une définition de la démonstration lui donnant un sens plus général que le sens classique : "la démonstration est un texte argumentatif spécifique des mathématiques dont la sémantique est liée à la resolution de problème et à la preuve".

Ainsi, la démonstration met en œuvre toute une démarche de pensée comportant plusieurs phases :

— phase de recherche : trouver des raisons ;
— phase d'argumentation : acquérir une conviction ;

— phase de production d'un discours : communiquer sa conviction aux autres.

La démonstration au sens strict n'est donc qu'un temps de l'activité de résolution d'un problème. Elle s'inscrit dans une démarche complexe de raisonnement où interviennent des capacités cognitives (disponibilité et maîtrise des outils sollicités par la résolution), des capacités d'ordre méthodologiques (s'organiser pour chercher, observer, analyses, émettre des conjectures) et des capacités d'ordre linguistiques (formulation des arguments).

3. Modification du contrat didactique concernant la preuve

D. GAUD, J.-P. GUICHARD, M. MAROT, C. ROBIN (IREM de POITIERS) représentent l'évolution du raisonnement déductif en géométrie au collège par le schéma suivant :

la rue	- observation - évidence	illusion
↓		
la mesure	- expérimentation -vérification	approximation
↓		
la raison	- justification - démonstration	validation

Ce schéma illustre la progression des compétences en géométrie au collège. Au cours des deux premières années, les objectifs essentiels sont la connaissance et la description des objectifs géométriques. Les travaux sont basés sur l'observation, le dessin, les mesures : ils donnent lieu à des activités de construction, de description, de formulation mais la démonstration n'y a pas sa place. La règle graduée, l'équerre, le rapporteur sont les instruments privilégiés pour l'observation des figures et de leurs propriétés : la qualité des tracés et la précision des mesures sont primordiales puisqu'elles interviennent directement dans la résolution des problèmes.

En quatrième et en troisième, les exigences par rapport à la géométrie changent. L'élève rencontre de nombreuses propriétés appelées définitions, théorèmes et ne comprend pas toujours l'usage qu'il doit en faire dans les raisonnements. L'observation de la figure et les mesures ne sont plus des outils et ne peuvent plus servir à justifier une propriété. Cette modification du contrat didactique est un des principaux obstacles à l'apprentissage de la démonstration. L'enseignant doit tenir compte du changement de contrat en fournissant des situations mettant en cause la fiabilité du dessin et de la mesure comme outils de preuve.

II. — LES OBSTACLES ET LES ERREURS

1. Le statut de la figure

Dans l'apprentissage du raisonnement en géométrie, le rôle de la figure est important et son statut évolue au collège. Les premières années, la figure a un statut de preuve comme cela a été dit plus haut : les élèves savent identifier les figures, reconnaitre sur un dessin des parallèles et des perpendiculaires et la construction d'une figure précise est une tâche en soit pour l'élève. La seule vision de la figure ou le fait d'effectuer des mesures permettent de valider un résultat : c'est donc le modèle physique qui prédomine.

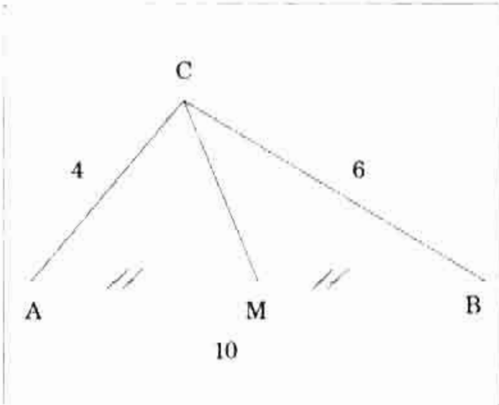
Puis la figure géométrique ne doit plus être considérée comme une représentation de la réalité physique mais comme la représentation d'un modèle mathématique, d'un concept. Par exemple, lorsqu'on demande aux élèves de construire une tangente à un cercle passant par un point extérieur, la majorité d'entre eux prennent leur règle et tracent avec la meilleure précision possible une droite "touchant" le cercle. La détermination du point de contact avec le cercle est empirique et le concept de tangente (droite perpendiculaire à un rayon) n'intervient pas dans la construction. Ce changement de statut de la figure constitue un obstacle car il est demandé aux élèves de raisonner sur le concept et non sur le dessin.

En géométrie, un dessin inexact ne devrait pas empêcher de raisonner correctement. Beaucoup d'élèves de quatrième et troisième n'osent plus faire état des évidences qu'ils voient sur la figure car ils savent que le professeur attend d'eux qu'ils écrivent des propriétés. Cependant, la prégnance de la figure intervient dans l'approche de résolution de problèmes et induit des formes de raisonnement comme on va le voir dans une séquence proposée à une classe de quatrième en début d'année.

Thème de la séquence
Problèmes de plus courte distance : exercices d'application sur les conditions d'existence d'un triangle et sur l'inégalité triangulaire (après institutionnalisation).

Structure de la classe
Les élèves sont répartis en 7 groupes de 3 élèves.

Enoncé
Que peut-on dire de
la longueur CM ?
Justifier la réponse.



Réponses des élèves
(Chaque groupe devait rédiger une réponse).

— 3 groupes ont fourni comme réponse :
CM = O, car le triangle ABC est "aplati" (4 + 6 = 10)

— 2 groupes ont donné comme réponse :
. $1 < CM < 9$ car $5 - 4 < CM < 5 + 4$ dans le triangle ACM
et . $1 < CM < 11$ car $6 - 5 < CM < 6 + 5$ dans le triangle BCM

— 1 groupe :
. $CM < 9$ car$5 + 4 = 9$
. $CM < 11$ car$5 + 6 = 11$
donc $CM < 9$

— 1 groupe :
. CM = 5 car les triangles ACM et BCM sont isocèles.

Commentaires

Un seul groupe n'a pas mis en œuvre le concept d'inégalité triangulaire et ne s'est donc pas investi dans le problème en proposant un résultat "qui se voit sur la figure".

Les autres groupes appliquent correctement mais partiellement les conditions d'existence d'un triangle connaissant les longueurs des côtés. Les élèves ayant donné comme réponse CM = 0 ont bien vu que le triangle ABC était aplati mais ils ont privilégié un point particulier du segment [AB] : son milieu.

Tous les élèves ont été fortement influencés par le support visuel de la figure pourtant fausse et aucun n'a pensé à refaire un dessin en respectant les longueurs données. Lorsque les élèves ont été invités à refaire une figure exacte, 6 groupes sur les 7 ont fourni la réponse attendue CM = 1.

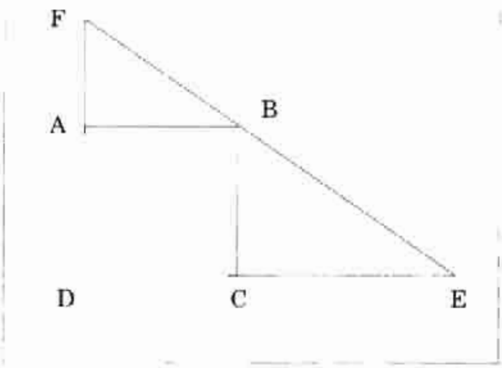
Cette emprise de la figure peut être un frein dans l'évolution du raisonnement. C'est le cas notamment pour les élèves qui construisent des figures particulières (un triangle quelconque devient isocèle, deux droites sécantes deviennent perpendiculaires...). Ils utilisent ainsi des hypothèses supplémentaires lues sur le dessin mais n'apparaissant pas dans l'énoncé du problème, introduisant alors des erreurs dans la solution.

2. Les illusions de la figure et le problème des mesures

L'activité suivante a été proposée en début d'année dans une classe de quatrième pour disqualifier le dessin en tant qu'outil de preuve et faire apparaître la nécessité d'une démonstration puis plus tard dans une autre classe de quatrième, à une époque où, pour les élèves, la figure n'a plus statut de preuve (*cf.* annexe 2 : le rôle de la figure pour les élèves).

Enoncé :

ABCD est un carré de côté 8 cm
AFB est un triangle rectangle tel que
AF = 5 cm
BCE est un triangle rectangle tel que
CE = 13 cm
Les points F, B, E sont-ils alignés ? Justifier la réponse.



Notions étudiées antérieurement :
. Problèmes de plus courte distance
. Projections.

Structure de la classe : Les élèves travaillent par groupes de deux.

L'activité s'est déroulée en deux temps :

1re phase :

Cette première phase où les élèves ne devaient pas solliciter l'intervention du professeur n'a duré que 15 minutes. Tous les groupes sans exception ont répondu que les points étaient alignés mais aucun n'a pu fournir de justification. Les élèves ont été déroutés par le problème : l'évidence de la figure donnait la réponse et tous les discours étaient inutiles. Ce qui m'a paru surprenant, c'est qu'aucun élève ne s'est posé de questions sur les données numériques. Un seul groupe a émis des conjectures sur le fait que le dessin était représenté à une certaine échelle mais il n'a pas été plus loin dans ses investigations.

Le fait également, que l'activité proposée ne présente aucun lien bien apparent avec les deux notions de géométrie étudiées antérieurement a accentué l'embarras des élèves.

2e phase :

Après un court débat, certains élèves ont suggéré que les données numériques permettaient de calculer des aires. Cela a permis de débloquer la situation puisque 7 groupes ont constaté que l'aire du triangle FDE était différente de la somme des aires du carré et des triangles FAB et BCE (écart de 0,5 cm²) donc que les points F, B, E n'étaient pas alignés. Trois groupes ont par ailleurs fait une figure approximative, faisant apparaitre le triangle FBE.

Tous les élèves ont été convaincus que la figure en elle-même n'était pas toujours fiable et qu'il était nécessaire de mobiliser d'autres outils pour résoudre le problème.

La même activité a été proposée au second trimestre dans l'autre classe de quatrième, le travail étant individuel.

A cette époque de l'année, pour les élèves, la figure n'a plus statut de preuve puisqu'aucun n'affirme a priori que les points sont alignés. Les outils utilisés par les élèves qui se sont investis dans le problème sont explicitement le théorème de Pythagore et implicitement le concept d'inégalité triangulaire. Parmi ceux-ci :

— 90 % font un raisonnement juste mais trouvent que les points sont alignés : pour le calcul des longueurs, les élèves donnent des valeurs approchées à 0,1 ou 0,01 près et aboutissent à l'égalité FB + BE = FE.

— 10 % des élèves concluent que les points ne sont pas alignés car FB + BE = FE, mais deux longueurs sont arrondies au centième et une longueur arrondie au dixième près.

En conclusion, pour les élèves, le statut de la mesure a évolué. Il n'y a plus de mesures effectuées à l'aide de la règle graduée mais des mesures calculées à partir d'éléments connus (dimensions du carré et des triangles rectangles). Cependant, pour eux, il n'y a pas de problème d'approximation et les calculs en eux-mêmes constituent une preuve. Le résultat fourni par la calculatrice avec un nombre suffisamment grand de décimales est considéré comme un calcul exact. Le problème des calculs approchés a été le principal obstacle et la source des erreurs : les élèves de quatrième ne connaissent pas les techniques de calculs sur les racines carrées et les résultats effectués à la calculatrice ne différaient qu'à partir du 4e chiffre décimal.

3. Le contrat didactique

Le contrat didactique entre le professeur et l'élève demeure un point crucial dans les problèmes avec preuve. Le passage de la géométrie d'observation à une géométrie déductive fait découvrir aux élèves un statut différent aux objets géométriques comme cela a été développé précédemment. Du fait que la figure n'a plus statut de preuve, il devient nécessaire d'amener les élèves à des formes d'explications soumises à certaines règles qui ne sont pas toujours évidentes pour eux :

- tri des informations de l'énoncé (dégager les hypothèses) ;
- mobilisation et utilisation d'outils mathématiques (définitions, théorèmes, formules) permettant d'argumenter ;
- articulation logique de ces arguments.

La multiplicité des tâches à gérer simultanément (faire une figure, dégager les hypothèses, émettre des conjectures, trouver les "bonnes" propriétés, établir un schéma de résolution, formuler la réponse) est souvent une source d'échec pour l'élève. Pour eux, les règles régissant le contrat didactique ne sont pas toujours claires. Dans une classe de troisième, j'ai instauré un cours-débat pour expliciter les principes, les méthodes pour réussir une démonstration. Voici en vrac quelques réflexions des élèves :

- il faut toujours commencer par faire une figure et coder les données de l'énoncé (longueurs et angles égaux, droites perpendiculaires) ;
- il faut écrire les hypothèses et la conclusion ;
- on doit expliquer en utilisant des propriétés ;
- il faut utiliser toutes les hypothèses ;
- on n'a pas le droit d'utiliser des données qui ne sont pas écrites dans les hypothèses ;
- il faut savoir ses théorèmes ;
- les propriétés utilisées sont celles étudiées dans la dernière leçon ;
- il faut mettre les propriétés utilisées dans un bon ordre ;
- il faut citer les théorèmes généraux puis les appliquer en "utilisant les lettres écrites sur la figure" ;
- il faut s'exprimer correctement en français ;
- dans une démonstration, il n'y a pas de calcul.

Ces réflexions mettent en évidence que les conventions régissant la démonstration sont comprises, dans les grandes lignes, de la majorité des élèves. Il n'en est pas moins vrai qu'elles ne sont pas mises spontanément en œuvre et que de nombreux obstacles subsistent. On rencontre encore les mêmes erreurs d'élèves qui tournent en rond entre conclusion et données, ou qui affirment sans justifier, ou qui justifient à tort et à travers en énumérant toutes les propriétés d'une figure à défaut de trouver la propriété adéquate.

4. Les difficultés d'ordre méthodologique et le problème du réinvestissement des connaissances

Devant un problème de géométrie, une des difficultés rencontrée par les élèves est la mobilisation d'une procédure de résolution. Comment démarrer ? Quelles connaissances doit-on utiliser ? L'élève a du mal à déceler dans le texte de l'énoncé les indices qui conduisent à utiliser telle propriété. Par exemple, la présence de données numériques et de droites parallèles conduisent à penser au théorème de Thalès. Or le processus mental qui permet, à partir de données, de mobiliser les savoirs adéquats n'est pas automatique pour l'élève. Instinctivement, il a tendance à utiliser les propriétés étudiées dans les dernières leçons (j'apprends et j'applique) et éprouve des difficultés à utiliser ses connaissances antérieures. Face à une situation de blocage, ou bien l'élève a le réflexe de demander au professeur des explications avant de commencer le travail, ou bien il se décourage et cela se traduit souvent par un évitement de la question ou par une réponse absurde. Ce phénomène s'accentue pour les élèves de troisième en difficulté car le "volume" des connaissances à mobiliser s'est accru rapidement au cours des quatre années du collège.

5. Les obstacles linguistiques

L'acquisition d'un langage correct constitue un des objectifs au collège. Beaucoup d'élèves lisent peu et ont du mal à décomposer une phrase, à analyser le rôle de chaque élément. Les mots sont les premiers outils de la démarche intellectuelle : comment dire sa pensée et, à plus forte raison, comment l'écrire si on ne dispose pas des mots nécessaires ? La difficulté pour les élèves à lire intelligemment un message et l'incapacité d'en produire un avec un minimum de vocabulaire approprié débouchent inévitablement sur une inaptitude à percevoir les textes les plus simples, notamment les énoncés de problèmes, et sur une inaptitude à élaborer une réponse avec des arguments articulés en un texte cohérent.

Les informations contenues dans un énoncé obéissent à des règles grammaticales précises. En comprendre le sens global, c'est être capable de sélectionner les informations principales et de déceler les relations qu'elles entretiennent. Une mauvaise lecture peut conduire à un non-respect des consignes et ainsi à faire commettre des erreurs. Voici un exemple de problème proposé en quatrième sous la formulation suivante :

"Soit un cercle de centre 0. On veut l'inscrire dans un triangle ABC dont les angles mesurent $\hat{A} = 40°$, $B = 60°$, $C = 80°$. Construire le triangle en justifiant les étapes de la construction".

La consigne principale était de tracer le cercle avant le triangle. Trois groupes sur sept n'ont pas compris que l'ordre de la construction était fixé : pour ces élèves, la figure finalement faite était la réponse au problème posé. (Une analyse plus complète des stratégies de résolution et des réponses sera développée plus loin.)

La rédaction des démonstrations constitue un obstacle très important. Beaucoup d'élèves ont un raisonnement correct et entrevoient la solution d'un problème mais la formulation de la réponse avec des arguments précis n'est pas aisée pour eux. Les productions textuelles sont souvent succinctes et exprimées dans un langage approximatif voire un charabia incompréhensible pour le lecteur.

Les difficultés portent d'abord sur l'emploi d'un vocabulaire mal approprié : confusion entre droite et segment, centre et milieu, points A et B parallèles à C et D... Mais il est vrai aussi que les textes mathématiques qui passent pour être rigoureux comportent parfois des abus de langage. Par exemple, une hauteur désigne tantôt une droite, tantôt un segment, tantôt la longueur d'un segment. D'autre part, les règles régissant les textes argumentatifs comportent des mots comme "soit, en effet, parce que, or, si ... alors, quel que soit...", expressions qui ne sont pas toujours bien comprises des élèves. Ces termes peu utilisés dans le langage courant sont souvent à la base de la confusion entre hypothèse et conclusion, théorème et sa réciproque.

Si une rédaction rigoureuse ne doit pas être une exigence prématurée de la part de l'enseignant, il est cependant nécessaire d'inciter l'élève à donner suffisamment de repères pour savoir s'il a résolu le problème.

III. - STRATEGIE DE REPONSES AUX OBSTACLES

Dans les activités de résolution de problèmes et de recherche d'explications, comment amener les élèves à ressentir la démonstration comme un outil de preuve efficace ? Comment agir pour que les difficultés d'expression de certains élèves ne se convertissent pas aussitôt en difficultés relativement à la géométrie ? Pour l'enseignant, il n'existe pas de recette infaillible mais la connaissance des obstacles majeurs rencontrés par l'élève peut être prise en compte dans l'apprentissage de l'argumentation.

1. Le rôle de la figure et le contrat didactique

Nous avons vu qu'au début de la quatrième, le passage de la géométrie d'observation à une géométrie de déduction était un des principaux obstacles à la démonstration. La figure, liée au changement du contrat didactique, voit également son statut évoluer. Pour que la démonstration apparaisse comme un moyen efficace pour convaincre, il faut que les outils mis spontanément en œuvre par les élèves soient mis en échec. Concernant la figure, l'enseignant doit fournir le plus tôt possible des activités où l'observation et le mesurage ne permettent pas de valider un résultat, impliquant l'utilisation d'autres outils. On peut donner quelques exemples de situations où la conviction des élèves sera remise en cause :

— problème comportant des points "presque" alignés ;
— triangle possédant un angle proche de 90° donnant l'illusion d'un triangle rectangle ;
— figures usuelles de formes différentes et ayant même aire (ces aires calculées à partir de dimensions mesurées donc approchées ne seront pas égales pour les élèves).

J'ai évoqué également le cas de certains élèves ayant tendance à produire, à partir d'un énoncé, des figures particulières et utilisant dans leur raisonnement les hypothèses supplémentaires vues sur la figure. Cela peut faire l'objet d'un travail spécifique sur l'association énoncé-figure :

— à partir d'une figure donnée, écrire l'énoncé d'un problème ;
— reconnaître la même configuration dans des figures différentes (cela permet de détecter les figures particulières).

En ce qui concerne le contrat didactique, il apparaît nécessaire d'amener l'élève à réfléchir sur les outils qu'il s'autorise à utiliser. L'argumentation a pour but de communiquer sa conviction aux autres ; elle obéit à certaines règles qui ne doivent pas rester implicites :

— les observations ou les mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver ;
— toute affirmation doit être justifiée par une propriété ;
— dans la progression du raisonnement, on ne peut utiliser que les données ou des résultats prouvés ;
— dans la recherche de preuve, on peut procéder par conditions suffisantes (pour montrer que..., il suffit de prouver que...).

De même, il est indispensable de définir précisément les mots que l'on rencontre dans les questions des énoncés de problème : prouver, démontrer, justifier, expliquer, vérifier.

2. Les problèmes de méthode

Dans les activités de démonstration, on se contente souvent d'un apprentissage par analogie. Le professeur propose un modèle soumis à l'observation de l'élève qui est ensuite appelé à imiter la méthode de résolution dans une situation proche. Cet apprentissage par imitation n'a rien d'evident pour les élèves : s'il réussit avec certains, une majorité d'entre eux a des difficultés pour mobiliser les savoirs. Pour demarrer un probleme, il n'y a pas de methode générale et c'est donc difficile pour l'enseignant d'apporter une aide dans ce domaine. Donner un coup de pouce a l'élève en situation de blocage, c'est déjà donner une partie de la réponse et certains ont pris l'habitude d'en profiter. Faire une liste exhaustive des méthodes (comment démontrer que deux droites sont parallèles, qu'un point est le milieu d'un segment...) est inconcevable parce qu'elle serait trop longue et donc inutilisable pour les élèves. On ne peut simplement qu'attirer l'attention sur l'utilite d'un theoreme institutionnalisé au cours de l'apprentissage d'un concept. Par exemple, à quoi peut servir le théorème sur "la droite des milieux" dans un triangle ? On peut ainsi faire apparaître qu'il peut être utile pour montrer que deux droites sont parallèles.

Pour mettre en valeur les procédures de résolution d'un problème, on peut libérer l'élève du souci de produire un calcul pour centrer son attention sur la signification d'un texte qu'il doit présenter. Voici comme exemple un exercice proposé à des éleves de troisième :

"Dans un repère orthonormé, on connait les coordonnées de 4 points A, B, C, D. On veut prouver que le quadrilatere ABCD est un parallélogramme.

1) Indiquer toutes les procédures possibles pour résoudre le problème.

2) Quelle est celle qui vous semble la plus efficace ? Pourquoi ?"

Pour cet exercice, la plupart des élèves ont compulsé leur livre ou leur cahier de cours. Voici les différents types de réponses :

1) Il faut montrer que les coordonnées du milieu de [AC] et du milieu de [BD] sont égales (22 réponses sur 25 élèves).
2) Il faut montrer que 2 vecteurs sont egaux en calculant leur coordonnées (18 réponses).
3) Il faut montrer que AB = CD et AD = BC en calculant les distances (13 réponses).
4) Il faut montrer que les côtés opposés sont parallèles (7 réponses).
5) Il faut montrer que deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur (6 réponses)
6) Il faut montrer que DA + DC = DB (1 réponse).

La plupart des élèves répondent que la première ou la seconde procédure sont les plus efficaces car il y a peu de calculs à effectuer.

Certains élèves se sont contentés de recopier les différentes méthodes pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme (réponses 4 et 5) sans préciser s'il existe une procédure pour montrer que deux droites sont parallèles dans un repère. Un seul élève a indiqué qu'il fallait déterminer des équations de droite et vérifier l'égalité des cœfficients directeurs.

Un autre exemple de travail spécifique sur une méthode de résolution, sera proposé en quatrième.

3. La rédaction des textes mathématiques

Les problèmes de formulation mathématique sont loin d'être résolus au collège. Les obstacles se situent au niveau du vocabulaire, de la lecture (compréhension des énoncés) et de la rédaction (formulation d'arguments). Le travail d'écriture doit être proposé le plus tôt possible. Cela veut dire qu'il ne faut pas attendre la quatrième pour rédiger des textes mais commencer dès la sixième.

Il faut autant que possible séparer les objectifs d'apprentissage : résoudre des problèmes et rédiger des démonstrations. Certaines activités peuvent être conçues dans cette optique :

— écrire un énoncé de problème à partir d'une figure ;
— rédiger une solution sur un problème résolu (à partir d'un organigramme) ;
— compléter des propriétés : donner les hypothèses, trouver la conclusion ;
— démonstrations de type puzzle (remettre les arguments dans le bon ordre) ;
— critiquer une démonstration .

4. La gestion de la classe

L'allergie ressentie par certains élèves pour l'apprentissage de la démonstration peut trouver son origine dans des méthodes de travail inadaptées. Quelques-uns apprennent par cœur des définitions et des théorèmes sans toujours comprendre ce qu'ils ont retenu, incapables de les appliquer dans les exercices. Parce qu'ils sont démobilisés, ils ont souvent un comportement passif dans la pratique traditionnelle de la classe. Pour tenter de les réconcilier avec la géométrie, j'organise ponctuellement des séquences de travail en groupes suivies d'un débat collectif. La démonstration prend ses origines dans des actes de communication : dans le travail en groupes, les diverses confrontations entre élèves mettent en évidence les conceptions justes ou fausses, les erreurs de raisonnement, les différentes procédures utilisées, les conjectures émises. Le débat qui s'en suit permet de faire une synthèse et d'institutionnaliser les différentes méthodes de résolution et les savoirs relatifs à la situation traitée.

Des séquence de cette nature ont été utilisées en classe de quatrième au mois de mai.

Thème : ***La bissectrice***.

Objectifs :
Apprentissage du concept de la bissectrice en tant qu'ensemble de points équidistants des côtés d'un angle.

Prérequis :
Somme des angles d'un triangle.
Tangente à un cercle.

Gestion de la classe :
7 groupes de 3 élèves.
Chaque groupe doit produire une formulation de sa solution.

Enoncé :
"Soit un cercle de centre 0. On veut l'inscrire dans un triangle ABC dont les angles mesurent $\hat{A} = 40°$, B = 60°, C = 80°. Construire le triangle en justifiant les étapes de la construction".

Au début de l'activité, il a été nécessaire de définir le mot "inscrire".

Stratégies utilisées par les élèves :

Dans la recherche, deux méthodes sont apparues :
— construction du cercle puis du triangle par tâtonnement ;
— construction du triangle puis du cercle.

Le centre du cercle est vite apparu comme le point d'intersection des bissectrices (un groupe essayant les médianes).

Démarches de la construction :

1) Pour 3 groupes :

— construction du triangle avec les angles donnés ;

— construction des bissectrices ;
— construction d'un rayon perpendiculaire à un côté ;
— construction du cercle.

2) Pour 1 groupe :

— construction du cercle et d'une tangente ;
— construction d'un angle de 60° (la tangente étant le support d'un côté) ;
— construction d'une parallèle tangente au cercle (le point de contact est déterminé par tâtonnement) ;
— même procédure avec un autre angle.

3) Pour 3 groupes :

— construction du cercle ;
— construction de 3 angles au centre de mesures 140°, 120°, 100° ;
— construction des perpendiculaires aux rayons pour obtenir le triangle.

Tous les groupes décrivent les étapes de la construction mais rarement les justifient. Les outils mis en œuvre seront explicités dans la phase de débat.

Débat :

* Concernant la première démarche, les élèves sont vite convaincus que la consigne de construction n'a pas été respectée : tracer le cercle puis le triangle.

* Concernant la seconde démarche, tous les élèves sont convaincus par le procédé de construction. Aucune remarque n'est faite *a priori* sur la détermination empirique des points de contact des tangentes avec le cercle. Après discussion, certains élèves ont suggéré de construire des rayons perpendiculaires au deuxième côté de l'angle avant la construction de parallèles tangentes au cercle. Les outils nécessaires à la justification sont mis en évidence :

— tangente à un cercle ;
— angles correspondants ;
— droites perpendiculaires à une même droite.

* Concernant la troisième démarche, les élèves sont convaincus par la construction mais sont gênés par les valeurs des angles 140°, 120°, 100° qui n'apparaissent pas dans l'énoncé du problème. La propriété de la somme des angles d'un quadrilatère est formalisée au cours du débat.

Cette forme de travail comporte de nombreux points positifs :

— les élèves se sentent investis de la responsabilité de la recherche d'une solution : même les élèves en difficulté participent activement et mènent une réflexion plus approfondie ;

— se mettre d'accord, à l'intérieur d'un groupe, pour la production d'une réponse unique favorise l'émergence d'une argumentation : les exigences de rigueur qui paraissaient inutiles dans la mesure où chacun s'estimait se comprendre lui-même prennent de la valeur quand les autres ne comprennent pas ;

— lors du débat, les élèves sont motivés par la volonté de convaincre les autres de la justesse de leur solution ;

— l'élève ne comprend pas toujours la sanction de l'erreur par le professeur : il a un comportement plus critique lorsque ce sont les autres élèves qui ne valident pas son résultat.

Par contre, ce mode de travail ne peut être que ponctuel car il faut prévoir une durée suffisante : il faut du temps à l'élève pour s'approprier la situation et le débat se prolonge quand de nombreuses divergences se font jour. Ainsi le temps prévu pour ce type de séquence est souvent dépassé. De plus, j'ai remarqué que certains "bons" élèves rejettent un peu ce mode de travail, ayant l'impression de perdre du temps dans des tâches annexes, convaincus qu'ils auraient pu apprendre davantage dans le même temps dans le cadre d'une pédagogie traditionnelle à laquelle ils sont bien adaptés.

CONCLUSION

Les enseignants de mathématiques sont conscients des difficultés rencontrées par les élèves dans les problèmes conduisant à une démonstration mais la complexité des concepts qui interviennent dans l'apprentissage du raisonnement ne permettent pas de théoriser les stratégies pédagogiques : il n'existe pas de recettes miracles apportant remède aux échecs des élèves dans ce domaine.

A travers l'observation du comportement des élèves en classe, de leurs représentations, les diverses réflexions qui viennent d'être développées tentent de mieux cerner les circonstances dans lesquelles apparaissent les obstacles auxquels se heurtent les élèves et la nature de ceux-ci. Cela m'a permis de clarifier certains points liés à l'apprentissage du raisonnement et de mettre en relief des pistes de travail possibles pour tenter de les diminuer.

Pour réussir en géométrie, il ne suffit pas d'apprendre par cœur définitions et théorèmes. L'apprentissage de la démonstration ne repose pas uniquement sur la mémorisation et l'application de connaissances dont l'élève n'a pas compris vraiment le sens. La solution aux difficultés est à rechercher du côté d'un apprentissage fondé sur l'activité de l'élève où celui-ci construit ses propres savoirs.

L'enseignant doit proposer un choix varié d'activités favorisant un comportement de recherche, la mise en œuvre de conjectures et suscitant ainsi le raisonnement tout en évitant un formalisme excessif dans la formulation. Il doit aussi admettre que les erreurs des élèves sont normales dans le processus d'apprentissage, qu'elles doivent donc être banalisées et que leur prise de conscience permettra à l'élève le franchissement d'obstacles et par conséquent d'évoluer dans son développement cognitif.

BIBLIOGRAPHIE

Repères numéros 1 et 4, J. Houdebine, IREM de RENNES

Initiation au raisonnement déductif au collège, G. Arsac, G. Chapiron, A. Colonna, G. Germain, Y. Guichard, M. Mante, IREM de LYON, 1992.

Le raisonnement déductif au collège, D. Gaud, J.-P. Guichard, M. Marot, C. Robin, IREM de POITIERS.

Cours polycopié de didactique, M. Henry, CTU de BESANCON, 1992.

ANNEXE 1 : Pour les élèves, qu'est-ce que la démonstration ?

1) Démontrer, c'est déduire à partir d'une suite d'inform-
ations, un résultat

1) Une démonstration, c'est un raisonnement.
une suite de calculs qui aboutit à une
formule (théorème, propriété) et qui prouve-
ra que la conclusion est bonne.

1) Une démonstration est un parcours logique
utilisant les hypothèses, les définitions,
les propriétés, les théorèmes... qui
prouvera que la conclusion est vraie.

1) Une demonstration sert à
prouver quelque chose sur une
figure avec des arguments des
proprietes et des définitions.

1) C'est une utilisation de propriétés qui rendent
la réponse irréfutable

1) Une démonstration, c'est prouvé une
chose par rapport à des données

1) faire une démonstration, c'est prouver
ce que l'on dit en se basant sur des
definitions et des propriétés connues.

1. une demonstration sert à prouver quelque chose. le plus souvent la conclusion. Il faut expliquer cela à l'aide de théorème, de réciproque ....
A la fin de la démonstration, il faut dire si la conclusion est vraie ou fausse
Pour faire une démonstration il faut s'aider des hypothèses.

1) Expliquer une figure ou un problème de géométrie à l'aide de phrases et de théorèmes appris.

1) C'est démontré quelquechose par rapport à une figure avec des phrases concrètes

1°) Une démonstration est un problème que l'on explique beaucoups plus qu'un problème normalement

1) Une demonstration pour moi sert à demontrer des égalités sur un dessin et pour pouvoir s'exprimer [illegible].

1) Pour moi, une démonstration c'est expliquer pourquoi tel droite mesure la même mesure que tel droite, pourquoi c'est perpendiculaire, etc ...

1) c'est la meilleur façon de prouver
des faits sur une figure

/Pour moi une démonstration c'est
ceux qui reunit les hypothèses,
les définitions les propriétés
la démonstration nous démontre

1°) Une démonstration sert à demontrer ce
qu'on a pas dans les hypothèse et de
démontres des égalités !

Une démonstration sert à prouver
quelque chose à l'aide d'un dessin
et de ces preuves

1) Pour moi, une démonstration, c'est
donner une propriété qui résoudra
ensuite le problème

1) Pour moi, une demonstration est
un problème de géomètrie que l'
on doit prouver et demontrer.

1) Pour moi, une démonstration, c'est une chose où l'on se
sert des hypotèses et que je n'arrive pas à faire, ni
à présenter

ANNEXE 2 : le rôle de la figure pour les élèves

3) La figure sert à mieux comprendre l'énoncé du texte.

3) J'utilise la figure pour m'aider à resoudre la question posée c'est à dire qu'elle est comme un point de repère.

3) Elle m'aide à me referer par rapport à l'énoncé.

3. Jusqu'en 5e environ comme ~~base~~ maintenant c'est un peu comme un + pour la démonstration mais cela évite de se mémorée une chose en plus de toute les propriétés.

3) La figure me sert à mieux citer les données du problème

La figure me sert à mettre ~~visualiser~~ les indications

3) J'utilise la figure comme support de démonstration.

3) J utilise la figure en prennant ce qui est écrit en dessinant dessus on ne doit pas prendre des choses qui ne sont pas inscrit sur la figure.

3) Dans le processus de résolution d'un problème de géométrie, j'utilise la figure pour m'éclaircir le sujet et cela me donne une idée supplémentaire.

3) J'utilise ma figure comme point de repère et pour réfléchir aux différentes solutions.

3) Elle me sert à mettre les indications que je découvre (égalités, mesures ...)

3°) La figure je l'utilise pour savoir quand il y a des égalités, des angles droits ou d'autres choses

3) La figure me sert à trouver des solutions pour résoudre mon problème. Quelquefois en traçant des médianes des bissectrices, ... etc, cela m'aide à trouver une propriété à utiliser
Le dessin montre l'aspect de ma figure.

3) J'utilise la figure comme un point de repère et je vois si ce que je fais sur la figure colle bien avec l'énoncé. Je réfléchis dessus, mais je sais que les mesures ne sont pas bonnes

3) J'utilise ma figure comme base et pour réfléchir aux différentes solutions. Ça m'aide aussi à me rendre compte de ce que ça fait une fois la figure terminée.