REPERES - IREM . N° 17 - octobre 1994

LA RAISON ET L'INFINI

Michel CRUBELLIER
Irem de Lille

Les réflexions qu'on trouvera dans les pages qui suivent ont d'abord été exposées, sous une forme plus simple, en classe de philosophie, pour tenter de satisfaire la curiosité d'élèves de Terminale C ; elles ont été reprises et développées devant un auditoire composé (en nombre à peu près égal) de collègues professeurs de philosophie et de mathématiques, lors d'un stage sur l'infini organisé par l'IREM de Lille.

L'intention de cet article est plus philosophique qu'historique. Mes élèves de TC désiraient comprendre "ce que signifie" l'idée d'infini. J'ai donc cherché à présenter de façon non systématique, en me référant à des moments importants de l'histoire de la philosophie et des mathématiques, certaines des expériences intellectuelles que l'on peut rattacher à l'idée d'infini, ainsi que les débats auxquels elle a donné lieu [(1)].

"Celui qui dit une chose « infinie » donne à une chose qu'il ne comprend pas un nom qu'il n'entend pas non plus". C'est par cette objection [(2)] que le matérialiste Gassendi, en 1640, veut interdire à Descartes de développer le célèbre argument de la troisième *Méditation Métaphysique*, qui conclut l'existence de Dieu à partir de la présence en nous de l'idée d'infini [(3)].

---

(1) Je remercie vivement toutes les personnes qui ont accepté de lire cet article au cours de sa rédaction et qui m'ont fait part de leurs remarques ; et en particulier Evelyne Barbin, Rudolf Bkouche, Michel Guillemot, Marc Legrand, Philippe Lesot, Claire Louguet, Marie Pentel et Jacky Sip.

(2) P. Gassendi (1592-1655), *Opera omnia*, tome III, Lyon 1658, p. 323 ; voir aussi Descartes, *Réponses aux cinquièmes objections* , III, § 4.

(3) R. Descartes (1596-1650), *Méditations Métaphysiques* , III.

Ce refus de Gassendi implique une critique sévère de la spéculation philosophique sur l'infini ; il signifie qu'elle peut être considérée tout entière comme une sorte de mirage linguistique ; qu'elle trouve son origine dans la possibilité toujours ouverte de mettre en circulation un mot sans être tenu de s'assurer qu'il lui correspond quelque chose de réel, et d'effectivement accessible à partir de l'expérience de chacun de nous ;

> **Descartes : de l'idée d'infini à l'existence de Dieu**
>
> Le but visé par Descartes dans la Troisième Méditation est de donner un fondement certain aux affirmations visant des objets distincts de moi, c'est-à-dire en particulier à toutes nos affirmations empiriques concernant le monde extérieur. Le doute systématique pratiqué dans la Première Méditation a fait apparaître l'insuffisance de toutes les vérités communément reconnues comme certaines – en particulier celles qui concernent l'existence des objets extérieurs perçus par les sens, mais aussi les vérités mathématiques considérées comme évidentes. Dans la Seconde Méditation, Descartes a montré comment les énoncés « je pense » ou « je suis » (qui sont équivalents, si l'on reconnaît que *je* désigne ici un sujet, et non mon corps ou quoi que ce soit d'autre) sont nécessairement vrais, puisque les propositions : « je ne pense pas » ou « je n'existe pas » se détruisent d'elles-mêmes. Mais ces vérités nécessaires ne me disent encore rien de l'existence d'une réalité distincte de moi. Il convient donc d'examiner les idées que peut former ce sujet pensant, afin de voir s'il en est une dont le contenu puisse me garantir en quelque façon l'existence d'un objet qui lui corresponde. Pour Descartes, seule l'idée d'infini peut satisfaire à cette exigence, car je n'ai pas pu la tirer de moi-même, étant un être fini. Il existe donc en-dehors de moi un être réellement infini, qui est Dieu.

et plus particulièrement, dans la faculté que nous avons de former à volonté une nouvelle notion par la négation de n'importe quel mot (« in-fini »), bien que les logiciens nous avertissent que ces notions négatives sont d'ordinaire indéterminées : en disant ce qu'une chose n'est pas (si par exemple quelqu'un dit : "L'âme est une réalité immatérielle"), on donne certes une information à son sujet, mais beaucoup moins utile que si l'on disait ce que c'est. Ajoutons, dans le cas de l'infini, que le terme ainsi nié est lui-même équivoque. La « fin », ce peut être simplement *l'arrêt* ou la cessation, la limite au-delà de laquelle l'objet considéré n'existe plus ; mais c'est aussi *l'achèvement*, c'est-à-dire la réussite qui révèle le sens d'un processus et qui le rend compréhensible (une « fin » est un but). A cette même notion se rattache encore l'idée de la limite ou de la définition : le fait d'être ceci et non pas autre chose, d'avoir une certaine forme déterminée. On peut se représenter cela au moyen de l'opposition de la forme et de la matière, que la pensée occidentale a héritée d'Aristote : la matière est ce que nous exprimons au moyen de l'article partitif « du », « de la » (du verre, du bois, de l'eau), et à quoi certaines opérations, telles que le découpage, le modelage ou l'assemblage, confèrent une forme.

Mais s'il est vrai qu'un objet n'est identifiable et pensable qu'à la condition d'être fini, faudra-t-il conclure que l'infini est par principe impensable ?

Pourtant certaines expériences de pensée nous mettent comme en présence de l'infini ; les plus banales, qui sont cependant parmi les plus instructives, se rencontrent en mathématiques. A partir de ces exemples, nous nous efforcerons de répondre, autant que faire se peut, à Gassendi ; d'examiner ce qui nous permet, et peut-être aussi nous impose, de penser l'infini ; de montrer comment, à défaut de le comprendre (de le saisir entièrement par la pensée) nous pouvons tout au moins"l'entendre", c'est-à-dire savoir ce que nous disons lorsque nous en parlons.

Nous prendrons comme point de départ la notion d'ordre, en nous souvenant que Descartes a défini un jour les mathématiques comme la science de l'ordre. Et plus loin encore dans le passé, nous trouvons cette notion d'ordre à l'origine de la pensée philosophique et scientifique de l'Occident, où elle coïncide avec la notion de monde : « monde » se dit en grec *cosmos*, c'est-à-dire ordre. C'est apparemment un des plus anciens termes techniques de la philosophie : l'idée de monde signifie que tout ce qui existe, tout ce qui nous est donné dans la diversité multicolore et mobile de l'expérience, constitue en fait un ordre, accessible par conséquent à un effort de connaissance raisonnée. C'est ainsi qu'un Grec – sans doute Parménide (4) – a pu poser pour la première fois cette question étonnante : "Quelle est la forme géométrique de l'Univers ?" Question audacieuse, qui suppose que l'on se place par la pensée face au « tout » de la réalité, et qu'on tente de le saisir au moyen d'une construction de l'esprit. On prendra la mesure de l'effort intellectuel que cela représente en constatant que le terme de monde manque encore dans les célèbres textes de la *Genèse*, qui, pour exprimer la même idée, ou une idée voisine, ont recours à des périphrases :"le ciel et la terre", ou :"le ciel, la terre et tout ce qu'ils renferment" (5).

Descartes : Les mathématiques, science de l'ordre et de la mesure

"J'ai d'abord cherché ce que tout le monde entend par ce mot ["mathématiques"] (...). *Il ne suffit pas en effet de considérer ici l'étymologie du mot : car comme le terme de mathématique signifie simplement science, les autres sciences n'auraient pas moins de droit que la géométrie même à être appelées mathématiques* (...). *Et si l'on y réfléchit plus attentivement, on remarque enfin que seules toutes les choses où l'on étudie l'ordre et la mesure se rattachent à la mathématique, sans qu'il importe que cette mesure soit cherchée dans des nombres, des figures, des astres, des sons ou quelque autre objet ; on remarque ainsi qu'il doit y avoir quelque science générale expliquant tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure sans application à une matière particulière, et que cette science appelée, non pas d'un nom étranger, mais d'un nom déjà ancien et reçu par l'usage, mathématique universelle* (...)." Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, règle IV.

L'ordre peut être défini, de façon générale et abstraite, comme l'unité d'une multiplicité (une"relation intelligible entre une pluralité de termes", dit le *Petit Robert*). En effet, on ne dira pas d'un objet unique qu'il est en ordre, à moins de parler

(4) Parmenide (vers 450 av. J.-C.), fragments A 23 et A 44 Diels-Kranz ; traduction dans Jean-Paul Dumont (éd.), *Les Présocratiques*, Paris 1988, pp. 241 et 249-250. Le second de ces deux témoignages indique que l'on attribuait aussi cette découverte à Pythagore, en même temps que l'invention du mot *cosmos* pour désigner le ciel pris dans sa totalité.

(5) *Genèse*, I, 1-2 ; II, 1. Notons cependant que déjà ces textes de la Bible, en déroulant le récit des étapes de la création du monde, proposent implicitement une représentation de l'organisation spatiale de l'univers ; mais cette représentation n'est pas (ou à peine) géométrisée ; et elle demeure conçue à partir de l'habitat humain et des expériences de l'homme. Il y a quand même, si l'on veut, un équivalent du terme cosmos dans le verset qui ponctue chacun des jours de la création : "Dieu vit que cela était bon" (I, 4 ; I, 10 ; etc.).

de son ordre interne, qui s'applique alors à la multitude de ses parties ; mais dans un ensemble complexe il n'y a d'ordre que dans la mesure où on peut y voir apparaître un principe d'unité. Or chacun de ces deux aspects de l'ordre – l'unité et la multiplicité – ne peut être représenté qu'au moyen de l'autre, c'est-à-dire dans la relation qu'il a avec l'autre. C'est particulièrement clair dans le cas de la multiplicité : la représentation d'une pure multiplicité, sans aucun principe d'unité, aboutit à l'image, confuse entre toutes, de ce que nous nommons le *chaos* : un mot grec qui signifie littéralement « l'abîme », et qui sert au poète Hésiode [(6)] (ou encore dans la traduction grecque de la Bible) à désigner l'état de choses qui prévalait avant la naissance du monde : l'absence de limite et de consistance, une diversité sans aucune distinction – car toute distinction est une limite, et un commencement d'ordre : être quelque chose, c'est être ceci et ne pas être cela ; c'est ainsi que l'acte créateur de Dieu consiste en une distinction : il sépare la lumière des ténèbres, les eaux inférieures et les eaux supérieures, etc.

Mais il est également difficile de se représenter l'unité absolue. Certes on peut bien tenter de former l'idée de la pure identité, ou de la pure coïncidence avec soi-même ; mais cette idée semble dépasser toute notre expérience, parce qu'elle échappe au temps (c'est l'idée de l'éternité) et à l'espace ; et, par conséquent, à notre imagination et à notre discours : nous disons qu'elle est transcendante. On peut tout au plus la pressentir comme l'idéal vers lequel tend, précisément, tout effort de mise en ordre ou d'intellection. Cela correspond au concept de Dieu, tel que la tradition occidentale l'a hérité du monothéisme – qui est d'abord la fidélité à un seul dieu, et qui aboutit à l'affirmation de l'existence d'un seul dieu, ou même de Dieu seul – héritage aussi de Platon, qui appelle « l'un », ou « le bien », le principe suprême dont dépendent l'intelligibilité et l'existence de toutes choses.

Or, on peut dire que l'idée de l'infini, au cours des débats et des recherches qui ont fait l'histoire de la pensée occidentale, se situe (et se déplace) toujours entre ces trois termes : Dieu, le chaos, et l'ordre.

Pour les fondateurs de la philosophie grecque – Platon et Aristote – l'infini est l'*apeiron*, à proprement parler « l'illimité ». C'est ce qu'il y a dans la réalité de désordonné et d'irrationnel ; mais Platon et Aristote ont reconnu que ce principe indéfinissable est en fait essentiel à la constitution du monde, en particulier pour rendre concevable l'existence de la pluralité, du changement et du mouvement ; ils l'assimilent plus ou moins clairement à la matière première, qui n'a en soi aucune forme et qui est capable de les recevoir toutes. (Etre « du verre », en effet, c'est encore avoir une certaine forme par laquelle le verre se distingue du sable ou de l'eau ; ce sont là des matières secondes ; mais la matière première se situe en-deçà de toute forme d'« être ceci », « ne pas être cela », et par conséquent en-deçà de tout discours : c'est une réalité dont on ne peut rien dire.)

A l'opposé, le Moyen-Age concevra sous le nom d'infini « un être tel que rien de plus grand (ou : « rien de plus réel ») ne peut être conçu » : cet être qui réunit toutes les perfections, voire contient en lui toute la réalité, c'est le Dieu unique, créateur et transcendant.

(6) Hesiode (vers 700 av. J.-C.?), *Théogonie*, vers 116 et suivants.

Ces deux infinis sont l'un et l'autre inaccessibles : le premier est inconcevable, le second incompréhensible ; on peut, si l'on veut, les penser, mais on ne peut pas les connaître. Mais il existe encore une troisième sorte d'infini : c'est l'infini des mathématiciens, c'est-à-dire l'ordre infini. Certaines de ses formes nous sont familières depuis l'enfance : c'est à travers elles que nous avons découvert l'infini. Il y a d'abord la suite des nombres naturels : "1, 2, 3, 4, 5..." Pour l'enfant qui apprend à compter, c'est d'abord une formule à retenir par cœur, dépourvue de sens comme n'importe quelle autre comptine ; mais il découvre au-delà de seize (s'il parle français) l'ébauche d'un ordre : "dix-*sept*, dix-*huit*, dix-*neuf*", puis : "vingt-et-*un*, vingt-*deux*..." La numération de position (par exemple notre écriture en chiffres arabes) lui fournit un code qui permet d'écrire n'importe quel entier naturel, si grand qu'il soit ; en même temps il prend conscience du fait fondamental qui se trouve contenu dans le sixième axiome de Peano : "si a est un entier naturel, $a + 1$ est un entier naturel", ou :

$$a \in N \,.\supset .\, a+1 \in N$$

de sorte que, si grand que soit un entier naturel, on peut toujours en former un plus grand en lui ajoutant, par exemple, une unité. La question : « jusqu'où est-ce que tu sais compter ? » perd son sens ; la reconnaissance de l'ordre conduit à une intuition de l'infini.

Une autre expérience familière de l'infini est celle qui nous est procurée par la contemplation de ces figures artificielles que l'on nomme « en abîme ». Une figure en abîme est une figure qui est semblable à l'une de ses parties, et qui se contient en quelque sorte elle-même : par exemple la célèbre étiquette dessinée par Benjamin Rabier pour la Vache Qui Rit. Quoique l'artifice soit inévitablement imparfait, et que l'œil finisse par se perdre dans la finesse des détails, l'esprit fait le reste : chaque Vache Qui Rit porte une boucle d'oreille représentant la Vache Qui Rit, qui elle-même... Les univers emboîtés que Pascal découvre (7) dans la patte d'un insecte minuscule, sont eux aussi un exemple (littéraire) de figure en abîme.

S'il est possible, dans de tels cas, de se représenter un infini sans sombrer dans la confusion, c'est qu'il obéit à une règle : la similitude des images emboîtées, ou la réitération de l'opération « + 1 » ; c'est d'ailleurs le propre des objets mathématiques que d'être ainsi engendrés selon une loi (la définition du cercle, par exemple, est une loi ; etc.). L'application de cette règle nous garantit que nous pouvons poursuivre le processus avec une certitude absolue, alors même qu'il dépasse notre expérience actuelle, voire toute expérience possible. Nous trouvons ici un infini proportionné à la pensée humaine, plus précisément : à la faculté humaine de conduire ses pensées avec ordre, qui est ce qu'on appelle la raison. Nous pouvons donc maintenant compléter notre première définition de l'ordre. Nous disions que "l'ordre est l'unité d'une multiplicité" ; il convient d'ajouter : "...conformément à une règle" (on voit ainsi ce qui relie les deux sens usuels du mot « ordre »).

La puissance de la raison dans le maniement de l'infini se manifeste de façon exemplaire dans la notion de fonction, et dans l'usage qu'en font les mathématiciens et les physiciens. Deux grandeurs varia-

(7) Pascal (1623-1662), *Pensées*, fragment 199, éd. Lafuma, Paris 1963, pp. 525-526. C'est le fragment intitulé : "Disproportion de l'homme".

bles, qui peuvent prendre une infinité de valeurs, sont cependant reliées entre elles par une relation constante, par une loi définie qui nous permet d'anticiper sur l'expérience, de la compléter et même de la rectifier : la plupart des lois physiques classiques sont des fonctions.

Mais les mathématiques élémentaires présentent un autre exemple d'infini, presque aussi familier à l'origine, mais beaucoup plus troublant : c'est l'infinité du continu géométrique. Elle nous est révélée par la possibilité de diviser indéfiniment le moindre segment de droite : on retrouve ici les deux modèles de la réitération et de l'abîme. La réitération, puisque l'opération de division peut toujours être renouvelée ; l'abîme, parce que toute partie du segment est semblable au segment entier. La différence est que le continu n'est pas construit par la raison, mais semble être donné d'abord à la perception elle-même. On peut seulement vérifier après coup, en appliquant une règle, et en partant de l'intuition que nous en avons, que le segment est en effet divisible à l'infini : mais le continu ne peut pas être engendré par un processus de ce type.

Les Grecs ont pris conscience de cette difficulté dès le V^e^ siècle avant notre ère, à l'occasion de la découverte d'un fait apparemment minime, mais surprenant et en quelque sorte irritant : il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale du carré et son côté (nous exprimons le même fait en disant que le rapport de ces deux longueurs ne peut pas être exprimé par un nombre rationnel, c'est-à-dire par le rapport de deux entiers). Trouver la commune mesure de deux segments, c'est déterminer une longueur (une unité de mesure) qui se trouve contenue un nombre exact de fois dans chacun de ces deux segments. Il peut sembler d'abord que ce problème n'est jamais insoluble, et qu'il ne s'agit que de prendre une longueur suffisamment petite, ce qui est toujours possible puisque précisément les grandeurs géométriques sont divisibles à l'infini. Mais dans le cas du côté et de la diagonale, on peut démontrer [8] qu'il n'existe pas de longueur, si petite qu'on veuille la prendre, qui puisse jouer ce rôle d'unité de mesure commune aux deux segments.

Ainsi l'activité ordonnatrice de la raison ne suffit pas pour penser adéquatement l'infini et nous mettre à l'abri de toute espèce de trouble. Même soumis à une loi, l'infini garde en lui quelque chose de l'illimité et du chaos.

D'une part, en effet, nous avons une intuition de l'infini, qui précède même la construction des infinis ordonnés dont nous venons de parler ; c'est elle qui donne un sens aux « etc. » ou aux points de suspension grâce auxquels nous anticipons et résumons dans un seul mouvement de la pensée la répétition illimitée de la même opération, ou les termes d'un développement infini. On a souvent remarqué que l'univers physique, que nous le considérions dans ses structures les plus vastes ou les plus fines, ne nous présente jamais que des nombres ou des grandeurs finis. Comme l'écrit A. Denjoy, un philosophe enquêtant sur "les caractères humainement concevables" qu'il convient de prêter à Dieu, dès lors que l'on pose qu'il existe,"noterait que les dénombrements proposés par l'Univers font appel à des entiers dont la grandeur nous confond. Et cependant cette nature paraît finie dans le gigantesque comme dans l'infime. Aussi conclurait-il :

(8) Euclide (vers 250 av. J.C. ?), *Eléments*, X, proposition 117.

"L'esprit de Dieu se joue dans l'innombrable, mais il ne s'évade jamais du fini. L'imagination humaine en vain tente l'assaut de l'innombrable. Elle tombe vite exténuée. Pour se dérober à ce défi, elle a créé l'infini et le continu" (9).

Cette intuition « innée » est donc la condition de notre compréhension de tout discours, même celui du mathématicien, sur l'infini (« comprendre » ayant ici le sens d'« entendre » et non pas d'« embrasser »). Elle est sans doute la source dont dérivent tous ces modèles mathématiques, et peut-être même toutes les mathématiques. La plupart des auteurs qui, aujourd'hui, rejettent la réduction des mathématiques à la logique, considèrent que c'est la considération d'ensembles infinis qui fait la ligne de démarcation des deux domaines : "Avec l'infini commence la véritable mathématique", disait Jean Cavaillès (10).

Mais cette intuition se soumet difficilement aux exigences traditionnellement admises de la formalisation et de l'administration de la preuve. Pas seulement parce qu'elle déborde les possibilités d'un discours fini ; mais parce qu'elle y produit fréquemment des paradoxes. On en verra quelques exemples dans la suite ; en-dehors même des mathématiques, les deux plus célèbres difficultés logiques connues des Anciens correspondent respectivement aux deux types d'ordre infini que nous venons de décrire : ce sont la régression à l'infini et les paradoxes autoréférentiels tels que le Menteur.

(9) Arnaud Denjoy, "L'innéité du transfini", dans F. Le Lionnais (éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique,* 1946 ; 2e édition, Paris 1962, pp. 188-195 ; le passage cité se trouve p. 191.

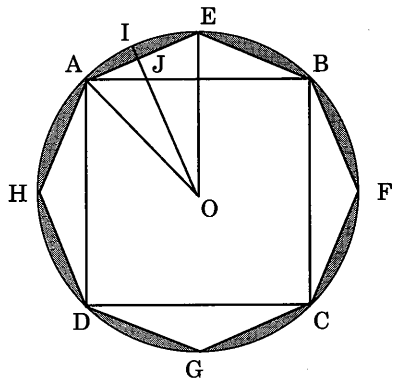
(10) Jean Cavailles (1903-1944), *Sur la logique et la théorie de la science* , Paris 1947, p. 72.

La régression infinie résulte de la possibilité de réitérer sans cesse la même exigence : toute preuve doit être prouvée, tout fondement doit être fondé à son tour. Elle a été utilisée par les Sceptiques comme argument contre l'idéal d'un savoir absolument certain, puisqu'il semble qu'un discours qui se veut bien fondé ne puisse jamais s'achever ; de telle sorte que la science la mieux armée et la mieux liée apparaîtra, si on la considère dans son ensemble, toujours ouverte vers d'autres confirmations indispensables, et donc incertaine ou arbitraire.

De leur côté, les paradoxes autoréférentiels dessinent des figures en abîme. Le paradoxe du Menteur (également connu comme « l'Epiménide ») repose sur le pouvoir du langage humain de se prendre lui-même pour objet, ce qui peut produire des contradictions (Bertrand Russell a produit des paradoxes de même structure pour faire apparaître les insuffisances de la première théorie des ensembles : par exemple le concept de « l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes à titre d'élément » est inconsistant, car on ne peut pas déterminer si cet ensemble se contient lui-même ou non). « La phrase que je suis en train de prononcer est fausse » : c'est là un énoncé français parfaitement intelligible, mais il nous plonge dans une perplexité irrémédiable dès lors que nous entreprenons de le vérifier. Le passage à l'infini fait que le sens semble basculer soudain dans le non-sens.

Cela pose le problème du statut de nos affirmations au sujet de l'infini : elles apparaissent comme des exigences de la pensée plus que comme des énoncés vérifiables ; le projet de les soumettre aux normes de la vérité et de la consistance interne suscite des difficultés qui exigent la révision, voire la refonte, des acquis précédents.

L'histoire des mathématiques, et de l'analyse en particulier, suggère l'hypothèse suivante : l'infini est un facteur de perturbation, difficile à penser précisément, mais c'est en même temps un facteur de progrès. On y remarque une alternance plus ou moins régulière entre des inventions reposant sur une confiance intuitive dans notre capacité à penser l'infini, et des constructions logiques visant à réduire le recours à cette intuition. De nombreux exemples permettraient d'illustrer cette idée : celui que nous exposerons, et qui appartient en quelque sorte à la préhistoire de l'analyse, est celui de la mesure de l'aire du cercle. Archimède a démontré qu'elle est égale à celle d'un triangle ayant pour hauteur le rayon du cercle, et pour base la circonférence. Il procède par une démarche indirecte à laquelle on a donné plus tard le nom de méthode d'exhaustion.



Si l'aire C du cercle, dit-il, n'est pas égale à celle du triangle (T), alors elle sera plus grande ou plus petite. Supposons d'abord qu'elle soit plus grande, et appelons δ la différence ($C - T = \delta$). Construisons maintenant le carré ABCD inscrit dans le cercle, puis l'octogone régulier AEBFCGDH, puis le polygone régulier à seize côtés etc. Quand je passe du carré à l'octogone, la différence entre le cercle et le polygone inscrit se trouve réduite de plus de la moitié ; et il en va de même à l'étape suivante, et à toutes les étapes suivantes. Il est possible de démontrer que je peux rendre cette différence plus petite que tout nombre proposé : c'est là une conséquence d'une proposition importante démontrée au livre X des *Eléments* d'Euclide : "Deux grandeurs étant données, si l'on retire de la plus grande une grandeur supérieure à sa moitié, et que l'on continue toujours ainsi, on aboutira à une grandeur plus petite que la plus petite des grandeurs données". La surface des triangles AEB, AIE, étant supérieure à la moitié de celle des segments de cercle correspondants, la différence entre le cercle et le polygone inscrit pourra être rendue plus petite que δ. L'aire P du polygone ainsi obtenu (disons, le premier pour lequel la différence est plus petite que celle du cercle et du triangle) est par conséquent plus grande que celle du triangle, puisque $C - P < C - T$. Or on peut facilement montrer par ailleurs que l'aire du polygone doit être inférieure à celle du triangle T : il est constitué d'un certain nombre de triangles isocèles dont la hauteur (voir par exemple la hauteur OJ dans le cas de l'octogone) est nécessairement inférieure au rayon du cercle ; et de même la somme de leurs bases (c'est-à-dire le périmètre du polygone) est inférieure à la circonférence. On se trouve donc devant une contradiction qui atteste que l'hypothèse dont nous sommes partis (le cercle plus grand que le triangle) ne peut pas être vraie. On écarte d'une façon semblable la seconde hypothèse (le cercle plus petit que le triangle), en recourant cette fois à des polygones circonscrits. Il ne reste donc plus qu'une seule hypothèse possible : le cercle est nécessairement égal au triangle (11). La démonstration d'Archimède est typiquement une démonstration dialectique : la vérité visée par l'esprit (le théorème) n'est pas directement établie, mais c'est sa négation qui se trouve réfutée (plus exactement ici, les deux autres possibilités envisageables sont successivement réfutées). Une telle démonstration suppose en quelque sorte qu'on s'adresse à un interlocuteur de mauvaise foi, qui refusera de se satisfaire d'un argument intuitif et qu'il est nécessaire de contraindre à admettre la vérité. Elle "peut convaincre l'esprit mais elle ne l'éclaire pas", auraient dit les logiciens de Port-Royal (12). Elle ne l'éclaire pas, parce qu'elle établit avec certitude qu'il en est bien ainsi, et que cela ne peut pas être autrement, mais elle ne fait pas apparaître la raison pour laquelle il en est ainsi. Pour le dire autrement : il nous semble peu probable, voire invraisemblable, qu'Archimède ait pu découvrir le théorème par cette voie.

Comment alors ? Nous ne pouvons évidemment pas le savoir avec certitude, mais on peut conjecturer que l'intuition première devait ressembler à la démarche suggérée au V^e siècle avant notre ère par le sophiste Antiphon : le cercle peut être considéré comme un polygone régulier ayant une infinité de côtés ; c'est-à-dire précisément la forme-limite vers laquelle tendent les polygones inscrits utilisés dans la démonstration d'Archimède – qui d'ailleurs est également la limite des polygones circonscrits. Antiphon semble considérer cette figure-limite comme réellement

(11) Archimede (vers 287-212 av. J.-C.), *La mesure du cercle*, éd. de Charles Mugler, Paris (Collection des Universités de France) 1970 ; proposition 1, pp. 138-139.

(12) Arnauld et Nicole, *La logique ou l'art de penser*, 1662 ; Paris 1970, IV^e partie, chapitre 9, pp. 398-399.

La quadrature d'Antiphon
(V^e siècle av. J.-C.) :
le cercle comme polygone

Pour les Grecs, les problèmes de quadrature consistent à construire avec la règle et le compas un carré de surface égale à celle d'une quadrature donnée. Le problème a été résolu très tôt pour les figures rectilignes (qui peuvent se décomposer en triangles). Antiphon tente de ramener le cas du cercle à celui d'un polygone régulier : "(...) Ensuite, toujours selon la même méthode, divisant les côtés du polygone inscrit de seize côtés, joignant par des droites, il doublait le polygone inscrit et, en continuant toujours à ce faire, il pensait qu'à un moment, ayant épuisé la surface du cercle, de cette manière, *il finirait par inscrire dans le cercle un polygone dont les côtés, grâce à leur petitesse, s'appliqueraient à la circonférence du cercle*. Or, on peut construire un carré égal à n'importe quel polygone donné (...)". (fragment B 13 Diels-Kranz ; témoignage de Simplicius, *In Phys.* 54, 12 ; traduction dans Jean-Paul Dumont (éd.), *Les Présocratiques* , Paris 1988, pp. 1099-1100).

– Il faudrait savoir si Antiphon supposait effectivement achevée la division du cercle à l'infini, ou s'il se contentait d'un certain degré d'approximation, ou si encore il admettait un minimum de la longueur géométrique (c'est la célèbre thèse dite des « lignes insécables »), de telle sorte que le polygone régulier de côté égal à cette longueur insécable soit indiscernable du cercle. La phrase mise en italiques suggère plutôt la seconde ou la troisième solution.

Un peu plus tard, le philosophe mégarique Bryson (IV^e siècle) observera que : "le cercle est plus grand que toute figure inscrite en lui, et plus petit que toute figure circonscrite", ce qui nous rapproche encore davantage de la solution d'Archimède.

***L'Analyste* de Berkeley (1734)**

L'Analyste représente un échantillon intéressant de la façon dont la religion et les mathématiques s'entrecroisent dans les débats métaphysiques de l'âge classique. Il s'agit d'un essai polémique, adressé à "un mathématicien incrédule", et qui se donne pour but de justifier la foi et les dogmes de la religion, en montrant que les mathématiques nouvelles supposent des principes qui ne sont pas moins obscurs et sujets à caution que les principes de la religion. On y trouve des remarques comme celle-ci : "Tous ces points, dis-je, sont admis et crus par certains qui exigent l'évidence en matière de religion, par des hommes qui prétendent ne croire que ce qu'ils voient. Que des hommes habitués à ne traiter que des sujets clairs puissent difficilement en admettre d'obscurs, cela ne peut pas apparaître entièrement inexplicable. Mais celui qui peut digérer une seconde ou une troisième fluxion, une seconde ou une troisième différence, n'a nulle raison, à mon avis, de faire le délicat sur une question quelconque de théologie." (§7, pp. 277-278).

existante, et affirme qu'elle est égale au cercle. Or ce polygone régulier est composé de triangles isocèles ayant pour base une partie infinitésimale i de la circonférence, et pour hauteur le rayon R du cercle. L'aire de chacun de ces triangles est égale à $\frac{iR}{2}$; l'aire du polygone entier est donc égale au produit de la somme des segments i par $\frac{R}{2}$; et la somme des segments i équivaut par hypothèse à la circonférence.

On retrouve dans cette démonstration l'idée directrice de la première, à savoir l'introduction d'un polygone régulier qui sert en quelque sorte de moyen terme entre le cercle et le triangle. Mais cette fois la démonstration paraît éclairante, c'est-à-dire qu'il nous semble que nous pouvons saisir intuitivement la raison de l'égalité, qui demeure cachée dans la démonstration d'Archimède.

Cependant cette saisie est plutôt une divination : il ne serait pas facile de dire précisément ce que nous avons cru deviner ; et cela ne manquerait pas de soulever de graves objections de la part du logicien – du même type que celles que le philosophe Berkeley (13) a opposées aux principes du calcul infinitésimal. Car si la surface de ces triangles élémentaires n'est pas nulle (c'est-à-dire si les segments i ont une longueur définie), celle-ci, étant ajoutée indéfiniment à elle-même, finira par dépasser la surface du cercle, et d'ailleurs toute surface finie, si grande qu'elle soit – conformément à « l'axiome d'Archimède » : "De deux lignes (ou surfaces, ou volumes) inégales, la plus grande dépasse la plus petite d'une grandeur telle que, ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée de même sorte que ces grandeurs comparées entre elles" (14) (il existait, dès l'Antiquité, plusieurs énoncés équivalents, en particulier la célèbre définition des grandeurs « homogènes » au début du livre V des *Eléments* : "Deux grandeurs sont dites « homogènes » lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser l'une l'autre" (15)). L'axiome d'Archimède constitue un obstacle majeur au traitement mathématique de grandeurs infinitésimales, puisque celles-ci doivent être conçues comme étant « du même genre » que celles

(13) Berkeley (1685-1753), *L'analyste*, traduction de M. Blay, dans *Oeuvres*, éd. G. Brykman, tome II, Paris 1987, pp. 257-332.

(14) Archimede, *De la sphère et du cylindre*, éd. Ch. Mugler, Paris 1970, p. 11.

(15) Euclide, *Eléments*, V, déf. 5.

dont elles servent à analyser la variation, et pourtant n'obéissent pas à l'axiome d'Archimède. Et si l'on pose au contraire que les côtés du polygone d'Antiphon ont une longueur nulle, l'aire des triangles élémentaires – et donc l'aire du polygone, qui est leur somme – sera toujours égale à zéro ; il semble donc que la surface ainsi construite, loin de fournir une mesure de l'aire du cercle, doive nécessairement être ou bien nulle ou bien infinie.

Au contraire, en évitant d'employer des expressions telles que « une infinité de côtés » ou « une base infiniment petite », la démonstration d'Archimède échappe à la critique des logiciens. Elle porte constamment sur des objets déterminés sans ambiguïté, et s'achève en un nombre fini d'étapes (qui peut être aussi grand que l'on voudra, puisque la différence δ peut être choisie arbitrairement petite, mais qui reste fini). Est-ce à dire que l'infini ait été entièrement évacué ? Non, si l'on regarde de près la démonstration ; car la proposition qui nous autorise à faire tomber au-dessous de toute limite la différence entre les surfaces du cercle et du polygone, suppose la possibilité de répéter indéfiniment l'opération de soustraction : "...si l'on retire... une grandeur supérieure à sa moitié, *et que l'on continue toujours ainsi...*" (cidessus p. 20).

Mais avec ses forces et ses faiblesses, cette démonstration illustre bien les normes de la géométrie grecque, ses réticences et ses stratégies face à l'infini : d'une façon générale les mathématiciens classiques ont toujours cherché à évacuer l'infini dans leur discours public, en recourant à des démonstrations par l'absurde impliquant un nombre fini d'étapes, et en évitant autant que possible la référence directe à une grandeur infinie. Un nombre infini, dans cette perspective, sera désigné comme « un nombre plus grand que toute quantité assignable » ; l'égalité elle-même peut être assimilée à une différence nulle, c'est-à-dire « une différence plus petite que tout nombre arbitrairement choisi ».

Ces formules ne sont pas de simples conventions de langage (comme ces euphémismes par lesquels, dans la vie sociale, nous évitons de nommer ce qui effraie ou ce qui dérange) ; outre qu'elles renvoient à un modèle particulier de démonstration, elles présupposent une doctrine de l'infini qui a été établie par Aristote dans sa *Physique* (16), et qui peut se résumer dans la formule consacrée : aucun objet réel ne peut être effectivement (« en acte ») infini ; l'infini des mathématiciens n'existe qu'« en puissance ».

L'expression « être en puissance » a été forgée par Aristote pour désigner le type de réalité qui caractérise le possible. En effet le possible n'est pas le réel, et en ce sens il n'est pas réel ; mais il n'est pas rien non plus. Nous pouvons le déceler par notre réflexion sur le réel, et en définitive il nous est accessible grâce au langage, puisque c'est une propriété remarquable du langage humain, de n'être pas asservi au réel et de permettre de dire le possible, c'est-à-dire de proférer des énoncés qui, tout en étant matériellement faux (puisqu'il n'y a rien qui leur corresponde actuellement dans la réalité), sont malgré tout sensés. Quant à l'« être en acte », ce sera – par opposition à la puissance ainsi définie – le mode d'existence d'un objet qui a entièrement réalisé les possibilités qu'il contient.

La conception d'Aristote signifie exacte-

(16) Aristote (384-322 av. J.-C.), *Physique* III, chap. 4-8.

ment que l'infini ne peut pas être donné comme un tout. En effet, un axiome général des mathématiques grecques (la neuvième des « notions communes » énoncées au début du livre I d'Euclide) affirme que le tout est nécessairement plus grand qu'une de ses parties. Or un ensemble infini pourrait être mis en correspondance terme à terme avec l'une de ses parties propres, donnant ainsi naissance aux paradoxes relevés par Galilée [(17)] et Pascal [(18)] : par exemple il y a autant de nombres pairs (ou de carrés) que d'entiers naturels, puisque chaque entier a son carré ou son double ; pourtant, dans un intervalle quelconque des entiers naturels, les carrés sont beaucoup moins nombreux que les racines (Galilée remarque même que plus l'intervalle considéré est grand, tout en restant fini, plus la proportion des carrés tend à diminuer). De cette discordance, Aristote conclut que l'infini ne peut pas être conçu comme un tout : l'infini, écrit-il,"n'est pas ce ce qui n'a rien à l'extérieur de soi, mais c'est ce dont il y a toujours quelque chose à l'extérieur de soi" [(19)] (par exemple il n'existe aucun nombre qui puisse épuiser la série des entiers naturels) ; Aristote ajoute aussitôt que cette définition de l'infini équivaut à celle d'un être imparfait, conformément à la conception qui rattache l'illimité au désordre et au chaos. Pour le reste, il estime que l'argumentation par laquelle il a établi l'impossibilité de l'existence d'un infini en acte "ne prive pas les mathématiciens de leur étude. En effet, ils n'ont en fait pas besoin de l'infini, et ils ne l'utilisent pas, mais ont seulement besoin qu'il existe une droite finie de la longueur qu'ils veulent" [(20)].

Les considérations sur lesquelles Aristote fonde cette doctrine de l'infini en puissance sont principalement physiques : d'une part, il ne peut pas exister de grandeur infinie, puisque le monde est de dimension finie ; mais d'autre part le mouvement, qui est l'attribut essentiel des êtres naturels, suppose la continuité, et par conséquent la divisibilité à l'infini. C'est seulement après coup qu'il se soucie de garantir la compatibilité de sa doctrine avec les mathématiques telles qu'on les pratique de son temps – admettant implicitement que la science mathématique doit nécessairement s'accorder avec les structures de la réalité sensible.

Le compromis proposé par Aristote durera bien deux millénaires. Cependant le développement de l'analyse, puis les tentatives de la fonder rigoureusement, conduiront les mathématiciens du XIX^{e} siècle – au moment où, par aileurs, le sentiment d'un lien nécessaire entre les mathématiques et la nature commence à s'estomper – à envisager favorablement la conception d'un infini actuel. Ils choisissent alors de restreindre la validité de l'axiome euclidien du tout et de la partie aux objets mathématiques finis : il y a des touts qui ne sont pas « plus grands » que certaines de leurs parties, et c'est précisément ainsi que Dedekind [(21)] propose de définir la notion d'ensemble infini (l'expression « pas plus grands » est d'ailleurs à manier avec pré-

(17) Galilee (1564-1642), *Dialogue des sciences nouvelles*, 1638, première journée ; dans *Oeuvres et Lettres*, Paris 1966, pp. 255-258.

(18) Pascal, *De l'esprit géométrique*, éd. Lafuma, Paris 1963, pp. 352-354.

(19) *Physique* III 6, 207a 1-2, trad. de Pierre Pellegrin.

(20) *Physique* III 7, 207b 27-31, trad. de P. Pellegrin, avec une modification : P. Pellegrin rend *apeiron* par « indéfini ».

(21) R. Dedekind (1831-1916), *Was sind und was sollen die Zahlen* (1872) ; traduction de J. Milner et H. Sinaceur : *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, Paris 1978.

caution ; car notre notion ordinaire de la grandeur est prise en défaut ici ; et celle que lui substitue Cantor – la notion de « puissance » d'un ensemble – est plus précise mais plus restreinte).

On remarquera que dans cette conception, et à l'inverse de ce qui se produit dans le langage naturel, le concept de « fini » n'est défini que secondairement, comme la négation de l'infini.

Peut-on dire que la solution de Dedekind règle une fois pour toutes, et au moyen d'une simple convention de définition, les problèmes posés par la pensée de l'infini ? Ce serait trop beau, et ce n'est pas si simple. En effet, l'application de ce critère de distinction entre l'infini et le fini suppose une épreuve de comparaison entre un ensemble et l'une de ses parties, c'est-à-dire la possibilité de mettre chaque élément de l'un en correspondance avec un élément de l'autre ; pour cela il faut pouvoir les ordonner complètement. Cette mise en ordre suppose une propriété énoncée dans l'« axiome du choix » de Zermelo : "Dans tout ensemble de parties non vides, il est possible de choisir un élément de manière à constituer un nouvel ensemble"; or cette propriété ne peut jamais être démontrée, mais doit être posée à titre d'axiome.

Il reste que l'audace de cette solution tient au fait que l'on y envisage des ensembles effectivement infinis, transgressant ainsi l'interdiction aristotélicienne et euclidienne de l'infini en acte ; bien plus, audelà de ce premier saut, on découvrira encore d'autres infinis, strictement plus « grands » (plus puissants) que l'infini dénombrable.

Dans cette affirmation de l'infini en acte, les mathématiciens ont été précédés par les théologiens. Tony Lévy a montré (22) comment, de l'Antiquité tardive à la scolastique, les valeurs attachées à la notion de l'infini s'inversent. L'infini inaccessible représente – d'une façon d'abord simplement figurée – la distance qui sépare le divin de l'humain (la transcendance de Dieu). Mais l'infini devient par la suite un attribut positif de Dieu, voire celui qui résume son essence. Cette évolution aboutit à la définition 6 du premier livre de l'*Ethique* :" J'entends par *Dieu* un être absolument infini, c'est-à-dire une substance consistant en une infinité d'attributs, dont chacun exprime une essence éternelle et infinie" (23). Et Spinoza commente : "Je dis « absolument infini » et non « infini en son genre » ; car de ce qui est infini seulement dans son genre, nous pouvons nier une infinité d'attributs ; pour ce qui au contraire est absolument infini, tout ce qui exprime une essence et n'enveloppe aucune négation appartient à son essence". En même temps, cependant, les auteurs du XVII^{e} siècle prennent soin de distinguer entre cette infinie perfection, qui n'appartient qu'à Dieu, et la quantité infinie – que Descartes nomme « l'indéfini », et qui reste toujours inachevée ; ce qui permet de conserver pour les mathématiques la doctrine aristotélicienne de l'infini en puissance. Et c'est cet infini mathématique que les philosophies matérialistes et sceptiques invoqueront contre les métaphysiques du divin.

Les grands débats de la métaphysique classique, remarque Kant (24), tiennent à

(22) T. Levy, *Figures de l'infini. Les mathématiques au miroir des cultures*, Paris 1987.

(23) Spinoza (1632-1677), *Ethique* I, définition 6, traduction de Ch. Appuhn.

(24) E. Kant (1724-1804), *Critique de la raison pure* (1781), "Dialectique transcendantale", chapitre 2 ; les mêmes idées sont exposées dans les *Prolégomènes à toute métaphysique future* (1784), §§ 50-54.

La *Critique de la raison pure* et les conflits de la raison avec elle-même

Le but de la *Critique de la raison pure* est de constituer, selon l'expression de Kant, un « tribunal » chargé d'examiner les prétentions de la raison humaine à une connaissance qui dépasse l'expérience, c'est-à-dire à une connaissance métaphysique, afin de déterminer ce que ces prétentions ont de bien fondé et d'illégitime.(voir la Préface de la seconde édition). Le diagnostic de Kant est sévère : dans sa recherche d'un fondement de la connaissance, et de la réalité elle-même, la raison aboutit à des questions qu'elle ne peut pas éviter de se poser, mais qu'elle est également incapable de résoudre. Le système des contradictions dans lesquelles elle se trouve ainsi entraînée est présenté sous la forme des quatre « antinomies de la raison pure » :

I. Thèse : "Quant au temps et à l'espace, le monde a un commencement (une limite)".
Antithèse : "Quant au temps et à l'espace, le monde est infini".
II. Thèse : "Tout, dans le monde, est constitué par le simple".
Antithèse : "Rien n'est simple, mais tout est composé".
III. Thèse : "Il y a dans le monde des causes par liberté".
Antithèse : "Il n'y a pas de liberté ; tout est nature".
IV.Thèse : "Dans la série des causes du monde, il y a un être nécessaire".
Antithèse : "Dans cette série, rien n'est nécessaire, mais tout y est contingent".

l'opposition qui existe entre deux exigences que l'on pourrait nommer « principe de la totalité » et « principe de l'universalité ».

Car notre adjectif « tous, tout » est remarquablement ambigu. Il joue d'abord le rôle d'un quantificateur, c'est-à-dire qu'un énoncé qui le contient a la valeur d'une règle universelle valable pour tout objet de la catégorie concernée ("la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits", "tout homme est mortel") ; mais il peut aussi constituer un objet, ou un quasi-objet : la classe, pensée comme une unité close, de tous les êtres ainsi désignés ; on reconnaîtra ici l'opposition aristotélicienne entre la totalité close et parfaite ("ce qui n'a rien à l'extérieur de soi") et l'infini ouvert sur l'extérieur ("ce dont il y a toujours quelque chose à l'extérieur de soi").

Cette opposition entre les deux exigences de la totalité et de l'universalité se retrouve, selon Kant, au cœur des grands problèmes de la métaphysique classique, tels qu'ils les a décrits sous le nom d' « antinomies de la raison pure » (voir encadré).

Dans chacun de ces conflits, la thèse développe de façon unilatérale le point de vue de la totalité : un élément déterminé d'une série ordonnée (Kant pense particulièrement à la série des moments du temps, mais ce peut être aussi bien une série de causes et d'effets ; ou encore les étapes successives d'une décomposition : les parties, puis les parties de parties, etc., jusqu'aux constituants simples s'il y en a) étant donné, tous les termes antérieurs apparaissent comme les conditions de celui-ci. Or si ce dernier terme, le conditionné, est réel, la série de toutes ses conditions doit être réelle aussi, c'est-à-dire effectivement complète. De là la nécessité de poser des limites absolues : un commencement du temps et une limite du monde *(I)* ou des particules indivisibles *(II)* ; ou des êtres tels que Dieu *(IV)* ou la liberté *(III)*, qui arrêtent la régression à l'infini. A l'inverse, l'antithèse défend le point de vue de l'universalité, qui rend inévitable la régression infinie : car le dernier terme de la série (la cause la plus éloignée que nous puissions connaître, par exemple) n'en est pas moins un terme comme les autres, et la même exigence qu'aux autres s'applique à lui (cette cause, par exemple, est à son tour un fait qui a besoin d'une cause ; etc.).

Les deux premières antinomies opposent simplement le fini à l'infini : le limité à l'illimité *(I)*, la division finie à la divisibilité infinie *(II)*. Les deux autres sont plus complexes, parce qu'elles mettent en jeu des infinis différents et en quelque sorte contradictoires. La quatrième oppose un "être nécessaire" (c'est-à-dire Dieu, ou l'infini en acte) et une réalité entièrement contingente qui évoque l'illimité des Grecs. La troisième est sans doute celle qui a le plus intéressé les modernes, parce qu'en posant le problème de la liberté, elle rattache les discussions métaphysiques abstraites à quelque chose qui touche l'homme de plus près : nos choix, nos responsabilités et le sens de notre action. Mais quel rôle joue l'infini dans cette problématique de la nature et de la liberté ? La causalité de la nature représente un exemple d'ordre infini. Chaque événement du monde est relié à d'autres, et en définitive à tous les autres, par la relation de cause à effet. Or cette relation unit des termes de même nature, de telle sorte que chaque cause aura ses causes, et que le réseau dessiné par ces relations s'étendra à l'infini. On peut bien concevoir une cause de l'ensemble, qui serait la loi (ou le système des lois) à laquelle se conforment tous ces enchaînements. Mais elle ne peut pas jouer le rôle de limite : elle est d'un autre ordre, parce qu'elle consiste en une relation purement formelle (c'est une « raison » plutôt qu'une cause). Elle est comme en retrait de toute la série, et n'existe peut-être que pour une conscience qui réfléchit sur l'ensemble des faits physiques. C'est d'une façon très semblable que nous devons concevoir la liberté que Kant oppose à l'enchaînement illimité des causes et des effets. S'il peut exister un libre-arbitre, c'est chez un sujet doué de conscience et de réflexion, capable de reconnaître l'ordre de la nature. C'est ce que fait apparaître l'apologue attribué à Jean Buridan (25) : supposez un âne qui ait exactement autant faim que soif, et qui se trouve à mi-chemin entre des bottes de foin et un seau d'eau. Si l'on admet que les motifs agissent sur lui à la façon de forces mécaniques, il est condamné à mourir sur place de soif et de faim : sollicitée par deux motifs opposés et de force égale, la volonté sera nécessairement paralysée. Mais, précisément parce qu'il serait capable de prendre conscience de l'absurdité de la situation, un homme aurait le pouvoir de décider, arbitrairement, de prendre l'un ou l'autre parti. La liberté est ainsi le pouvoir de la réflexion, qui peut dépasser indéfiniment le donné (et donc tout motif, en tant qu'il peut toujours apparaître comme un donné), mais qui peut aussi à tout moment arrêter la délibération.

Avec Dieu ou la liberté, dira-t-on peut-être, nous voici bien loin des mathématiques. Pas tant que cela. Dans leur effort pour rendre leur discipline plus cohérente et plus rigoureuse, voire la fonder définitivement, les théoriciens du XIX^{e} siècle ont bien souvent fait appel à de telles notions métaphysiques pour donner forme aux grandes intuitions qui guidaient leur travail. On a souvent rappelé l'intérêt de Cantor (26) pour les questions de théologie ; de même Bolzano (27) invoque l'existence de Dieu, sa toute-puissance et son omni-

(25) J. Buridan, philosophe parisien (vers 1290-1360). L'histoire de l'âne ne se trouve pas dans ses écrits ; mais il a effectivement soutenu la doctrine qu'elle illustre : *cf. Quaestiones in Metaphysicam*, Paris 1518, livre VI, question 5.

(26) T. Levy, *Figures de l'infini*, pp. 14-18.

(27) B. Bolzano (1781-1848), *Les paradoxes de l'infini*, 1847-1848 ; trad. française de H. Sinaceur, Paris 1993, § 25, pp. 94-95.

science, pour confirmer sa thèse que l'infini existe bien en acte dans la réalité. Rattacher ainsi à Dieu les vérités mathématiques les plus éminentes, c'est, suivant une tradition qui remonte à Platon, revendiquer pour elles une vérité absolue.

Mais en même temps, ces mêmes théoriciens se référaient à l'infini de la liberté créatrice de l'homme. Citons encore une fois Cantor : "l'essence des mathématiques, c'est leur liberté"; ou encore : "[Les mathématiques (...)] méritent tout particulièrement le nom de *mathématiques libres*, expression que je préférerais, si j'avais le choix, à la désignation aujourd'hui courante de mathématiques *pures*" (28). Or c'est là quelque chose de sensiblement différent. Dans l'idée de Dieu, l'infini est pensé comme éternel, accessible tout au plus à notre pensée, mais la dépassant absolument ; c'est l'infini de Descartes, qui peut être reconnu mais non pas compris. L'infini de la liberté, au contraire est historique, construit par notre action et ouvert à des possibilités toujours nouvelles. Telle est l'image que suggèrent les plus récents développements des mathématiques.

Car les espérances des chercheurs de fondements ont été déçues. En 1925 encore, David Hilbert pouvait déclarer : "Le but de ma théorie est d'établir une fois pour toutes la certitude des méthodes mathématiques" (29). Il devait cependant être démenti peu après, par les deux importants résultats établis par Gödel en 1931 (30) : d'une part, pour démontrer la non-contradiction d'une théorie axiomatique, il faut recourir à une théorie plus puissante – or cette preuve ne sera elle-même certaine que si cette seconde théorie est elle-même non-contradictoire, et l'on retrouve ici la régression à l'infini. Mais il a montré d'autre part qu'une théorie axiomatique contenant la structure de l'arithmétique des entiers (c'est-à-dire, pratiquement toutes les théories mathématiques) est nécessairement non saturée, c'est-à-dire qu'on peut toujours y énoncer une proposition qui ne soit ni la conséquence nécessaire des axiomes, ni en contradiction avec eux ; il s'ensuit qu'une telle théorie peut toujours se développer et s'enrichir selon des voies ouvertes et en quelque sorte imprévisibles. La puissance et la liberté de la raison, dans l'invention de l'ordre, débordent toutes les lois qu'elle-même peut être tentée de se fixer à l'avance. Nous nous trouvons donc à présent devant un nouvel infini : un "jardin aux sentiers qui bifurquent" (Borges (31)), celui des innombrables mathématiques possibles.

(28) G. Cantor (1845-1918), *Grundlagen einen allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* ; cité d'après J.W. Dauben, *Georg Cantor –His Mathematics and Philosophy of the infinite*, Cambridge, Mass., 1979.

(29) D. Hilbert (1862-1943), "Uber das unendliche", *Mathematische Annalen* 95 (1926), pp. 161-190. Je cite ce texte d'après la traduction anglaise d'E. Putnam et G.J. Massey, dans P. Benacerraf et H. Putnam (éd.), *Philosophy of mathematics*, Cambridge 1983, p. 184.

(30) On trouvera un exposé succinct de ces deux démonstrations et de leurs implications dans Morris Kline, *Mathématiques : la fin de la certitude*, pp. 475-482.

(31) Voir la nouvelle qui porte ce titre dans le recueil *Fictions*, Paris 1951.