LES FICHIERS MÉTHODES : UN OUTIL POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

GROUPE 1ER CYCLE
Irem de Poitiers (1)

– Les difficultés
– Un outil de formation pour les élèves : utilisation du fichier en classe
– Un outil de formation pour les professeurs : analyse et choix des exercices

Qui d'entre nous n'est pas confronté quotidiennement à des élèves qui restent "secs" devant un problème de mathématiques, ou à des déclarations du type *"je n'ai pas su faire mes exercices, je n'ai rien compris"*. En fait, dès que l'exercice n'est plus un exercice d'application, dès qu'il ne s'agit plus d'imiter, les difficultés surgissent. Si nous ne voulons pas réduire notre enseignement à la répétition d'exercices type ; si nous pensons que faire des mathématiques c'est autre chose que d'imiter plus ou moins adroitement des exercices donnés en exemple ; si nous nous rendons compte que proposer aux élèves autre chose que des "imitations", c'est mettre la plupart d'entre eux en échec, alors que faire ? Notre attitude face à cette question est d'abord de dire qu'effectivement résoudre un problème est chose difficile, même si ce problème nous semble souvent, à nous experts, un exercice facile. Pour un débutant il n'y a rien de facile, pourrait être un postulat de base. L'élève qui sait résoudre les problèmes proposés, n'est-il pas celui qui :

- dans la lecture du texte se représente ce qu'on lui demande et sous quelle forme,
- trie rapidement, dans les méthodes de résolution possibles, celles qui sont appropriées aux données du problème,
- sait contrôler si ce qu'il a fait est conforme à ce qui lui était demandé ?

Ces capacités sont-elles innées ou s'apprennent-elles ? Comment peut-on les apprendre ou les développer ? Quels moyens donnons-nous à l'élève pour que, à terme, il devienne autonome dans l'appréhension de tout problème ?

Nous avons donc essayé d'identifier un

(1) Marie-José BACH, Jeanne GAY, Jean-Paul GUICHARD, Madeleine MAROT, Claude ROBIN.

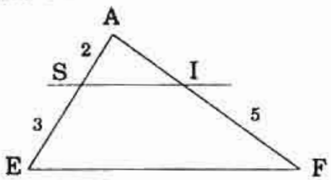
certain nombre de difficultés pour voir où et sur quoi nous pouvions agir pour aider l'élève. Ceci nous a amenés à nous centrer sur les méthodes à mettre en œuvre, et à essayer de rendre fonctionnelle une recherche de problèmes en analyse ascendante. Le répertoire de ces méthodes sous forme d'un fichier, utilisable par l'élève, nous a semblé pouvoir être un outil intéressant au moins à deux points de vue :

- en mettant l'accent sur le côté fonctionnel des connaissances, le cours étant trop souvent essentiellement un répertoire de connaissances qui ne dit rien sur le comment on peut s'en servir ;
- en incitant à une démarche questionnante de recherche.

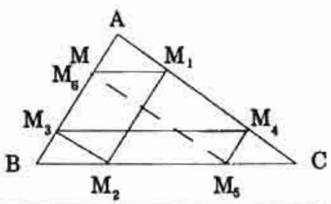
Essayons de voir en quoi résoudre un problème peut présenter des difficultés.

Prenons un exemple. Voici trois exercices qui peuvent être donnés, en classe de troisième, après avoir vu le théorème de THALÈS.

Exercice 1. (SI) est parallèle à (EF). Calculer AI.



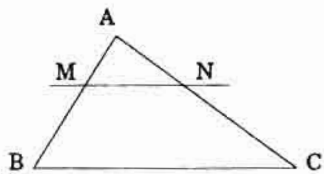
Exercice 2. M_1 est la projection de M sur (AC) parallèlement à (BC)



Démontrer que M et M_6 sont confondus.

Exercice 3. Partager, à la règle et au compas, le segment [AB] en 7 parties égales.

L'énoncé du théorème de THALÈS, au programme de la troisième, est le suivant :



Théorème : ABC étant un triangle, si M est sur (AB), N sur (AC), et si (MN) est parallèle à (BC), alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

On peut facilement réaliser, sur cet exemple, que si la logique du professeur est de faire utiliser le théorème de THALÈS (ce que perçoit fort bien l'élève, puisqu'il s'agit d'appliquer le théorème que l'on vient de "voir"), par contre la logique des exercices n'est pas l'application du théorème de THALÈS. En effet, appliquer le théorème de THALÈS consisterait à écrire pour l'exercice 1., le plus proche par sa figure de l'énoncé du théorème : (SI) et (EF) sont parallèles donc $\frac{AS}{AE} = \frac{AI}{AF} = \frac{SI}{EF}$. C'est d'ailleurs une démarche que font souvent les élèves. Et après, que faire ? Pour l'exercice 2., combien vais-je écrire d'égalités ? Vais-je les écrire toutes ? Quant à l'exercice 3... ?!

Ce qui est demandé par le professeur, c'est d'***utiliser*** le théorème de THALÈS, alors que ce qui est demandé par les exercices, c'est : *calculer, démontrer, partager*. En quoi le théorème de THALÈS permet-il de faire tout cela ? Quelles indications me donne son énoncé ? Il me dit que, sous certaines conditions de parallélisme, on peut écrire des rapports égaux. Or, même pour le premier exercice, faut-il encore percevoir qu'en écrivant une égalité de deux rapports bien choisis, dans laquelle 3 nombres sont connus, on obtient une équation dont la solution donnera la longueur cherchée. Ceci nous amène à mettre en évidence trois difficultés.

Première difficulté : la connaissance des outils.

Je peux connaître l'outil à utiliser pour résoudre mon problème sans savoir comment l'utiliser. Cette connaissance peut être implicite : *"On est dans le chapitre sur THALÈS"* ; ou bien explicite : pour "aider" l'élève, on rajoute à l'énoncé une indication du type : *"En utilisant le théorème..."*, pratique courante dans les sujets d'examens et de concours. Cette incapacité à utiliser les connaissances questionne sur la façon dont nous "délivrons" ces connaissances. Celles-ci sont le plus souvent présentées comme des objets, non comme des outils pour résoudre des problèmes. Les théorèmes tels qu'ils sont énoncés ne sont pas fonctionnels.

D'où la nécessité de faire avec les élèves une analyse de chaque énoncé pour voir ce qu'il dit, et ce qu'il permet de faire. Dans cette optique le théorème de THALÈS, que nous avons vu précédemment, va trouver sa place comme un moyen, une méthode, pour ***calculer une longueur***, ce que rien n'indique a priori dans son énoncé, ou pour ***démontrer une égalité***.

Voici, en exemple, un autre théorème : *"Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés du triangle est parallèle au troisième côté "*, que l'on peut reformuler ainsi : *"Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté "*. On perçoit alors que ce théorème permet de prouver que deux droites sont parallèles, si certaines conditions sont remplies : avoir un triangle, que l'une des droites passe par les milieux de deux côtés de ce triangle, et que l'autre soit le troisième côté du triangle. Cela nous montre que le travail d'analyse à faire est à la fois complexe, et fondamental.

D'où la question : quels énoncés devons-nous apprendre à nos élèves ? Ceux qui disent les objets, les concepts et leurs propriétés, ou ceux qui disent comment et où on peut se servir des objets, des concepts et de leurs propriétés ? Or, ce que nous demandons à nos élèves la plupart du temps, c'est d'utiliser des énoncés dont le libellé ne dit rien de leur utilisation possible.

Deuxième difficulté : la prise en compte de la question.

Même si je connais l'outil à utiliser, je dois prendre en compte la question posée. Ceci devient indispensable si je ne sais rien de l'outil à utiliser. En effet, les questions posées – sauf si l'on a été conditionné et que ces questions soient standardisées – n'indiquent pas, *a priori*, les connaissances (théorèmes, formules...) à utiliser.

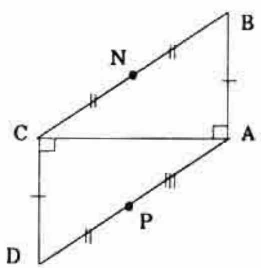
Par contre, la prise en compte de la question posée amène à se questionner sur ***les*** moyens d'y répondre : on débouche alors sur une panoplie d'outils possibles. Encore faut-il que ces outils soient disponibles. En tout cas, l'exploration des diverses possibilités, leur comparaison, l'essai de certaines, le retour à d'autres, permet de ne pas rester "sec" et d'avancer plus rationnellement vers une solution.

Troisième difficulté :
la prise en compte des données.

Si la prise en compte de la question posée peut me permettre d'envisager divers outils, diverses méthodes, se pose alors le problème du choix. Où vais-je trouver des indicateurs pour me décider ? Ces indicateurs ce sont les données du problème qu'il va falloir confronter avec les conditions d'utilisation de l'outil envisagé, d'où l'intérêt de bien les mettre en évidence.

Prenons un exemple pour illustrer ces différents niveaux de difficulté et leur enchaînement.

Exercice :



Les données du problème sont indiquées sur la figure.
Démontre que le quadrilatère CNAP est un losange.

Si dans cet exercice, il est facile d'identifier le type de problème posé – *"démontre que..."* –, la réponse à la question *"Comment faire ?"* est moins évidente. L'élève a de nombreuses connaissances sur le losange, mais il doit les repenser en tant qu'outils. Toutes les propriétés du losange doivent être mobilisées et reformulées en tant qu'énoncés pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange.

Sans apprentissage spécifique, un élève peut-il transformer ses connaissances sur le losange, par exemple *"le losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur, les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu...,"* en un "outil démonstratif" : *"Pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange, il suffit de démontrer que ses côtés ont même longueur, ou que ses diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires..."* ? Ensuite, même si ce travail de reformulation des énoncés a été fait, les méthodes sont nombreuses : on peut penser aux côtés, aux diagonales perpendiculaires... Comment faire un choix qui ne soit pas le fruit du hasard ?

Une solution est de revenir aux données du problème, après exploration de la conclusion, en éliminant les méthodes qui semblent peu utilisables dans le contexte par manque de données concernant les éléments de la figure auxquels fait référence la méthode envisagée, ou commencer par en privilégier une qui fait intervenir beaucoup de données de la figure. Par exemple, il y a beaucoup d'égalités de longueurs, donc on pourrait penser qu'essayer de prouver que les côtés ont même longueur serait une méthode possible. Se pose alors le problème de démontrer que CN = NA, NA = AP... qui amène à envisager les différentes méthodes pour démontrer que deux longueurs sont égales. L'une de ces méthodes a comme condition d'utilisation une des données du problème : un triangle rectangle. Ce choix conduira à CN = NA et CP = PA. Les autres méthodes amènent à se demander : "*Est-ce que (AC) ne serait pas la médiatrice de [NP] ?*", ou "*Est-ce que ABCD ne serait pas un parallélogramme particulier ?*", pistes qui peuvent être explorées.

On voit à partir de cet exemple tout l'intérêt de disposer d'une panoplie de méthodes face à une question bien identifiée : ce sont ces questions classiques et fondamentales ("*comment démontrer que deux longueurs sont égales ?*", "*Comment démontrer qu'un quadrilatère est un losange ?...*", et des panoplies d'outils pour y répondre que nous avons mis en forme à l'IREM de Poitiers dans nos fichiers METHODES (*cf.* Bibliographie [1]).

Avant de décrire les stratégies que nous essayons de mettre en place pour aider les élèves à vaincre leurs difficultés face à la résolution de problèmes, nous vous proposons un travail mettant en évidence ces difficultés et permettant aux élèves d'y réfléchir.

<u>Contexte :</u> Classe de Troisième, 28 élèves, chapitre trigonométrie dans le triangle rectangle, un mois après la rentrée.
<u>Support :</u> *Exercice : Calcule l'aire du triangle ABC tel que* $\hat{A} = 35°$, AB = 3cm, AC = 7cm.

AVANT d'écrire la solution de cet exercice, écris sur une feuille, dans l'ordre où elles te viennent, les questions que tu te poses et les réponses que tu imagines dans ta tête. Numérote-les.
Quand tu as fini, remets ta feuille au professeur, et fais l'exercice.

Travail individuel. Durée : 30 minutes.

Les réponses des 28 élèves font apparaître que 6 élèves seulement prennent en compte, en premier lieu, la question posée – le calcul de l'aire –, alors que 10 d'entre eux ne la prennent ***pas du tout*** en compte.

On pourra comparer à ce sujet, les écrits de 2 élèves dans l'encadré ci-dessous.

T3.
Comment trouver l'aire ?
trouver la hauteur et la base du triangle
Comment calculer la hauteur et la base?
pithagore ? <u>trygonométrie</u> ? Thalès ?
ça, car la hauteur fait un angle droit avec la base donc un triangle rectangle
<u>sin</u> ? cos ? tan,
ça, car on connait un angle et l'hypothénuse.

T25.
1. Que faut-il faire ?
2. Je regarde si le triangle est rectangle si oui ou non je me demande. Si vu qu'il y a un angle (35) je vais utiliser cosinus sinus ou tan .
3. Ou Thalès ou Pythagore
4. Comment je vais trouver BC ;
5. Si je peux vérifier une fois que j'ai trouvé.

Elèves de 3e

Donc, la prise en compte de la question posée n'est déjà pas chose courante.

Pour 15 élèves la question : "*Est-ce que ABC est rectangle ?*" prime sur toutes les autres, et pour 4 autres, la priorité est : "*Quel théorème dois-je utiliser ?*" ou "*Quelle formule vais-je utiliser ?*"

Ces démarches amènent de fait les élèves soit à se bloquer, soit à passer du temps à chercher pour ensuite calculer ou prouver des choses inutiles, car n'ayant pas de lien direct avec le problème, ni avec sa solution.

Par contre, on ne peut que constater que les élèves qui ont des démarches du type de T3 réussissent très bien.

Pour résoudre la tâche complexe qu'est un problème de mathématiques, il nous semble donc que nous devons développer chez nos élèves des stratégies d'action pour qu'ils maîtrisent ces trois étapes fondamentales : *Qu'ai-je à faire ? Comment le faire ? Quelle méthode choisir ?*

L'objectif principal des programmes de mathématiques, tous niveaux confondus, étant la résolution de problèmes, nous avons, à l'IREM de Poitiers, élaboré un outil de travail pour que les élèves puissent mener à bien ce type de tâche.

Notre premier travail a été d'interroger notre discipline sur les différents types de tâches que l'on donne aux élèves. Ceci a été possible par l'analyse de nombreux sujets d'examen allant du brevet des collèges aux concours du CAPES et de l'agrégation.

Nous avons donc fait une classification en termes de questions et non de contenus, classification qui tient compte de la logique de la discipline, et qui est la base de nos fichiers METHODES. Nous avons retenu cinq types de questions : *DEMONTRER, CALCULER, TRANSFORMER, CONSTRUIRE, RESOUDRE.*

Quelques remarques sur les verbes de base de la classification : le verbe calculer, par exemple, se trouve dans trois des cinq rubriques, ce qui montre que l'important est de bien identifier le type de problème à partir du **sens** de l'énoncé ; il faut donc privilégier le sens sur la syntaxe. Ce travail est indispensable, d'autant que les cinq verbes de base sont à retrouver sous les libellés divers des questions posées.

Qu'ai-je à faire ?

DÉMONTRER......................
(démontrer, montrer, prouver, justifier, expliquer, vérifier...)

CALCULER...........................
(calculer, écrire, déterminer, vérifier...)

TRANSFORMER..................
(écrire..., calculer, développer, factoriser...)

CONSTRUIRE......................
(construire, tracer, dessiner, placer, reproduire, faire...)

RÉSOUDRE.........................
(résoudre, trouver, pour quelle valeur..., calculer, chercher...)

Comment le faire ?

(extrait de [1a])

Si toute activité mathématique mêle ces différents types de questions, néanmoins cette typologie est une aide à l'analyse de ce qu'il y a à faire, tant pour l'enseignant que pour l'élève.

D'où l'intérêt au niveau didactique d'une réflexion sur le texte même des exercices que nous posons : gare à la tendance à la stéréotypie qui nous guette, et qui déclenche, chez nos élèves, des comportements d'automates que nous déplorons ensuite !

Nous reviendrons sur le choix des problèmes à proposer dans la suite de cet article.

Une fois le type de problème identifié, l'élève est confronté à la question : *Comment le faire ?* Au premier cycle, nous avons identifié 36 questions nécessitant la connaissance d'environ 120 méthodes ! Et nous avons visé l'essentiel sans vouloir être exhaustifs.

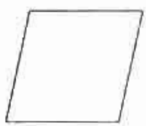
Le travail fait nous a de plus amenés à ***distinguer deux types de fiches méthodologiques*** : des fiches multi-méthodes et des fiches démarches. En effet, pour nous, il y a un travail de réflexion méthodologique dans deux cas.

Premier cas : pour répondre à la question posée, il y a au moins 2 méthodes envisageables. Sinon on est dans une logique du conditionnement : question-réponse. Se pose alors un problème de choix : nous avons volontairement limité le nombre de méthodes à 5 ou 6 maximum, car s'il y en a trop on ne peut bien les mémoriser, et donc y avoir accès rapidement ; de plus un nombre limité de méthodes favorise un travail de réflexion et de choix. (Exemple de fiche Collège *"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un losange ?"*).

❶ ❻

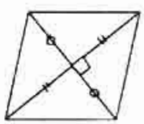
Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un LOSANGE

Méthode 1 — *En prouvant qu'il a quatre côtés de même longueur*



Méthode 2 — *En prouvant que ses diagonales*

ont même milieu
sont perpendiculaires



Méthode 3 — *En prouvant que c'est un parallélogramme particulier (avec deux côtés consécutifs de même longueur)*

(extrait de [1a])

Deuxième cas : la méthode est éventuellement unique, et se présente alors souvent comme un algorithme mais pour lequel l'individu n'est pas un simple exécutant ; ce sont des algorithmes complexes qui ne peuvent être vraiment bien utilisés que si l'on a des balises, des repères que nous avons appelés principes.

(Exemple de fiche Collège "*Comment résoudre une équation du premier degré à une inconnue ?*").

1

Comment résoudre une EQUATION du 1^er^ degré à une inconnue

PRINCIPE

Transformer l'égalité de départ (équation) en une nouvelle égalité et continuer dans le but d'obtenir une égalité de la forme : inconnue = un nombre (la solution)

Méthode 1

(méthode arithmétique)
En utilisant les opérations inverses de celles qui sont indiquées
Si on a une équation simple avec l'inconnue d'un seul côté

$$a - 7 = 12$$
$$a = 12 + 7$$
$$a = 19$$

$$\frac{b}{2} = \frac{7}{5}$$
$$b = \frac{7}{5} \times 2$$
$$b = \frac{14}{5}$$

$$2 \times (l + 7) - 3 = 17$$
$$2 \times (l + 7) = 17 + 3$$
$$l + 7 = 20 : 2$$
$$l = 10 - 7$$
$$l = 3$$

Méthode 2

(méthode algébrique ou de la balance)
En utilisant les règles
R1 : ajouter (ou retrancher) un même nombre de chaque côté
R2 : multiplier (ou diviser) chaque côté par un même nombre
R3 : passer aux opposés

$$\begin{array}{rcl} & 2(x + 7) = 3(x - 4) & \\ & 2x + 14 = 6x - 12 & \\ -2x & & -2x \\ & 14 = 4x - 12 & \\ +12 & & +12 \\ & 26 = 4x & \\ :4 & & :4 \\ & \frac{26}{4} = x & \\ & 6{,}5 = x & \end{array}$$

Etapes de la résolution :
1. Simplifier de chaque côté (voir Transformer)
2. Mettre les termes contenant l'inconnue d'un même côté (en utilisant R1)
3. Mettre les termes sans inconnue de l'autre côté (en utilisant R1)
4. Isoler l'inconnue (en utilisant R2 et éventuellement R3)

(extrait de [1a])

Là aussi, en général, ces balises ne sont pas données explicitement aux élèves : c'est pourtant leur connaissance qui permet le transfert de la méthode.

Ce travail a été poursuivi en second cycle, et a débouché sur la publication de deux fichiers (*cf.* bibliographie [1]). Il est intéressant de voir le côté intégrateur de la démarche : les connaissances méthodologiques ne s'empilent pas, sinon elles deviennent rapidement inutilisables car trop nombreuses, mais elles se restructurent. (Exemple de fiche T.C. (extrait de [1c]) : "*Comment démontrer que l'on a deux droites perpendiculaires ?*").

❺ . ❸	**Comment démontrer que l'on a deux droites perpendiculaires ?**

1 - Géométrie des figures

Méthode 1

En utilisant les relations parallélisme - orthogonalité.

Méthode 2

En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore dans un triangle.

Méthode 3

En utilisant les configurations classiques (hauteur d'un triangle, médiatrice d'un segment, tangente à un cercle, triangle inscrit dans un demi-cercle...).

2 - Géométrie vectorielle

Méthode

En montrant qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

3 - Géométrie analytique

Méthode

En recherchant des équations des droites et en prouvant :
* que le produit des coéfficients directeurs est -1
* que le produit scalaire des vecteurs directeurs est nul.

4 - Géométrie complexe

Méthode

En montrant que $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$

où D(d) C(c) sont deux points distincts de la première droite et B(b) et A(a) sont deux points distincts de la seconde droite.

5 - Géométrie des transformations

Méthode 1

En montrant que les droites sont les images de deux droites perpendiculaires par une similitude directe ou une isométrie.

Méthode 2

En montrant que l'une est l'image de l'autre par une rotation ou une similitude directe d'angle $\pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

6 - Géométrie des angles

Méthode

En montrant que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ à l'aide des relations angulaires.

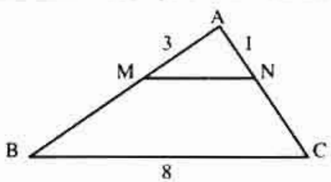
(Angles des triangles isocèles, équilatéraux - Somme des angles d'un triangle. Angles inscrits et angles au centre...).

Voyons maintenant comment un élève peut utiliser son fichier METHODES en classe et pourquoi, selon nous, c'est un outil de formation pour lui.

Imaginons cet exercice donné dans une classe de Troisième :

Se poser la question *"Qu'ai-je à faire ?"* amène l'élève à identifier son problème comme un problème de **construction** – construction du triangle AMN ou ABC. D'ailleurs c'est bien ainsi que la plupart des élèves identifient la question : ils se lancent dans la construction, sans analyse

Construis, en vraie grandeur, la figure schématisée ci-contre, sachant que (MN) est parallèle à (BC) et que le périmètre de ABC est 17.



préalable du *comment faire*, et c'est l'échec de leurs tentatives qui les amène soit à abandonner, soit à se questionner. La question *"Comment le faire ?"* conduit l'élève, à partir de la fiche *"Comment construire une figure ?"* ou d'une fiche supplémentaire, créée, *"Comment construire un triangle ?"*, à s'apercevoir qu'il lui ***manque*** des mesures – angles ou longueurs –, et le problème se transforme en un problème de **calcul** d'angles ou de longueurs (fiches *"Comment calculer une longueur ?"* et *"Comment calculer un angle ?"*). Une bonne connaissance de son fichier et la confrontation aux données va le conduire à éliminer les méthodes les plus familières pour lui, celles liées au triangle rectangle, pour utiliser l'énoncé de THALÈS (méthode 3).

Mais chaque égalité écrite va contenir deux inconnues et renvoyer à la fiche *"Comment résoudre un problème à l'aide d'une équation ?"*, qui après la mise en équation à partir du texte, renvoie à *"Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues ?"*. Cette fiche, qui donne le principe de résolution et trois méthodes possibles, peut ou non être utile à l'élève – tout comme les autres fiches, d'ailleurs – selon son degré de maîtrise.

Nous voyons donc que notre fichier n'est pas du tout conçu comme une suite de recettes où l'élève n'aurait aucune initiative à prendre. Au contraire, il est invité à enclencher un processus de questionnement, et, à chaque étape, à faire un choix raisonné. Donc, c'est lui qui se construit une stratégie, sur fond d'autres stratégies possibles. N'est-ce pas là ce que nous voulons développer chez nos élèves ?

Un exemple d'utilisation en seconde-première est donné en encadré (voir page suivante).

En fait, chacun de nos fichiers, tel que nous en concevons l'utilisation, est ***un outil momentané : son intérêt est d'amener l'élève à se poser des questions, et la recherche de réponses dans le fichier le conduit petit à petit à intégrer des méthodes et des démarches***. Et, de fait, les fiches deviennent ensuite obsolètes. C'est en plus un outil très souple que l'élève peut personnaliser, compléter, enrichir au fil de ses apprentissages, abandonner, ou ne pas utiliser. Il pourrait se le construire : ce serait encore mieux, diront certains, mais l'expérience montre que le travail devient très lourd, et est alors rapidement abandonné.

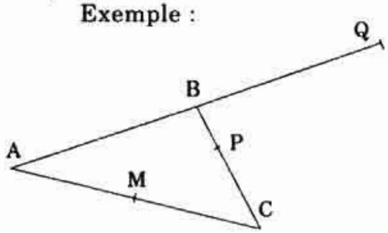
Travailler sur les méthodes avec les élèves, c'est s'interdire de leur dire : *"Il suffisait de penser à..."*, *"Que reconnaissez-vous...?"*, *"Il est facile de voir que..."*, *"Avec un peu de flair..."*. C'est refuser que les solutions d'exercices apparaissent comme des tours de prestidigitation, comme une suite d'astuces, dont la connaissance ne permet de résoudre que ce type d'exercice. Cela nous amène à questionner le type d'exercices et de problèmes que nous donnons à nos élèves.

Nous avons vu comment l'intérêt porté aux difficultés des élèves à résoudre des problèmes nous a amenés à essayer d'identifier les différentes méthodes envisageables, à un niveau donné, à repenser les grands types de problèmes que l'on se pose en mathématiques, et à fabriquer des fichiers METHODES. En retour, nous allons essayer de montrer que cette démarche méthodologique, objectivée par

UTILISATION DU FICHIER :

Le fichier est un **ensemble de méthodes** :

- Il peut servir à **retrouver une méthode oubliée**.
  Exemple : Y a-t'il une méthode avec l'homothétie pour démontrer que des points sont alignés ?
- Il peut servir à **retrouver l'algorithme d'une méthode**.
  Exemple : Je ne sais plus déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points
- Il peut aider à **trouver une stratégie** pour résoudre un problème.
  Exemple :



ABC est un triangle.
M est le milieu de [AC].
P est le point de [BC] tel que PC = 2 PB.
Q est le point de (AB),
extérieur au segment [AB]
tel que AQ = 2 QB.
Démontrer que M, P et Q sont alignés.

1) Que dois-je faire ? Calculer ? Démontrer ? Construire ? Transformer ? Résoudre ?
C'est un problème de démonstration, on se reporte à la rubrique COMMENT DEMONTRER QUE

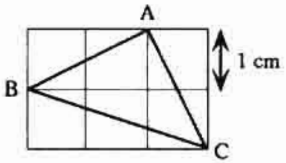
2) Comment le faire ?
Il faut démontrer que des points sont alignés.
On trouve la fiche Comment démontrer que TROIS POINTS SONT ALIGNES

Les cadres proposent diverses méthodes, il faut choisir :
CONFIGURATION : N'ayant aucune mesure d'angle, la méthode n'est pas applicable. Il n'y a pas de droite parallèle à (MP) ou à (MQ) apparente. Cette méthode paraît difficile à appliquer.
VECTEURS : Les données et la conclusion vont se traduire facilement, cette méthode paraît intéressante.
ANALYTIQUE : Il n'y a pas de repère orthogonal apparent, les deux méthodes semblent difficiles à appliquer.
TRANSFORMATIONS : On ne reconnaît pas de configuration connue au niveau seconde/première, ces méthodes semblent difficiles à appliquer.

L'outil raisonnable semble être le vecteur...

Ayant choisi la méthode de résolution, on peut développer la démonstration et répondre à la question posée. (extrait de [1b]) les fichiers METHODES, est un bon outil d'analyse des exercices permettant à l'enseignant de faire des choix éclairés.

Considérons, par exemple, l'exercice figurant dans l'encadré.



Quelle est la nature du triangle ABC ?
(Chaque carré a un côté de longueur 1 cm)

L'envisager sous l'angle de nos fichiers METHODES, c'est envisager d'abord différents outils possibles pour le résoudre en les confrontant aux données du problème, au lieu de se lancer sur la première idée venue. Ici, pour démontrer que ABC est rectangle en A, c'est, au lieu de se précipiter sur la réciproque du théorème de PYTHAGORE, se dire :

— qu'en restant dans le domaine des configurations on pourrait démontrer que l'angle $\hat{A}$ est droit comme somme de deux angles complémentaires (et il y a sur la figure des triangles rectangles aux angles complémentaires),

— qu'en utilisant les vecteurs on pourrait calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (et il y a un quadrillage, donc le calcul des coordonnées est facile),

— qu'en utilisant l'analytique on pourrait calculer le produit des coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) (et là encore, c'est très facile à cause du quadrillage),

— qu'en utilisant les transformations on pourrait compléter la figure, donc étendre le quadrillage, et obtenir un carré ou un losange.

On voit que cet exercice, qui pour certains enseignants n'est qu'un exercice d'application du théorème de PYTHAGORE et de sa réciproque, est en fait un exercice "riche", c'est-à-dire que les élèves peuvent résoudre de plusieurs façons. Cela est pour nous très important vis-à-vis de la formation des élèves, car, poser un exercice de ce type permet :

1) de prendre en compte la diversité des connaissances des élèves et de leur degré d'appropriation, sans privilégier une seule approche, qu'ils ne maîtrisent peut-être pas encore,

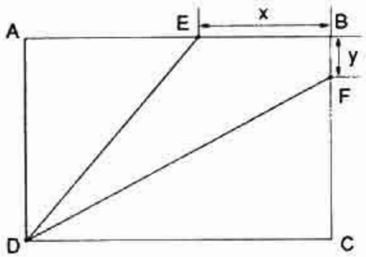
2) de renvoyer les élèves qui disent : "*Je n'y arrive pas, je ne sais pas faire, je n'ai pas d'idée, l'inspiration ne vient pas...*" à une démarche de recherche d'idées, via le fichier,

3) de travailler sur les méthodes, c'est-à-dire de réfléchir aux différents moyens pour résoudre un problème.

Les idées que nous disions astucieuses, comme ici d'étendre le quadrillage et compléter la figure, s'inscrivent alors dans une logique de recherche identifiable, donc transférable.

Analyser les exercices sous l'angle des méthodes, nous amène à nous poser des questions vis-à-vis du guidage des exercices et des indications que nous donnons souvent à nos élèves pour les mettre sur la voie, ou que donnent les manuels tant aux professeurs qu'aux élèves.

Par exemple dans cet exercice extrait du manuel *Pythagore 3^e*, Hatier 1989, le commentaire : "*Entre nous : ici les équations du système ont chacune une seule inconnue*" laisse à penser qu'il n'y a qu'une façon d'écrire les deux équations, et que cet exercice est un piège pour l'élève.

> Soit ABCD, un rectangle de longueur AB = 72 mm et de largeur BC = 51 mm.
>
> 
>
>
> Un point E est situé sur le segment [AB] à x mm de B, et un point F sur [BC] à y mm de B.
> Déterminer x et y pour que [DE] et [DF] partagent le rectangle en trois parties d'aires égales.
>
> ENTRE NOUS : ici les équations du système ont chacune une seule inconnue.

Or, l'expérience montre que, rares sont les élèves qui vont écrire le système attendu des auteurs de l'exercice. Beaucoup écrivent, comme y incite le texte : aire ADE = aire DEBF = aire DFC, et butent sur la difficulté d'exprimer l'aire de DEBF en fonction de x et y, ce qui est loin d'être inintéressant. Ils auront alors deux équations contenant chacune deux inconnues. En examinant de plus près les résolutions des divers systèmes possibles, on s'aperçoit qu'elles ne mettent pas en jeu les mêmes règles, et donc, ne font pas fonctionner les mêmes connaissances. Par conséquent, suivant les objectifs pédagogiques qu'il poursuit, le professeur pourra faire différents choix : se contenter d'une solution différente suivant les élèves, imposer la même méthode à tous (et il faudra alors qu'il modifie le texte de l'exercice), donner comme consigne de trouver au moins deux méthodes différentes...

Analyser ainsi les exercices, nous permet de repérer deux types d'exercices :

— des exercices "fermés", c'est-à-dire où une seule méthode est possible,

— des exercices "ouverts", à savoir où plusieurs méthodes peuvent aboutir.

Pour ce deuxième type d'exercices, la recherche "méthodologique" des diverses méthodes envisageables peut nous conduire à des solutions insoupçonnées.

Par exemple pour l'exercice suivant (extrait de [2]) :

> *2) ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. P est la projection orthogonale de H sur (AC), Q celle de H sur (AB). On note I le milieu de [BC].*
> *Démontrer que (PQ) est orthogonale à (AI).*

on peut aboutir en utilisant : les angles, ou les hauteurs d'un triangle, ou le produit scalaire, ou l'analytique, ou une homothétie, ou une similitude, ou des symétries... (Il est à noter que les élèves aussi, face à cet exercice, ou à des exercices du même genre, trouvent des solutions qui nous surprennent.)

Ces exercices nous "ouvrent" l'esprit, nous forcent à réfléchir, et le fichier METHODE nous incite à aller chercher des solutions autres que celle que nous avons trouvée. La vertu formatrice de tels exercices peut nous amener à les utiliser tels quels avec les élèves ; nous pouvons aussi les "fermer", en modifiant leur texte ou la consigne de résolution. Mais nous faisons alors des choix que nous pouvons justifier, dont nous pouvons répondre.

Par contre, les exercices "fermés" nous questionnent dans l'optique d'un travail de réflexion sur les méthodes. En effet, et nous l'avons évoqué dans la première partie, un travail sur les méthodes n'a de sens que, si pour résoudre un problème, ou un exercice, ou une question de problème, se posent effectivement des problèmes de choix, de stratégies, c'est-à-dire si un minimum d'activité intellectuelle est dévolue à l'élève, si celui-ci n'est pas considéré comme un simple exécutant. Or, bon nombre d'exercices de mathématiques – et c'est peut-être ce qui les rend rébarbatives aux yeux de beaucoup – ne sont que des applications, applications de théorèmes, de formules. Aucun questionnement n'est laissé à l'élève. Or pour qu'il y ait un travail sur les méthodes, il faut qu'il y ait effectivement problème pour l'élève.

Ceci nous a amené à reconsidérer complètement la façon de formuler les exercices "fermés" pour les rendre formateurs. La technique consiste à les déverouiller, à les ouvrir, c'est-à-dire à trouver des formulations qui laissent des choix. Et cela nous le faisons même pour des exercices qui peuvent paraître élémentaires, par exemple : "*Calculer* $A = \sqrt{2} + \sqrt{8}$" ou "*Ecrire* $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ *sous la forme* $a\sqrt{2}$, *a étant un entier*", que nous transformons en "$\sqrt{2} + \sqrt{8}$ *est-il égal à* $\sqrt{18}$? " ou "$\sqrt{2} + \sqrt{8}$ *est-il égal à* $\sqrt{10}$? ". Mêmes propriétés mathématiques à l'œuvre, mêmes règles, mais pas les mêmes démarches. Ces nouvelles formulations rapprochent le travail de résolution des exercices d'une vraie activité mathématique, et nous font toucher du doigt les problèmes de transposition didactique des savoirs.

Peut-être peut-on soutenir que les méthodes "ça ne s'enseigne pas" : ce sont les contenus qui s'enseignent. Les méthodes feraient plutôt partie du fonctionnement cognitif de l'individu, auquel on ne doit pas, ou on ne peut pas toucher. La façon de chercher dépendrait de chacun, de ses dons, de l'inspiration... Pour notre part, nous pensons, à la suite de DESCARTES (*cf.* [3]), que l'on peut mettre de l'ordre et de la méthode dans la recherche, et que "*bien conduire sa raison*" s'apprend. **Intégrer** l'apprentissage des méthodes à notre enseignement, c'est aider l'élève à se construire des stratégies d'action.

Un intérêt essentiel des fichiers METHODES, est de transformer des connaissances en outils de résolution de problèmes, et de faire prendre petit à petit conscience aux élèves de cette transformation. Pour nous, professeurs, il permet de mesurer l'ampleur des connaissances utiles, utilisées effectivement, et d'amorcer un recentrage sur l'essentiel, sur les démarchesles plus importantes de notre discipline. Et par là, d'essayer de redonner du sens à des exercices et problèmes qui n'en ont parfois plus beaucoup. Pour terminer, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que, pour nous, l'objectif des fichiers METHODES étant d'aider l'élève à se construire de bonnes démarches, leur vocation est d'être jetables, feuille par feuille, ou même en bloc. Notre objectif n'est pas d'apprendre aux élèves à utiliser desfichiersMETHODES, mais bien de développer des méthodes de travail et d'appréhension des problèmes, et donc d'amener l'élève à une certaine autonomie dans sa recherche, aussi bien vis à vis de l'enseignant que vis à vis des fichiers METHODES !

BIBLIOGRAPHIE

[1] Les fichiers de l'IREM de Poitiers :
– a. *Fichier méthodes - Collège, avec fascicule d'accompagnement*, 1991.
– b. *Fichier méthodologique mathématiques seconde-première*, 1992.
– c. *Fichier mathématiques T.C.*, 1992.

[2] P. CHEVRIER - J-P. DOBIGEON : "*La géométrie plane au lycée*", IREM de Poitiers, 1989.

[3] R. DESCARTES : *Règles pour la direction de l'esprit. Règle IV. In Œuvres et Lettres*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard 1953.

[4] A. ROBERT, I. TENAUD :"Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C", *in Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/1, La pensée sauvage éditions, Grenoble 1989.

[5] M. ROGALSKI, "Enseigner des méthodes en mathématiques", *in Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année. Commission Inter-IREM,* (CI2U) IREM de Lille 1990.